الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département : Mathématiques et Informatique
جامعة خميس مليانة
كلية العلوم والتكنولوجيا
قسم : الرياضيات والإعلام الآلي

Polycopié du cours

Rédigé par : M. Boukedroun

Enseignant chercheur

Résumé :

Ce document est destiné aux étudiants de deuxième année Maths (L2 Maths) de département de Mathématique Informatique de la faculté des sciences et de technologie d'université de Khemis –Miliana.

Le but de ces quelques pages est de rassembler, de manière synthétique, les principaux résultats généraux de probabilités,
Les deux premiers chapitres sont des rappels sur l'analyse combinatoire et le dénombrement ainsi que des rappels sur les notions de base de calcul des probabilités.

Important :

Avant de passer au programme de probabilités (L2 Maths), il est bon de penser et passer aussi à un rappel sur le dernier chapitre de la matière d'introduction au calcul de probabilités de L1 MI tout ça pour assurer une bonne continuité du programme.

Année universitaire : 2023/2024

Matière : Probabilités

Chapitre1 : Variables aléatoires

Variables aléatoires à une dimension :

- **I.** Généralités sur les variables aléatoires.
- **II.** Variables aléatoires discrètes-loi de probabilités- Espérance – Variance.
- **III.** Variables aléatoires absolument continues -Fonction de densité - Espérance - Variance.
- **IV.** Inégalités en probabilités (Markov, Jensen, Tchebychev, etc)

Chapitre2 : Lois de probabilités usuelles

- **I.** Lois discrètes : Bernoulli – Binomiale -Multinomiale– Hypergéométrique- Poly-hypergéométrique – Géométrique – Poisson.
- **II.** Lois de probabilités absolument continues usuelles : Uniforme – Exponentielle-Normale – Weibull, Log-normale- Cauchy-Béta, Khi-deudž, “tudeŶt, Fisheƌ,…
- **III.** Approximations de certaines lois
  - Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale
  - Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson
  - Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale
  - Approximation d'une loi binomiale par une loi normale.
- **IV.** Transformations sur les variables aléatoires

Chapitre 1 (Rappel)

Dénombrement (Analyse combinatoire)

Analyse combinatoire

1. **Rappels de dénombrement :**

Proposition :

Soit E un ensemble fini.

1. Une permutation de E est une façon d'ordonner les éléments de E

Le nombre de permutation d'un ensemble à n éléments est :

$n! = 1\times 2\times 3\times ...\times(n-2)\times(n-1)\times n$

2. Un arrangement de k élément de E est une façon de choisir est d'ordonner k éléments de E : c'est une suite de k élément de E distincts 2 a 2

   Le nombre d'arrangement de k éléments parmi n éléments ($0 \le k \le n$) est :

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3. Une combinaison de k éléments de E est une façon de choisir k éléments de E , sans spécifier d'ordre : c'est un sous ensemble de E a k élément

   Le nombre de combinaison de k éléments parmi n éléments ou ($0 \le k \le n$) est

   $$C_n^k = \frac{n(n-1)...n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Remarques

1. On peut dire aussi qu'un arrangement correspond à un tirage de k éléments un par un (et sans remise) en mémorisant l'ordre de tirage, tandis qu'une combinaison correspond à un tirage de k éléments simultanément.
2. Un arrangement de n éléments parmi n est une permutation,

2. **Triangle de Pascal**

Le triangle arithmétique de Pascal est le triangle dont la ligne d'indice n (n = 0, 1, 2...) donne les coefficients binomiaux C_n^p pour p =0, 1, 2..., n.
Ces nombres apparaissent dans le développement de (a + b)^n et dans nombreux domaines en mathématiques comme l'analyse combinatoire.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

3. Méthode de construction du triangle de Pascal

La construction de ce triangle de Pascal est simple, on part de 1 à la première ligne, par convention c'est la ligne zéro (n = 0). Pour avoir un terme de la ligne suivante, on prend le terme juste au-dessus, et on lui additionne celui qui est juste avant, (0 si il n'y a rien).

Mathématiquement, on applique la formule : $C_{n+1}^{p} = C_n^p + C_n^{p-1}$

4. Coefficients du développement de $(a + b)^n$.

Les nombres obtenus sont en fait les coefficients du développement de $(a + b)^n$. Par exemple :

- La ligne 0 est : **1** soit le coefficient de : $(a + b)^0 = 1$.
- La ligne 1 est : **1 - 1** soit les coefficients de : $(a + b)^1 = 1\times a + 1\times b$.

  Tout commence vraiment à la ligne n°2 (la 3ème en fait) :
- La ligne 2 est : **1 - 2 - 1** soit les coefficients de : $(a + b)^2 = 1\times a^2 + 2\times ab + 1\times b^2$.
- La ligne 3 est : **1 - 3 - 3 - 1** soit les coefficients de : $(a + b)^3 = 1\times a^3 + 3\times a^2b + 3\times ab^2 + 1\times b^3$.
- La ligne 4 est : **1 - 4 - 6 - 4 - 1** soit les coefficients de : $(a + b)^4 = 1\times a^4 + 4\times a^3b + 6\times a^2b^2 + 4\times ab^3 + 1\times b^4$.
- La ligne 5 est : **1 - 5 - 10 - 10 - 5 - 1** soit les coefficients de : $(a + b)^5 = 1\times a^5 + 5\times a^4b + 10\times a^3b^2 + 10\times a^2b^3 + 5\times ab^4 + 1\times b^5$.

Résume sur les méthodes de dénombrement

Types de tirages	Ordre	Répétition d'éléments	Dénombrement
Successifs avec remise	On tient compte de l'ordre	Un élément peut être tiré plusieurs fois	n^p $p-listes$
Successifs sans remise	On tient compte de l'ordre	Un élément n'est tiré qu'une seule fois	A_n^p Arrangement
Simultanés sans remise	L'ordre n'intervient pas	Un élément n'est tiré qu'une seule fois	C_n^p combinaisons
Simultanés avec remise	L'ordre n'intervient pas	Un élément peut être tiré plusieurs fois	C_{n+k-1}^k combinaisons avec répétition

5. Exemples d'application

5.1 Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?

Solution :

Notons E l'ensemble des trois entrés disponibles, E= {E_1, E2, E3} ainsi card(E)=3
Notons P l'ensemble des deux plats disponibles, P= {P_1, P2} ainsi card(P)=2
Notons D l'ensemble des quatre desserts disponibles, D= {D_1, D2, D3, D4} ainsi card(D)=4

Un menu est constitué d'un triplet ordonné de trois éléments choisis respectivement dans E,P et D.
On effectue donc le produit cartésien de ces trois ensembles
Le nombre de menus que l'on peut composer est donc est égal à card(E)xcard(D)xcard(P) =3x2x4=24

5.2 Une femme a dans sa garde-robe 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

Solution :
Cette femme peut s'habiller de 4x5x3=60 façons

5.3 A l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent, une de bronze. Combien y-a-t-il de distributions possibles (avant la compétition, bien sûr…) ?

Solution :
Un tel podium est un arrangement de 3 athlètes choisi parmi l'ensemble des 18 athlètes (l'ordre compte et il ne peut y avoir de répétition, un athlète ne pouvant remporter deux médailles simultanément alors
Il existe donc $A_{18}^{3} = \dfrac{18!}{(18-3)!} = 4896$ *podiums différents*

5.4 De combien de façons peut-on choisir 3 femmes et 2 hommes parmi 10 femmes et 5 hommes ?

Solution :

Un choix de 3 femmes et 2 hommes parmi 10 femmes et 5 hommes est un élément du produit cartésien entre :

- L'ensemble des choix simultanés de 3 hommes parmi 10, de cardinal $C_{10}^{3} = 120$
- L'ensemble des choix simultanés de 2 femmes parmi 5, de cardinal $C_{5}^{2} = 10$
- L'ensemble des choix de 3 femmes et hommes parmi 10 femmes et 5 hommes vaut donc $C_{10}^{3} \times C_{5}^{2} = 1200$

5.5 Quel est le coefficient de $x^{3}y^{7}$ dans le développement de $(x-y)^{10}$

Solution :
De façon générale on a $(x-y)^{10} = \sum_{k=0}^{k=10} C_{10}^{k} x^{k} (-y)^{10-k}$

Le terme de x^3y^7 est obtient pour k=3

Il apparait dans le binôme sous la forme $C_{10}^{3}x^3(-y)^{10-3} = -C_{10}^{3}x^3y^7$

Le coefficient de x^3y^7 est -120

5.6 On veut calculer $s = \sum_{k=0}^{k=n} k\left(C_n^k\right)^2$

1. Justifier que : $s = \sum_{k=0}^{k=n} (n-k)\left(C_n^k\right)^2$
2. En déduire 2s puis calculer s

Solution :

1. Posons k = n-j,

$$s = \sum_{k=0}^{k=n} k\left(C_n^k\right)^2 = \sum_{j=n}^{0} (n-j)\left(C_n^{n-j}\right)^2 = \sum_{0}^{n} (n-j)\left(C_n^j\right)^2$$

En repassant à la variable k on trouve $s = \sum_{0}^{n} (n-k)(C_n^k)^2$

2. En déduire 2s :

$$2s = \sum_{k=0}^{k=n} k\left(C_n^k\right)^2 + \sum_{0}^{n} (n-k)\left(C_n^k\right)^2 = \sum_{0}^{n} k\left(C_n^k\right)^2 + (n-k)\left(C_n^k\right)^2 = \sum_{0}^{k} \left(k+(n-k)\right)\left(C_n^k\right)^2$$

$$= n\sum_{0}^{n}\left(C_n^k\right)^2$$

3. Calculer s

$$S = \frac{1}{2}nC_n^{2n} = \frac{1}{2}n\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{2}n\frac{(2n-1)!2n}{n!n!} = n\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} = nC_n^{2n-1}$$

Série n=01 (Rappel sur l'analyse combinatoire)

Exercice 1: Une femme a dans sa garde-robe 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

Exercice 2: Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?

Exercice 3: A l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent, une de bronze. Combien y-a-t-il de distributions possibles (avant la compétition, bien sûr…) ?

Exercice 4: Un clavier de 9 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres distincts ou non.
1) Combien de codes différents peut-on former ?
2) Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?

Exercice 5: Le groupe des étudiants de deuxième année doit s'inscrire à un concours. Il faut établir une liste de passage. Combien y a-t-il de manières de constituer cette liste ? (il y a 24 étudiants dans la classe).

Exercice 6: Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot **MATH** ?

Exercice 7: Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot **TABLEAU** ?

Exercice 8: Dénombrer toutes les anagrammes possibles du mot **PRISÉE**
1) En tenant compte de l'accent
2) En ne tenant pas compte de l'accent sur le « e »

Exercice 9: Un groupe de 3 étudiants de deuxième année doit aller chercher des livres au CDI. De combien de manières peut-on former ce groupe ? (il y a 24 étudiants dans la classe)

Exercice 10: Un tournoi sportif compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois. Combien doit-on organiser de matchs ?

Exercice 11: Dans une classe de 32 élèves, on compte 19 garçons et 13 filles. On doit élire deux délégués.
1) Quel est le nombre de choix possibles ?
2) Quel est le nombre de choix si l'on impose un garçon et fille
3) Quel est le nombre de choix si l'on impose 2 garçons ?

Chapitre 2 (Rappel)
Notions de bases de probabilités

I. Notions de probabilités

Introduction

Le présent chapitre tente de présenter les principaux concepts de probabilités, calcul des probabilités et des probabilités conditionnelles.

L'objectif de la théorie des probabilités est de fournir un formalisme mathématique précis, propre à décrire des situations dans lesquelles intervient le “hasard”, c'est-à-dire des situations dans lesquelles un certain nombre de conditions étant réunies (les causes), plusieurs conséquences sont possibles (les effets) sans que l'on puisse a priori savoir laquelle sera réalisée. Une telle situation apparaît lors d'une expérience aléatoire ou stochastique (par opposition à une expérience déterministe pour laquelle l'issue est certaine).

I.1 Espaces de probabilité

I.1.1 Expérience aléatoire et événements

Définition 1:

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat de façon certaine.

Exemples :

1. « Lancer un dé et noter le résultat obtenu » est une expérience aléatoire comportant 6 résultats ou issues ; l'ensemble Ω de toutes les issues est dans cet exemple $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
2. On mesure la durée du bon fonctionnement d'un dispositif technique choisi au hasard parmi un grand nombre de dispositifs identiques.
3. On lance trois fois de suite la même pièce de monnaie. Si l'on désigne par P la sortie du côté “pile” et par F la sortie du côté “face”, on peut distinguer huit cas possibles: PPP, PPF, PFP, · · · , FFF.

Définition 2:

Événement, événements « A ou B », « A et B » et complémentaire

Langage des évènements	Langage des ensembles	Notations	Exemples avec le jet d'un dé
A est un évènement	A est une partie de E	$A \subset E$	A obtenir un nombre pair $A = \{2,4,6\}$
C est l'évènement « A ou B »	C est la réunion de A et B	$C = A \bigcup B$	A obtenir 5, B : obtenir 2,4,5 ou 6 , C : obtenir {2,4,5,6}
E est l'évènement « A et D »	E est l'intersection de A et D	$E = A \bigcap D$	D : obtenir multiple de 3, E={6}
A et F Sont des évènements complémentaires	A et F sont complémentaires	$F = \overline{A}$	A : obtenir un nombre pair F : obtenir un nombre impair

I.1.2 Univers des possibles

Définition 3

On représente le résultat de cette expérience comme un élément ω de l'ensemble Ω de tous les résultats possibles. On appelle l'ensemble Ω l'espace des éventualités, ou l'univers des possibles.

Un événement aléatoire (ou plus simplement un événement) est une assertion ou proposition logique relative au résultat de l'expérience (par exemple, la somme des points est paire). On dira qu'un événement est réalisé ou non suivant que la proposition est vraie ou fausse une fois l'expérience accomplie. Donc, à un événement, on peut associer la partie de Ω constituée de tous les résultats réalisant l'événement. Nous décidons :

Définition 4

Un événement A est une partie de Ω, c'est-à-dire A ∈ P(Ω).

Si l'événement est réduit à un seul élément, on parle d'événement élémentaire.

I.1.3 Terminologie des événements aléatoires :

1. Un évènement A est certain si $A \neq \phi$
2. Un évènement A est impossible si $A = \phi$
3. $\overline{A}$ est l'évènement contraire d'un évènement A si $\overline{A} = \Omega / A$

   $\overline{A}$ Est réalisé si A ne l'est pas, et réciproquement : $\omega \in \overline{A}$ si et seulement si $\omega \notin A$
4. Deux évènement A_1 *et* A_2 sont incompatibles si $A_1 \cap A_2 = \phi$

2. Espace probabilisable

Définition :

On appelle espace probabilisable une paire (Ω, τ) dans laquelle Ω est un ensemble quelconque et τ une collection de sous-ensembles de Ω appelée tribu (on dit tribu d'événements) qui répond par définition aux contraintes (axiomes) suivantes :

1. $\Omega \in \tau$
2. Si $E \in \tau$ alors $\overline{E} \in \tau$ ou $\overline{E}$ désigne le complément de E dans Ω
3. Si $E \in \tau$ et $F \in \tau$ alors $E \bigcup F \in \tau$
4. pour toute famille d'événements E_i $, i \in I$ où I est un ensemble dénombrable d'indices $\bigcup_i E_i \in \tau$

2.1 Espace probabilisé (Ω, E, P)

Définition 5

Soit (Ω, ζ) un espace probabilisable. Une probabilité est une application P réelle définie sur ζ vérifiant les trois axiomes suivant appelés axiomes de KOLMOGOROV

1. $p : \zeta \to R^+$
2. $P(\Omega) = 1$

3. Pour toute suite finie ou dénombrable d'évènements deux a deux incompatibles

$$P\left(\bigcup_{n\in I} A_n\right) = \sum_{n\in I} P(A_n)$$

Définition 6

Un espace probabilisé est la donnée d'un triplet (Ω, E, P) avec

• (Ω, E) un espace probabilisable,

• P une probabilité sur E.

2.3 Propriétés élémentaires

On a les propriétés suivantes pour tout $(A,B)\in \xi^2$

1. $P(\Omega)=1, \quad P(\phi)=0$
2. $P(\overline{A})=1-P(A)$
3. $P(A)\in[0,1]$
4. $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$
5. Si $A\subset B \Rightarrow P(A)\le P(B)$

Systèmes complets d'événements

Définition :

Soit (Ω, A, p)un espace probabilisé au plus dénombrable. Soit $(A_n)_{n\in N} \in A^N$

$(A_n)_{n\in N}$ est un système complet d'événements si :

1. les événements$(A_n)_{n\in N}$, sont deux à deux disjoints
2. $\bigcup_0^{+\infty} A_n = \Omega$

Théorème de probabilité totale :

Soit $\{B_i : i\in I\}$Un <u>système complet</u> d'évènements, alors

$$P(A)=\sum_{i\in I} P(A\bigcap B_i)$$

Pour la preuve elle découle directement des axiomes de Kolmogorov

2.4 Équiprobabilité

Un cas particulier important est le cas d'équiprobabilité quand Ω est de cardinal fini. On dit qu'il y a équiprobabilité dans le cas où les événements élémentaires ont tous la même probabilité. On a alors les résultats suivants, si $\Omega = \{\omega 1, \omega 2, \cdots, \omega_n\}$.

Et plus généralement $\forall\, i\in[1,n], \quad P(\{\ \omega_i\}) = \dfrac{1}{n}$

$$\forall\, A\in\zeta, P(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{nombre\ de\ cas\ \ favorables}{nombre\ de\ cas\ \ possibles}$$

Remarque

Le calcul des probabilités peut, alors, se ramener à des calculs de dénombrement, il faut déterminer le cardinal d'ensembles.

3. Lois de probabilités conditionnelles, indépendance

Définition 7:

Le but de ce paragraphe est de modéliser ce que l'on entend par

- deux événements sont indépendants.
- la réalisation d'un événement conditionne la réalisation d'un autre.

La notion de probabilité conditionnelle peut être nécessaire à chaque fois que pendant le déroulement d'une expérience aléatoire, on dispose d'une information partielle. Si on sait que l'événement A est réalisé, pour que l'événement B se réalise, on est amené à regarder l'événement A ∩ B, puis à normaliser. Nous prenons la propriété-définition suivante :

Définition 8 (Probabilité conditionnelle).

Soit (Ω, ζ, P) un espace probabilisé et A un évènement possible $(P(A) \neq 0)$, l'application

$$P_A : \begin{cases} \zeta \to [0,1] \\ B \to P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \end{cases}$$

Est une probabilité sur (Ω, ζ) appelée probabilité conditionnelle sachant A

Remarque

- PA(B) peut se lire aussi "probabilité de B quand A" ou "probabilité de B si A" ou probabilité de B sachant A
- Une autre notation est souvent utilisée : P(B|A). Elle a l'inconvénient que "B|A" n'est pas un événement et que P est définie pour une partie de **Ω**; mais cette notation a l'avantage d'être "parlante". Dans la suite de ce polycopié, on utilisera dorénavant cette notation.
- Il sera nécessaire d'étendre ultérieurement la notion de probabilité conditionnelle lorsque A est de probabilité nulle.

Une conséquence immédiate de la définition est la formule des probabilités composées P (A ∩ B) = P(A) · P(B|A) C'est souvent sous cette forme que sera utilisé le conditionnement, ainsi que sous sa forme généralisée.

Proposition

Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ des évènements d'un espace probabilisé vérifiant

$P(A_1 \cap A_2, ..., \cap A_{n-1}) \neq 0$ Alors on a

$$P(A_1 \cap A_2, ..., \cap A_n) = P(A_1)P(A_1 / A_2).P(A_3 / A_1 \cap A_2)....P(A_n / A_1 \cap ... \cap A_{n-1})$$

3.2 Proposition (**Formule des probabilités totales**).

Soient (Ω, ξ, P) un espace probabilisé et $\{A_i\}$ un système complet d'évènements tous de probabilité non nulle. Alors, pour tout évènement B on a

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B / A_i) = P(A_1)P(B / A_1). + ... + P(A_n)P(B / A_n)$$

Preuve. On sait que

$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$ et, en appliquant la formule des probabilités composées, on obtient le résultat énoncé.

Exemple :

Trois usines fabriquent des pièces de même nature. Dans l'usine A, 1% des pièces sont défectueuses, dans l'usine B, 10% des pièces sont défectueuses et dans l'usine C, 3% des pièces sont défectueuses. On mélange en proportions égales, les productions en provenance de chacune des trois usines et l'on en tire une pièce au hasard. L'espace **Ω** est formé des pièces, c'est un ensemble fini, il est acceptable de supposer qu'il y a équiprobabilité. Introduisons les événements suivants

- D : {la pièce tirée est défectueuse},
- A_1 : {la pièce provient de l'usine A},
- A2 : {la pièce provient de l'usine B},
- A_3 : {la pièce provient de l'usine C}.

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(D / A_1) = \frac{1}{100}, P(D / A_2) = \frac{1}{10}, P(D / A_3) = \frac{3}{100}$$

D'après la formule des probabilités totales, la probabilité que la pièce tirée soit défectueuse est $P(D) = P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2) + P(D \cap A_3) = \frac{7}{150}$

Evènements indépendants

Définition : Deux évènements A et B liés à une expérience aléatoire dont lespace des évènements est ; tels que p(A)>0 et p(B)>0; sont dites indépendants si p(A/B)=p(A).

Remarque : La condition p(A/B)=p(A) entraine que p(B/A)=p(B); et donc l'indépendance entre deux évènements signifie que la réalisation de l'un n'influe pas sur la probabilité de la réalisation de l'autre.

Proposition : Deux évènements A et B liés à une expérience aléatoire dont l'espace des évènements est ; tels que p(A)>0 et p(B)>0; sont dite indépendants si et seulement si $p(A\cap B)=p(A)\, p(B)$.

Démonstration.

On a A et B sont indépendants,

$p(A/B)=p(A) \Leftrightarrow p(A\cap B) / p(B) = p(A)$

$\Leftrightarrow p(A\cap B)=p(A)\, p(B)$

Proposition :

Soit A et B deux évènements, alors les assertions suivantes sont équivalentes

i) A et B sont indépendants.

ii)A et $\bar{B}$ sont indépendants.

iii)$\bar{A}$ et B sont indépendants.

Preuve : Exo TD

Définition : Une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements est une famille d'événements mutuellement indépendants si , pour tous ensemble d'indices K fini et dans I; la famille $(A_i)_{i\in K}$ forme une famille d'événements indépendants.

3.3 Indépendance (stochastique)

Si le fait que A est réalisé ne change pas la probabilité de B, autrement dit si

$$P(B/A)=P(B)$$

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)$$

Définition 9

Soient A et B deux événements appartenant à la même algèbre E, on dit que A et B sont deux événements (stochastiquement) indépendants pour la probabilité P si $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$

Remarque

Cette condition est beaucoup plus forte que l'indépendance deux à deux, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple

Du jet de deux dés, montrons que le fait que trois événements A, B, C soient deux à deux indépendants n'implique pas que l'on ait
$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ ni vice versa, le fait que l'égalité précédente se trouve vérifiée n'implique pas que les trois événements soient deux à deux indépendants. Ici, $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \cdots, (6, 5), (6, 6)\}$, et il y a équiprobabilité. Soient i et j étant deux nombres entiers compris entre 1 et 6, on a

Considérons maintenant les trois événements suivants

$$A: \text{“}i \text{ est pair”}; \qquad B: \text{“}j \text{ est impair”}; \qquad C: \text{“}i+j \text{ est pair”}$$

On vérifie aisément (en comptant) que $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = \frac{1}{2}$

D'autre part, on a

- $A \cap B$: “i est pair, j est impair”
- $B \cap C$: “i est impair, j est impair”
- $A \cap C$: “i est pair, j est pair”

et $$\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$$

De même $\mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(C)$ et $\mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(C)$. On en conclut que pris deux à deux les événements A, B, C sont indépendants (pour la probabilité $\mathbf{P}$). Cependant

$$\mathbf{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(C)$$

Considérons maintenant l'événement

$$D = \text{“}1 < i \cdot j \leqslant 3\text{”} = \{(1,2), (2,1), (3,1), (1,3)\}$$

où $i \cdot j$ représente le produit des indices i et j. On a $\mathbf{P}(D) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. D'autre part,

$$A \cap B \cap D = \{(2,1)\} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}(A \cap B \cap D) = \frac{1}{36} = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(D)$$

Cependant $\quad B \cap D = \{(2,1), (3,1), (1,3)\}$ et $\mathbf{P}(B \cap D) = \frac{1}{12} \neq \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(D)$

Les événements B et D ne sont pas indépendants.

3.4 Formules de Bayes

Ces formules ont pour but d'exprimer $P(A|B)$ en fonction de $P(B|A)$. Étant donnés deux événements A et B avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, on a :
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$ .Ce qui donne la première formule de Bayes

Proposition (Formule de Bayes)

$$P(A_k / B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B/A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j).P(B/A_j)}$$

$Si \quad P(A) \neq 0 \; et \; P(B) \neq 0, alors:$

$$P(A/B) = \frac{P(B/A).P(A)}{P(B)}$$

Proposition (Deuxième formule de Bayes)

Soit {Ai} un système complet d'événements tous de probabilité non nulle, pour tout événement B de probabilité non nulle, on a :

$$P(A_k / B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B/A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j).P(B/A_j)}$$

Preuve :

Soit $j \in \{1,2,...,n\}$, Alors :

$$P(A_k / B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B/A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j).P(B/A_j)}$$

En utilisant le Théorème des probabilités totales, on trouve

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)$$

Ainsi

$$P(A_k / B) = \frac{P(A_k)P(B/A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j).P(B/A_j)}$$

Exemple

Reprenons l'exemple précèdent On tire au hasard une pièce, qui se trouve être défectueuse. La probabilité que cette pièce ait été fabriquée par l'usine A vaut P(A1|D). Selon la formule de Bayes

$$P(A_1/D) = \frac{P(A_1)P(D/A_1)}{\sum_{j=1}^{3} P(A_j).P(D/A_j)} = \frac{1}{14}$$

Exercice

Mal de tête En cas de migraine, trois personnes sur cinq prennent un traitement A et deux sur cinq prennent un médicament alternatif B. Avec le médicament A, 75% des migraineux sont soulagés, contre 90% avec le médicament B. On note simple A, B, S, les évènements “prendre le médicament A”, “prendre le médicament B”, “être soulagé”. L’énoncé fournit les informations suivantes :

P(A) = 3 /5 , P(B) = 2/ 5 P(S|A) = 75 /100 , P(S|B) = 90 /100 .

1. Quelle est la probabilité de prendre le médicament B et d’être soulagé ?
2. Quel est le taux global de personnes soulagées ?
3. Quelle est la probabilité pour un patient d’avoir pris le médicament A sachant qu’il est soulagé ?

Solution

1. Par définition de la probabilité conditionnelle, on a

P (B ∩ S) = P(S|B) P(B) = 90/ 100 × 2 /5 = 9 /25.

1. D’après la formule des probabilités totales, on a

P(S) = P (S|A) P (A) + P (S|B) P (B) = 75/ 100 × 3 /5 + 90 /100 × 2/ 5 = 81/ 100.

2. D’après la formule d’inversion du conditionnement, on a

P (A|S) = P (S|A) P (A) P(S) = 75/ 100 × 3/ 5 × 100/ 81 = 15/ 27.

Exercice 4.

Au cours de la fabrication d’un certain type de lentilles, chacune de ces lentilles doit subir deux traitements notes T1 et T2. On prélève au hasard une lentille dans la production.

On désigné par A l’évènement : ”la lentille présente un défaut pour le traitement T1”.

On désigne par B l’évènement : ”la lentille présente un défaut pour le traitement T2”. Une étude a montré que :

• la probabilité qu’une lentille présente un défaut pour le traitement T1 est P(A) = 0, 10 ;

• la probabilité qu’une lentille présente un d´défaut pour le traitement T2 est P(B) = 0, 20 ;

• la probabilité qu’une lentille présente aucun des deux défauts est 0, 75.

1. Calculer la probabilité qu’une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T1 ou T2.

2. Calculer la probabilité qu’une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour les deux traitements T1 et T2.

3. Les évènements T1 et T2 sont-ils indépendants ?

4. Calculer la probabilité qu’une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour un seul des deux traitements.

5. Calculer la probabilité qu’une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour le traitement T2, sachant qu’il présente un défaut pour le traitement T1.

Solution :

Correction 4 1. $\mathbf{P}(A \cup B) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0,75 = 0,25$

2. $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cup B) = 0,1 + 0,2 - 0,25 = 0,05$
3. Non car $\mathbf{P}(A \cap B) \neq \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$
4. L'événement "la lentille présente un défaut pour les deux traitements T_1 et T_2" est représenté par :

$$D = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B)$$

Ainsi $\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbf{P}(\overline{A} \cap B) = (\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B)) + (\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)) = \cdots = 0,2$

5. $\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(B \cap A)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{0,05}{0,1} = 0,5$

4. Techniques et méthodes de calcul des probabilités

✓ Comment calculer des probabilités sous l'hypothèse d'équiprobabilité ?

Soit P l'équiprobabilité défini sur un univers Ω. On souhaite calculer P(A) pour un évènement $A \subset \Omega$

1. Dénombrer le cardinal de Ω
2. Dénombrer le cardinal de A
3. Calculer $P(A) = \dfrac{card(A)}{Card(\Omega)}$

✓ Comment déterminer le cardinal d'un ensemble ?

On rappelle trois principes :

3. Pour dénombrer une réunion disjointe de sous-ensembles, ce qui revient à considérer un cas ou bien un autre ou bien un autre, etc..., on effectue la somme des cardinaux de chaque sous-ensemble.
4. Pour dénombrer un produit cartésien d'ensembles, ce qui revient à considérer un cas puis un autre puis un autre, etc..., on effectue le 3. produit des cardinaux de chaque ensemble.
5. Parfois il est plus facile de dénombrer le complémentaire d'un ensemble.

Par exemple, si A ⊂ B et

$que\ l'on\ connait\ card(B) \quad et\ card'(\overline{A}), alors \quad card(A) = Card(B) - Card(\overline{A})$

On se ramène à un des deux cas suivants :

1. Tirages de p éléments parmi n :

Tirages	Ordonnés	Non ordonnés
Sans remise	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
Avec remise	n^p	$K_n^p = C_{n+p-1}^p$

2. Rangement de p objets dans n cases :

Objets	Discernables	Indiscernables
Un seul dans chaque case	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
Éventuellement plusieurs dans chaque case	n^p	$K_n^p = C_{n+p-1}^p$

✓ Comment calculer des probabilités conditionnelles ?

Soient A et B deux évènements d'un univers Ω et P une probabilité sur Ω. On cherche a calculer la probabilité de A sachant B P (A/B)

- Vérifier si le texte fournit cette information en langage commun ou non
- Utiliser la définition $P(A/B = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$
- Si on connait P (B/A) et $P(B/\overline{A})$ alors :

$$P(A/B = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A\cap B)}{P((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B))} = \frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)}$$
$$= \frac{P(A).P(B/A)}{P(A).P(B/A)+P(\overline{A}).P(B/\overline{A})}$$

✓ Comment vérifier que deux évènements sont indépendants pour une probabilité ?

Soient A et B deux évènements d'un univers Ω et P une probabilité sur Ω.

1. Déterminer l'évènement représenté par A ∩ B et calculer P (A ∩ B). Calculer P(A) × P(B).
2. Les deux évènements sont indépendants si et seulement si P (A ∩ B) = P(A) × P(B).

✓ Comment calculer la probabilité d'une conjonction de deux évènements ?

Soient A et B deux évènements d'un univers Ω et P une probabilité sur Ω. On cherche à calculer la probabilité de $P(A\cap B)$

- On sait que A et B sont indépendants pour la probabilité P .Utiliser la formule $P(A\cap B) = P(A).P(B)$
- On ignore si A et B sont indépendants pour la probabilité P, alors :
  - Si $P(A)\neq 0$ et P (B/A) est connue utiliser la formule $P(A\cap B) = P(A).P(B/A)$

- SI $P(B) \neq 0$ et P (A/B) est connue utiliser la formule $P(A \cap B) = P(B).P(A/B)$
- Si $P(A \cup B)$ est connue utiliser la formule $P(A \cap B) = P(A) + P(B). - P(A \cup B)$
- Si $P(\overline{A \cap B})$ ou $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ ou $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ sont connues, exprimer $A \cap B$ en fonction de $\overline{A \cap B}$ ou $\overline{A} \cup \overline{B}$ ou $\overline{A} \cap \overline{B}$ et utiliser les formules de probabilités classique par exemple on obtient les expressions suivantes :

- ✓ $P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A \cap B})$
- ✓ $P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B})$
- ✓ $P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$

Si non essayer de trouver un évènement E de probabilité connue, incompatible avec $A \cap B$ telle que $(A \cap B) \cup E$ forment un évènement de probabilité connue, et utiliser la formule $P(A \cap B) = P((A \cap B) \cup E) - P(E)$

Chapitre n=3

Variables aléatoires

Généralités

Soit (Ω, P) un espace de probabilité.

Définition 1 :

Une variable aléatoire réelle □ sur un ensemble fondamental Ω se définit souvent comme une fonction de Ω dans l'ensemble R des nombres réels, tels que l'inverse de chaque intervalle de R doit être un événement de Ω. Autrement dit, $X : \Omega \to R$. Pour tout intervalle $[a, b] \subset R$, l'ensemble $\{X \in [a, b]\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in [a, b]\}$ est un événement.

Une variable aléatoire est une application $X : \Omega \to R$.

Définition 2 :

Soit X une variable aléatoire. La loi de X est la probabilité P_X sur R définie par :
Pour tout $B \subset R$, $P_X(B) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}) = P(X \in B)$.
PX peut aussi être vue comme une probabilité sur $X(\Omega)$, ensemble des valeurs prises par X , aussi appelé support de P_X. On note parfois $X \sim P_X$ pour indiquer que X suit la loi P_X .

Définition 3 :

Si A est un évènement, on introduit la variable aléatoire fonction indicatrice de A notée 1_A qui indique si l'évènement A est réalisé

Pour tout $\omega \in \Omega \quad 1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & si\ \omega \in A \\ 0 & si\ \omega \notin A \end{cases}$

Remarque 1 :

En général la probabilité P est notée par P_X en effet :
$P_X(]a,b]) = P(X^{-1}]a,b])$
c.à.d. $P_X(]a,b]) = P_X(]-\infty,b]/]-\infty,a]) = P_X(]-\infty,b] - P_X]-\infty,a])$
Si l'on pose maintenant $\forall y \in R, F_X(y) = P_X(]-\infty,y])$
Alors $P_X(]a,b]) = F_X(b) - F_X(a)$
Cette remarque nous donne la définition de la fonction de répartition

Variable aléatoire discrète

Définition 4 :

Une variable aléatoire X est dite discrète si l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs qu'elle prend est dénombrable (c'est-à-dire que l'on peut trouver une suite qui énumère tous les éléments de $X(\omega)$: c'est le cas notamment si $X(\Omega)$ est un ensemble fini, N, Z ou Q, mais pas l'intervalle [0,1] ni R). On dit aussi que la loi de X est discrète. Si X est discrète, alors, pour tout $B \subset R$, on peut calculer :

$$P_X(B) = P(X \in B) = \sum_{x \in B \cap X(\Omega)} P(X = x) = \sum_{x \in B} P(X = x)$$

Pour caractériser une loi discrète, il suffit donc de se donner les probabilités élémentaires $P_X(x) = P(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$

Avec X c'est la variable aléatoire et le petit x sont les valeurs possibles de X

Définition 5:

Si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, X définit une variable aléatoire discrète.

Exemple :

Considérons quatre épreuves répétées, identiques et indépendantes, telles qu'au cours de chacune d'elles, un événement A a une probabilité de se réaliser égale à p = P(A) = 0, 3 (et donc une probabilité de ne pas se réaliser égale à q = P(A) = 1 − p = 0, 7). Désignons par X la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de réalisations de l'événement A au cours des quatre expériences aléatoires.

On a :

$$P(X=0) = q^4 = (0.7)^4 = 0.2401 \qquad P(X=1) = C_4^1 pq^3 = 4 \times (0.3)(0.7)^3 = 0.4116$$

$$P(X=2) = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \times (0.3)^2 (0.7)^2 = 0.2646 \quad P(X=3) = C_4^3 p^3 q = 4 \times (0.3)^3 (0.7) = 0.0756$$

$$P(X=4) = C_4^0 p^4 q^0 = (0.3)^4 = 0.0081$$

Remarquer bien qu'on a

$$\sum_{k=0}^{4} P(X=k) = 1$$

Définition et proposition

Soit $E \subset R$. Une famille $(P(x))_{x \in E} \in R^E$ est une famille de probabilités élémentaires si

1. Pour tout $x \in E, P(x) \geq 0$
2. $\sum_{x \in E} P(X = x) = 1$

   Dans ce cas, il existe une variable aléatoire X (sur un espace de probabilité (Ω, P)), a valeurs dans E, de probabilité élémentaire $P_X = p$ c.à.d. pour tout x de E, $P(X = x) = p(x)$.

Pour la preuve est évidente (Exo TD)

Fonction de répartition :

Définition 6:
Soit X une variable aléatoire. La fonction de répartition de X est la fonction $F_X : R \to R$ définie par : pour tout $x \in R$, $F_X(x) = P(X \le x) = P_X(]-\infty, x])$.

Propriétés de la fonction de répartition (proposition) :
1. La fonction F est monotone croissante.
2. La fonction de répartition est admet un ensemble de points de discontinuité fini ou dénombrable
3. La fonction de répartition est continue à droite par la propriété d'additivité

Autrement :
1. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$
2. F est croissante, c.à.d. $y \ge x \Rightarrow F(y) \ge F(x)$
3. F est continue à droite, c.à.d. $\lim\limits_{y\to x^+} F(y) = F(x)$

Pour tout $(a,b)\in R^2$, $P(a \prec X \le b) = F(b) - F(a)$

Exemple : Soit X une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition □(□) est définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \prec 0 \\ \frac{x}{2} & si\ 0 \le x \prec 1 \\ \frac{2}{3} & si\ 1 \le x \prec 2 \\ \frac{11}{12} & si\ 2 \le x \prec 3 \\ 1 & si\ x \ge 3 \end{cases}$$

Réciproquement :

Proposition :
toute fonction monotone croissante continue à droite telle que ($F(-\infty) = 0$ et $F(+\infty) = 1$ a la limite) définit une loi de probabilité unique sur R.
Preuve : évidente (Exo TD)

Cas particuliers
Variable aléatoire discrète
Si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, X définit une variable aléatoire discrète.
Densité de probabilité
Si la fonction de répartition F d'une variable aléatoire X est continue et dérivable presque partout, on dit que X est continue (ou plus exactement absolument continue) et sa dérivée f est la densité de probabilité.

Variable aléatoire absolument continue

Variable aléatoire réelle

Étant donné un espace probabilisé (Ω, E ,P), on appelle variable aléatoire réelle une application X définie sur Ω à valeurs dans R, telle que l'image réciproque par X de tout intervalle]a, b] de R soit un élément de la tribu E .

Densité d'une variable aléatoire

Pour qu'une fonction f soit une densité d'une variable aléatoire X elle doit vérifier les trois

Propriétés suivante :

1. f est positif
2. f est continu
3. l'aire délimitée par sa courbe représentative et par l'axe des abscisses doit être égale à 1

Autrement dit

Si f est une densité de probabilité alors :

1. f est une fonction positive: ∀ x > 0, f (x) ≥ 0,
2. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

Proposition :

Soient $X : \Omega \to R$ une variable aléatoire réelle, F_X sa fonction de répartition. Si F_X est une fonction dérivable sur R (sauf peut-être en un nombre fini de points), alors X est une variable absolument continue. De plus, si on pos

$$D = \{x \in R : t \to F_X(t) \text{ est dérivable au point } t = x\}$$

Alors la fonction de densité f_X peut être définie par $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\partial F_X(x)}{\partial x} & si\ x \in D \\ 0\ ailleur \end{cases}$

Exemple

Soient c ∈ R, f la fonction définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} 2ce^{\frac{-x}{3}} \; si \; x \geq 0 \\ 0 \; ailleur \end{cases}$$

Sous quelle condition la fonction f est la fonction de densité d'une variable aléatoire réelle ?

Solution:
Pour que f soit la fonction de densité d'une variable aléatoire il faut quelle soit positive, ainsi c ≥ 0, de plus on doit avoir $\int_R f_X(x)dx = 1$ par conséquent
Ainsi, f est la fonction de densité d'une variable aléatoire si et seulement si c = 1/6.

I. Esperance et variance d'une variable aléatoire
III.1. Espérance

Définition 7
Dans de nombreux cas, il n'est pas nécessaire de connaître une propriété de la variable aléatoire aussi précise que sa fonction de répartition. Certains paramètres numériques caractérisent parfois cette variable aléatoire. L'étude de quelques-uns de ces paramètres fait l'objet du présent paragraphe.
Soit X une variable aléatoire discrète pouvant prendre un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, \cdot\cdot\cdot$, x_n, avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \cdot\cdot\cdot, p_n$. On définit une moyenne arithmétique des déférentes valeurs de X pondérées par leurs probabilités p_k . Cette moyenne pondérée est appelée espérance mathématique (ou moyenne stochastique) et elle est notée E(X) :

$$E(X) = p_1x_1 + ... + p_nx_n = \sum_{i=1}^{i=n} P_i x_i$$

Définition 8
X étant une variable aléatoire réelle, on appelle espérance mathématique de X le nombre E(X), si il existe, défini par

1. si X est une variable aléatoire finie

$$E(X) = \sum_{k=1}^{i=n} x_k P(X = x_k)$$

2. si X est une variable aléatoire discrète dénombrable (sous réserve de convergence)

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k P(X = x_k)$$

3. si X est une variable aléatoire continue, f étant la densité de probabilité, on a (sous réserve de convergence)

$$E(X) = \int_R t.f(t)dt$$

Propriétés de l'espérance :

Soient X, Y deux variables réelles d'espérances finies et $\lambda \in R$, alors

1. Linéarité d'espérance $E(X+\lambda Y)=E(X)+\lambda E(Y)$
2. Positivité de l'espérance $|E(X)| \leq E(|X|)$
3. Si X et Y sont indépendants $E(X \times Y)=E(X) \times E(Y)$
4. Pour toute fonction $h: R \to R \quad avec\, E(|h(X)| \prec +\infty$:

$$E(f(X))=\begin{cases}\int_R h(t) f_X(t) dt & en\ continu \\ \sum_{\omega\in\Omega} h(X(\omega)).P_X(\{\omega\}) & en\ discret\end{cases}$$

Ou f_X désigne la densité de probabilité de X. (c.à.d. la formule de transfert

Pour tout $A \in \xi$: $P(X \in A)=P_X(A)=E(1_A(X))$

Preuve : voir (TD exo)

Variance

Définition 9:

On appelle variance d'une variable aléatoire, son moment centré d'ordre 2. On la note Var(X).

$$Var(X)=\mu_2(X)=E((X-E(X))^2)$$

La variance est un nombre positif. Sa racine carrée définit l'écart-type dont l'expression est :

$$\sigma_X=\sqrt{Var(X)}$$

Propriétés de la variance

1. La variance est toujours positive
2. Pour tout à, b ∈ R, on a
$Var(aX+b)=a^2 Var(X)$
3. $Var(X)=E(X^2)-E(X)^2$
4. Si X1 et X2 sont deux variables aléatoires indépendantes
$Var(X_1+X_2)=Var(X_1)+Var(X_2)$

Preuve : voir (TD exo)

Attention : La variance n'est pas toujours définie. Il faut que l'espérance E[X] soit définie et que l'espérance converge. Ceci revient à demander à ce que $E[X^2]$ converge.

Inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebyshev

Proposition (Inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire, pour tout $a \succ 0$, $P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$

Plus généralement, pour tout $a \succ 0$ et $r \succ 0$, $P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|^r)}{a^r}$

Preuve :

On a toujours $|X|^r \geq 0$ et si $|X| \geq a$, alors $|X|^r \geq a^r$ d'où $a^r 1_{\{|X| \geq a\}} \leq |X|^r$, ce qui donne en prenant l'espérance de chaque membre $E\left[a^r 1_{\{|X| \geq a\}}\right] \leq E\left[|X|^r\right]$

et $E\left[a^r 1_{\{|X| \geq a\}}\right] = a^r P(|X| \geq a)$, d'où le résultat annoncée (r=1 donne la première)

Proposition (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire. Pour tout a > 0,

$$P(|X - E[X]| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}$$

Preuve :

Prendre r = 2 et remplacer X par X − E[X] dans l'inégalité de Markov.

Exercices d'application

Exercice1

Un dé (à 6 faces) est truqué de la façon suivante : chaque chiffre pair a deux fois plus de chance de sortir qu'un numéro impair.

1) Calculer la probabilité d'obtenir un 6.

2) On lance deux fois le dé.

a. Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un chiffre pair

b. Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un 6.

Solution :

1) On note a la probabilité que 1 soit tiré. Ainsi, la probabilité que 2 soit tiré est égale à $2a$; la probabilité que 3 soit tiré est a, …

La somme des probabilités est égale à 1 donc $a + 2a + a + 2a + a + 2a = 1$ soit $9a = 1$ et $a = \frac{1}{9}$.

La probabilité d'obtenir un 6 est donc $2a$, soit $\boxed{\frac{2}{9}}$

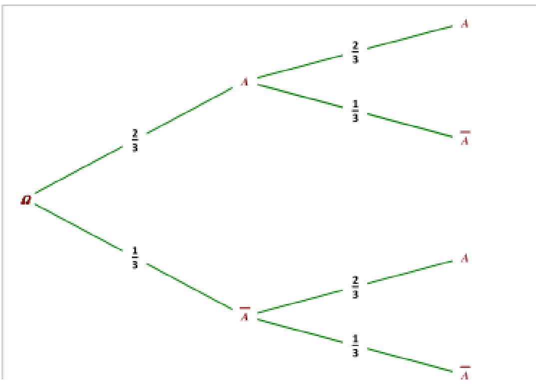
2)

a. On note A l'événement « le résultat d'un lancer est pair ». On a donc $p(A) = \frac{2}{3}$. La situation est modélisée sur l'arbre ci-contre.

$p(AA) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{9}}$

b. Les deux tirages sont indépendants donc les probabilités sont multipliées entre elles :

$p(\text{deux } 6) = \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} = \boxed{\frac{4}{81}}$



Exercice 3

Exercice 2 :

Deux lignes téléphoniques A et B arrivent à un standard. On note :

E1 = "la ligne A est occupée"

E2 = "la ligne B est occupée"

Après étude statistique, on admet les probabilités : P(E1) = 0,5 ; P(E2) = 0,6 et P(E1∩E2) = 0,3

Calculer la probabilité des événements suivants :

F = "la ligne A est libre"

G = "une ligne au moins est occupée"

H = "une ligne au moins est libre"

Solution

$$P(F) = P(\overline{E_1}) = 1 - P(E_1) = 0.5$$

$$P(G) = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 0.5 + 0.6 - 0.3 = 0.8$$

$$P(H) = P(\overline{E_1 \cap E_2}) = 1 - P(E_1 \cap E_2) = 1 - 0.3 = 0.7$$

Exercice 3 :

On considère la loi de probabilité suivant.

Calculer P(x = 3) puis l'espérance et l'écart-type.

X	-2	-1	1	2	3
p	0,1	0,2	0,3	0,2	

Solution :

La somme des probabilités est égale à 1 donc $p(X=3) = 1-(0{,}1+0{,}2+0{,}3+0{,}2) = \boxed{0{,}2}$

$E(X) = -2\times 0{,}1 - 1\times 0{,}2 + 1\times 0{,}3 + 2\times 0{,}2 + 3\times 0{,}2 = \boxed{0{,}9}$

$V(X) = (-2)^2\times 0{,}1 + (-1)^2\times 0{,}2 + 1^2\times 0{,}3 + 2^2\times 0{,}2 + 3^2\times 0{,}2 - 0{,}9^2$

$= 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}8 + 1{,}8 - 0{,}81 = 2{,}69$ donc $\sigma(X) = \sqrt{2{,}69} \approx \boxed{1{,}64}$

Exercice 4 :

Une urne contient 1 boule rouge et n boules blanches n ≥ 1. Les boules sont indiscernables au toucher. On prélève au hasard une boule de l'urne. Si elle est rouge, on gagne 10€ et si elle est blanche, on perd 1€.

On considère la variable aléatoire 0 égale au gain algébrique du joueur.

1) On suppose dans cette question qu'il y a 10 boules blanches (n = 10)

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance de X.

2) On suppose maintenant que n est un entier positif quelconque.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Exprimer E(X) en fonction de n.

c. Pour quelles valeurs de n , E(X) =-1/2

Solution :

1) L'urne contient 1 boule rouge et 10 boules blanches, soit 11 boules au total.

a. Voir ci-contre.

x_i	10	-1
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{10}{11}$

b. $E(X) = 10\times\frac{1}{11} - \frac{10}{11} = 0$

2) L'urne contient $n+1$ boules.

a. Voir ci-contre

x_i	10	-1
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{n+1}$	$\frac{n}{n+1}$

b. $E(X) = \frac{10}{n+1} - \frac{n}{n+1} = \boxed{\frac{10-n}{n+1}}$

c. $E(X) \geq 0 \Leftrightarrow 10-n \geq 0$ car $n+1 \geq 0$

$\Leftrightarrow n \leq 10$

Il faut donc qu'il y ait moins de 10 boules blanches pour que l'espérance soit positive.

d. $E(X) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{10-n}{n+1} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(10-n) = -(n+1) \Leftrightarrow -n = -21 \Leftrightarrow n = 21$

Il faut qu'il y ait 21 boules blanches pour que l'espérance soit égale à $-\frac{1}{2}$.

Exercice 05

Pour la fonction définie sur l'intervalle [3;0] par f (x) = kx , déterminer la valeur de k pour qu'elle soit une densité de probabilité.

Solution

$$\int_0^3 f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^3 kxdx = 1 \Leftrightarrow \left[k\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = 1 \Leftrightarrow \left(k\times\frac{3^2}{2}\right) - \left(k\times\frac{0^2}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{9k}{2} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{2}{9}$$

f est une densité de probabilité ssi :

Exercice 06

I. Soit X la variable aléatoire dont la fonction densité est définie sur IR+ par :

f (x) = 4exp (-4x).

a) Calculer F(5).

b) Calculer p (1 < X < 3).

II. Pour la fonction suivante, définie sur l'intervalle [0;2], déterminer la valeur de k pour qu'elle soit une densité de probabilité. f (x) = k x^3.

Solution

I.

a) $F(5) = p(X \leq 5) = \int_0^5 f(x)dx = \int_0^5 4e^{-4x}dx = \left[\frac{4}{-4}e^{-4x}\right]_0^5 = \left[-e^{-4x}\right]_0^5$

$= \left(-e^{-4\times 5}\right) - \left(-e^{-4\times 0}\right) = -e^{-20} + 1 \cong 0.99$

b) $p(1 < X < 3) = \int_1^3 f(x)dx = \left[-e^{-4x}\right]_1^3 = \left(-e^{-4\times 3}\right) - \left(-e^{-4\times 1}\right) = -e^{-12} + e^{-4} \cong 0.0183$

II. f est une densité de probabilité ssi :

$$\int_0^2 f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^2 kx^3 dx = 1 \Leftrightarrow \left[k\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 1 \Leftrightarrow \left(k \times \frac{2^4}{4}\right) - \left(k \times \frac{0^4}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow 4k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$$

Chapitre n=4

Lois de probabilités usuelles

Introduction

A priori, les lois de distribution des phénomènes physiques, économiques, etc. sont innombrables. Chaque cas semble particulier. Dans cette partie, nous présentons les lois de probabilités les plus souvent utilisées dans les études. Elles permettent de modéliser une grande variété de problèmes. Nous noterons X la variable aléatoire étudiée. Une expérience correspond à une observation de la variable aléatoire (v.a) X, elle est notée xi. Nous disposons d'une série d'observations xi, i = (1, 2, . . ., n),

On utilise des variables aléatoires discrètes pour compter des évènements qui se produisent de manière aléatoire, et des variables aléatoires continues quand on veut mesurer des grandeurs “continues” (distance, masse, pression...).

I. Lois d’une variable aléatoire discrète.

L’application X permet de transporter la probabilité P de Ω en une probabilité PX sur R : on considère pour cela les $P(X = x_k)$ comme des masses ponctuelles pk situées en les points x_k de la droite réelle, on définit ainsi une probabilité sur R (le point x_k a la Probabilité pk). La probabilité, pour cette loi, d’une partie quelconque de R est alors la somme des masses ponctuelles qu’elle contient.

Définition : la loi de probabilité d’une variable aléatoire X consiste à déterminer pour toutes les valeurs possibles de X leurs probabilités d’apparition. C’est-à-dire, si X est une variable aléatoire sur un ensemble fondamental Ω fini, alors les événements élémentaires de Ω relatifs à X sont définis comme suit : $X(\omega)=\{x1,x2,\ldots\ldots xn\}$. La probabilité pour que l’événement relatif à xisont réalisées et définies par $(X=xi)$=f(xi). Cette dernière est appelée loi de probabilité, ou encore densité de distribution de probabilité.

Les probabilités pk = P(X = k) sont appelées probabilités ponctuelles de la v.a. X .
Dans la suite, le symbole ~ signifiera « a pour loi ». Par exemple, on notera X ~ B(n, p) pour signifier que la v.a. X suit la loi binomiale B(n, p).

Remarques :

1. Notons en particulier que comme $\sum_{k,x_k\in\Omega} P_k = 1$, $P_X(B)$ est une sous-série d’une série a termes positifs convergente donc convergente : $P_X(B)$ est donc toujours bien définie pour toute partie B ⊂ R. Ce ne sera pas aussi simple dans le cas des variables aléatoires réelles (pour lesquelles les observables seront réduits aux intervalles de R).

2. Attention, deux variables aléatoires. peuvent avoir la même loi sans pour autant être égales. Par exemple si on dispose d'un dé rouge et d'un dé bleu et que X , Y désignent la somme des points obtenus après un lancer respectivement du dé rouge et du dé bleu, X et Y ont la même loi. Pourtant bien sûr, on n'a pas X = Y, ce qui équivaudrait à dire que les tirages des deux dés sont nécessairement identiques.

I.1 Loi de Bernoulli de paramètre p

Loi de Bernoulli de paramètre p notée B(p).

Définition

Une v.a. X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$ si elle ne prend que deux valeurs, la plupart du temps 0 et 1 avec :
$P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p = q$.

Notation :

X suit une loi de Bernoulli de paramètre p et n écrit :
$X \to B(P)\ si,$

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} p\ si\ x = 1 \\ 1 - p = q\ si\ x = 0 \end{cases}$$

f est bien une densité care elle vérifier les trois propriétés de la densité :

1. Elle est positive
2. L'ensemble de x ou f (x) positif est dénombrable
3. $\sum_x f_X(x) = 1$

Caractéristiques de la loi

Espérance , variance et écart type

Proposition : Si X suit la loi de Bernoulli alors

- $E(X) = p$
- $Var(X) = pq = p(1-p)$
- $\sigma_X = \sqrt{pq}$

Démonstration :

1. $E[X] = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$
2. $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = E[X] - E[X]^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$
3. $\sigma X = \sqrt{pq}$

I.2 Loi de binomiale de paramètre (n,p)

Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de succès obtenus lors des n épreuves d'un schéma de Bernoulli. Alors on dit que X suit une loi binomiale de paramètres (n, p), notée B (n, p).

Proposition : soit X ~ B (n, p) alors la fonction f définie par :

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{1-x} \ si \ x \in \{0,1,\dots,n\} \\ 0 \ ailleur \end{cases}$$

Est une densité de probabilité

Preuve :

Il suffit de vérifier les trois propriétés de la densité.

Remarque :

La loi de Bernoulli est la loi binomiale B (1, p), c.à.d. Pour n=1

Caractéristiques de la loi

Espérance e, variance et écart type

Proposition : Si X suit la loi Binomial alors

- E(X) = np
- Var(X) = npq=np(1-p)
- $\sigma_X = \sqrt{npq}$

Preuve :

1. Calculons l'espérance

$$E(X) = \sum_{k=0}^{k=n} k C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{k=n} k C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{k=n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)} \quad puisque \ nC_{n-1}^{k-1} = kC_n^k$$

$$E(X) = np(p+q)^{n-1} = np$$

2. Pour le calcul de la variance Var(X) = E[X^2] − E[X] ^{2}

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{k=n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} = np\sum_{k=1}^{k=n}(k-1)C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}q^{n-1-(k-1)} + np\sum_{k=1}^{k=n}C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}q^{n-1-(k-1)}$$

$$E(X^2)=np(n-1)p+np$$

$$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

Donc $VarX)=np(n-1)p+np-(np)^2$

$$Var(X)=npq$$

Autre technique de calcule Var(X)

En en effet : utilisant les notions des séries :

En effet $E[X^2]=\sum_{k=0}^{n} C_n^k k^2 p^k (1-p)^{n-k} = S_q(p)$ où $q=1-p$ et $S_q(x)=\sum_{k=1}^{n} C_n^k k^2 x^k q^{n-k}$.
Or

$$\begin{aligned}
S_q(x) &= \sum_{k=1}^{n} C_n^k k^2 x^k q^{n-k} = x\sum_{k=1}^{n} C_n^k k^2 x^{k-1} q^{n-k} = x\sum_{k=1}^{n} C_n^k k (x^k)' q^{n-k} \\
&= x\left(\sum_{k=1}^{n} C_n^k k x^k q^{n-k}\right)' = x\left(x\sum_{k=1}^{n} C_n^k k x^{k-1} q^{n-k}\right)' \\
&= x\left(x\sum_{k=1}^{n} C_n^k (x^k)' q^{n-k}\right)' = x\left(x\left(\sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k q^{n-k}\right)'\right)' \\
&= x\left(x\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k q^{n-k}\right)'\right)' = x\left(x[(x+q)^n]'\right)' \\
&= x\left(x\times n(x+q)^{n-1}\right)' = xn(x+q)^{n-1} + x^2\times n(n-1)(x+q)^{n-2}.
\end{aligned}$$

D'où $E[X^2]=S_{1-p}(p)=pn+p^2n(n-1)$ et

$$\mathrm{Var}(X)=pn+p^2n(n-1)-(np)^2=n(p-p^2)=np(1-p).$$

3. $\sigma_X=\sqrt{Var(X)}=\sqrt{npq}$

Remarque : La loi est appelée loi binomiale dans la mesure où les probabilités correspondent aux termes du développement du binôme de Newton.

I.3 Loi multinomiale

Supposons qu'il y ait dans une urne N boules de r couleurs distinctes $c_1, c_2, ..., c_r$. Soit n_i le nombre de boules de couleur C_i et $p_i = n_i / N$ la proportion de boules de la couleur C_i dans l'urne. On a : $N = \sum_1^r n_i$, $P = \sum_1^r p_i$

Supposons que l'on effectue un tirage de n boules, chaque boule étant remise dans l'urne avant le tirage de la boule suivante ; les tirages répétés des boules sont des épreuves indépendantes. On cherche la probabilité d'obtenir l'événement A défini par :

- m_1 boules de la couleur C1
- m_2 boules de la couleur C2 . . .
- m_i boules de la couleur Ci . . .
- m_r boules de la couleur C_r avec $m_1 + m_2 + . . . + m_r = n$

Cet événement est réalisé par exemple avec le n-uplet

$$\underbrace{C_1,...C_1}_{m_1 boules C_1} \quad \underbrace{C_2,...C_2}_{m_2 boules C_2} \quad ...\underbrace{C_r,...,C_r}_{m_r boules C_r}$$

De probabilités $P_1^{m_1} p_2^{m_2} ... P_r^{m_r}$ .le nombre de ces n-uplets est égal au nombre de façons de disposer m_1 fois la lettre C_1, m_2 fois de la lettre C_2 …m_r fois la lettre C_r dans un mot de longueur $n = \sum_{i=1}^{i=r} m_i$ d'où la probabilité de l'évènement A est :

$$P(A) = C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2} ... C_{m_r}^{m_r} (p_1)^{m_1} (p_2)^{m_2} ... (p_r)^{m_r}$$

On a la relation $C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2} ... C_{m_r}^{m_r} = \dfrac{n!}{m_1! m_2! ... m_r!}$

Par conséquent $P(A) = \dfrac{n!}{m_1! m_2! ... m_r!} (p_1)^{m_1} (p_2)^{m_2} ... (p_r)^{m_r}$

Exemple :

Une urne est composée de 10% de boules rouges, 20% de boules blanches, 40% de boules vertes, 30% de noires. Le nombre de boules de l'urne est N > 20. On effectue un tirage avec remise de 12 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules rouges, 5 boules blanches, 3 boules vertes et une boule noire ?.

Solution :

Il suffit d'appliquer la formule précédente :

$$P(A) = \frac{12!}{3!\times 5!\times 5!\times 1!}(0.1)^3 \times (0.2)^5 \times (0.4)^3 \times (0.3)^1$$

I.3 Loi de Poisson de paramètre λ

Proposition : soit X une variable aléatoire suit la loi de Poisson de paramètre positive λ

X ~ P(λ) alors la fonction f définie par :

$$f_X(k) = P(X = k) = \begin{cases} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} \; si \; k \in N \\ 0 \quad ailleur \end{cases}$$

Est une densité de probabilité

Preuve :

Il suffit de vérifier les trois propriétés de la densité.

Caractéristiques de la loi

Espérance e, variance et écart type

Proposition : Si X suit la loi Poisson alors :

- E(X) = λ
- Var(X) = λ
- $\sigma_X = \sqrt{\lambda}$

Preuve :

1. L'espérance mathématique de X est donnée par

$$E(X) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} ne^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = \lambda\sum_{1}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$$

2. Pour calculer la variance, commençons par calculer E(X(X − 1))

$$E(X(X-1)) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} n(n-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = \lambda^2\sum_{2}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda^2$$

$$E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)^2 \Rightarrow E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$$

$$dou\, Var(X) = \lambda$$

3. $\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\lambda}$

La loi de Poisson modélise des comptages qui suivent un processus de Poisson. Par exemple, le nombre d'appels à un central téléphonique pendant une période donnée, le nombre de voitures qui passent à un carrefour en un temps donné.

Exemple :

Un central **téléphonique** reçoit en moyenne 100 appels par heure. En supposant que le nombre d'appels durant un intervalle de temps quelconque suit une loi de Poisson,
1. quelle est la probabilité que le central reçoive trois appels en deux minutes?
2. quelle est la probabilité pour qu'en deux minutes, il reçoive au moins un appel?

Solution :
En deux minutes, on peut s'attendre à ce que le nombre d'appel soit

$$\lambda = E(X) = \frac{2\times 100}{60} = \frac{10}{3}$$

Ainsi, la probabilité d'obtenir trois appels en deux minutes es

$$P(X=3) = \frac{\left(\frac{10}{3}\right)^3}{3!}\exp\left(-\frac{10}{3}\right) = 0.220$$

et la probabilité d'obtenir au moins un appel en deux minutes est

$$P(X\geq 1) = 1-\exp\left(-\frac{10}{3}\right) = 0.964$$

I.4 Loi géométrique G(P) de paramètre p
Soit X une variable aléatoire suit la loi de géométrique de paramètre p
Pour p ∈ [0, 1], A ∈ N et m ≤ A,
On définit la loi géométrique, notée G(p), par :

$$f_X(k) = P(X=k) = \begin{cases} (1-p)^{k-1}p = q^{k-1}p \ si \ x\in N^* \\ 0 \quad ailleur \end{cases}$$

Proposition :

X ~ G(p) alors la fonction f définie par :

$$f_X(k) = P(X=k) = \begin{cases} (1-p)^{k-1}p = q^{k-1}p \ si \ x\in N^* \\ 0 \quad ailleur \end{cases}$$

Est une densité de probabilité

Preuve :

Il suffit de vérifier les trois propriétés de la densité.

Caractéristiques de la loi

Espérance e, variance et écart type

Proposition : Si X suit la loi Géométrique alors :

- $E(X) = \dfrac{1}{p}$
- $Var(X) = \dfrac{q}{p^2}$
- $\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{q}{p^2}} = \dfrac{\sqrt{q}}{p}$

Par exemple, la probabilité q^{k-}1p correspond à la probabilité d'obtenir dans une succession de k épreuves de Bernoulli indépendantes, k − 1 échecs suivis d'un succès. De plus, la loi géométrique est le premier modèle discret de la mort d'une particule radioactive. En effet, la durée de vie de la particule radioactive, notée T, suit la loi de probabilité pour k ∈ N

$$P(T = k) = q^k p$$

Preuve : par exemple pour calculer la variance : on utilise les notions des séries :

p

En effet $E[X^2] = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2(1-p)^{k-1}p = pS(1-p)$ avce $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 x^{k-1}$. Puis

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 x^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(x^k)' = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k\right)' \\ &= \left(x\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}\right)' = \left(x\sum_{k=1}^{+\infty}(x^k)'\right)' \\ &= \left(x\left(\sum_{k=1}^{+\infty} x^k\right)'\right)' = \left(x\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right)'\right)' \\ &= \left(x\left(\frac{1}{1-x}\right)'\right)' = \left(x\frac{1}{(1-x)^2}\right)' \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2x}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

D'où $E[X^2] = pS(1-p) = p\dfrac{1}{(1-(1-p))^2} + p\dfrac{2-2p}{(1-(1-p))^3} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{2-2p}{p^2}$ et

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{p} + \frac{2-2p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{p(1-p)}{p^2}.$$

Exercice (Temps d'attente de métros).

On suppose que le temps d'attente (en minutes) d'un métro suit une loi géométrique. Durant les heures de pointes du matin, le temps d'attente moyen d'un métro pour la ligne 8 est de 3 minutes tandis qu'il est de 2 min pour la ligne 9.

(a) Quels sont les paramètres des lois géométriques pour les lignes n° 8 et n° 9 ?
(b) Quelle est la probabilité d'attendre entre 2 et 4 minutes un métro de la ligne 8 ? de la ligne 9 ?
(c) Même question pour un temps d'attente de plus de 5 minutes.

Solution

Notons X le temps d'attente de la ligne 8 et Y celui de la ligne 9.

(a) Le temps moyen d'attente est l'espérance donc on doit avoir E(X) = 3 et E(Y) = 2. L'espérance d'une loi géométrique de paramètre p est 1/p donc le paramètre de X est 1/3 tandis que celui de Y est 1/2. On a donc

$$\mathbb{P}(X=k)=\tfrac{1}{3}\times\left(\tfrac{2}{3}\right)^{k-1} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y=k)=\tfrac{1}{2}\times\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1}=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k}.$$

(b) On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(2\le X\le 4)&=\mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=3)+\mathbb{P}(X=4)\\&=\tfrac{1}{3}\times\left(\tfrac{2}{3}\right)^{2-1}+\tfrac{1}{3}\times\left(\tfrac{2}{3}\right)^{3-1}+\tfrac{1}{3}\times\left(\tfrac{2}{3}\right)^{4-1}=\tfrac{2}{9}+\tfrac{4}{27}+\tfrac{8}{81}=\tfrac{18+12+8}{81}\\&=\boxed{\tfrac{38}{81}}\simeq 46{,}91\,\%.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(2\le Y\le 4)&=\mathbb{P}(Y=2)+\mathbb{P}(Y=3)+\mathbb{P}(Y=4)\\&=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{3}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{4}=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}=\tfrac{4+2+1}{16}\\&=\boxed{\tfrac{7}{16}}\simeq 43{,}75\,\%.\end{aligned}$$

(c) on a (rappelons qu'une loi géométrique prend ses valeurs dans N donc ne prend jamais la valeur 0)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X\ge 5)&=1-\mathbb{P}(X<5)\\&=1-\mathbb{P}(X=1)-\mathbb{P}(X=2)-\mathbb{P}(X=3)-\mathbb{P}(X=4)\\&=1-\mathbb{P}(X=1)-\mathbb{P}(2\le X\le 4)=1-\tfrac{1}{3}-\tfrac{38}{81}=\tfrac{81-27-38}{81}\\&=\boxed{\tfrac{16}{81}}\simeq 19{,}75\,\%.\end{aligned}$$

I.5 Loi hypergéométrique H(N,n,P)

Définition :

Soit une urne contenant N boule dont une proportion p de boules blanches. On prélève de cette urne un échantillon (sans remise) de n boules. On note par X la variable aléatoire qui donne le nombre de boules blanches de l'échantillon. On dit que X suit une loi hypergéométrique de paramètres N, n, p et on note X → H (N, n, p).

Proposition :

X ~ H (N, n, p).alors la fonction f définie par :

$$f_X(k) = P(X = k) = \begin{cases} \dfrac{C_{NP}^{k} C_{qN}^{n-x}}{C_N^n} & si \max(0, n - Nq) \le k \le \min(n, NP) \\ 0 & ailleur \end{cases}$$

Est une densité de probabilité

Preuve :exo TD

Il suffit de vérifier les trois propriétés de la densité.

Caractéristiques de la loi

Espérance e, variance et écart type

Proposition : Si X suit la loi Hypergéométrique alors :

- $E(X) = np$
- $Var(X) = \dfrac{N-n}{N-1} np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{N-n}{N-1} npq}$

Preuve : exo TD

Exemple :

On tire n boules (sans remise) dans une urne contenant pa boules rouges et qa boules bleues, soit un nombre total de boules de a = pa + qa. Alors la variable aléatoire donnant le nombre de boules rouges suit une loi hypergéométrique H (n, p, a).

II. Loi d'une variable aléatoire continue.

Définition :

On appelle densité de probabilité toute fonction réelle positive, d'intégrale 1.

Attention ! Pour une v.a. continue X , la densité f ne représente pas la probabilité de l'évènement {X = x}.

Important :

La loi d'une v.a. X est donnée par :
- sa densité ou
- les probabilités P [a ≤ X ≤ b] pour tous a, b ou
- les probabilités F (x) = P [X ≤ x] pour tout x (F est la fonction de répartition).

Remarque : P [X = x] = 0 pour tout x.

II.1 Loi uniforme

Définition et proposition :

Une v.a. X suit une loi uniforme sur [a, b], si elle admet pour densité

$$f(X)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}\ si \quad a \prec X \prec b \\ 0 \quad si\ non\end{cases}$$

Preuve :

Il est facile de vérifie facilement que f est une densité

Notation : On note X ~ U [a,b].

Fonction de répartition

La fonction de répartition F de X est donnée par :

$$F(X)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\begin{cases}0\ si \quad x\prec a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \quad si\ a\le x\prec b \\ 1\ si\ x\succ b\end{cases}$$

Caractéristiques de la loi

Espérance , variance et écart type

Proposition :

Soit X une variable aléatoire suit la loi uniforme X ~ U [a,b] alors

- $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$
- $Var(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$
- $\sigma(X)=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$

Preuve :

Il est très facile de montrer la proposition

II.2 Loi exponentielle

Définition:

Soit λ > 0. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ si sa fonction de densité f est donnée par :

$$f(X)=\lambda e^{-\lambda x}1_{[0,+\infty[}(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & si\ x\in[0,+\infty[\\ 0 & ailleur\end{cases}$$

Notation : X ~ exp(λ)

Les lois exponentielles sont souvent utilisées pour modéliser des temps d'attente ou des durées de vie. Par exemple, les temps, d'attente à partir de maintenant du prochain tremblement de terre, de la prochaine panne d'un appareil.

Caractéristiques de la loi

Espérance e, variance et écart type

Proposition :

Soit X une variable aléatoire suit la loi exponentielle X ~ exp(λ) alors :

$$E(X)=\frac{1}{\lambda},\ \ Var(X)=\frac{1}{\lambda^2},\quad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}$$

Preuve : (Exo TD)

Proposition :

La fonction de répartition de la loi Exp(λ) est égale a :

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & si\ x\geq 0\\ 0\ ailleur\end{cases}$$

II.3 Loi Lois normales ou gaussiennes

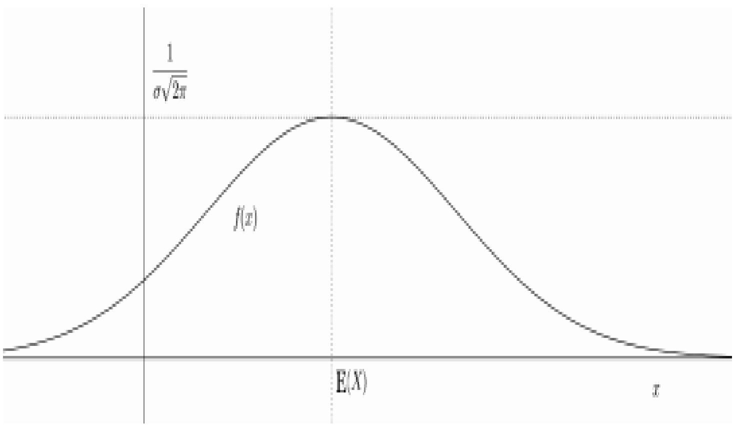
Elles jouent un rôle capital dans l'étude des lois limites de sommes de variables aléatoires indépendantes (cf. le théorème central limite, résultat central comme son nom l'indique en théorie des probabilités). On parle encore de loi gaussiennes.
Parfois sous le vocable loi de Laplace-Gauss et caractérisée par une célèbre "courbe en cloche".

Définition

On dit que la v.a.r. X suit une loi gaussienne ou normale N (m, σ2) si elle a pour densité la fonction :

$$f_{m,\sigma}:R\to R,\quad t\mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

L'allure caractéristique en cloche de la densité de la loi normale :



Caractéristiques de la loi

Espérance e, variance et écart type

Proposition :

Soit X une variable aléatoire suit la loi Normale X ~ N(m,σ²) alors :

$$E(X)=m\ ,\quad Var(X)=\sigma^2\ ,\quad \sigma(X)=\sigma$$

Remarque

Notons que f est bien une densité puisque :

$$\int_R \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right)dt=\sigma\sqrt{2\pi}$$

En effet, par le changement de variable $u=\frac{(t-m)}{\sqrt{2}\sigma}$, il suffit de retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss : $\int_R \exp\left(-u^2\right)du=\sqrt{\pi}$

Pour cela, effectuons un changement de variable en coordonnées polaires :

$$I^2=\int \exp\left(-x^2\right)dx\times\int_R \exp(-y^2)dy=\int_{R^2}\exp(-(x+y)^2)dxdy$$
$$=\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{+\infty}\exp(-r^2)rdrd\vartheta=2\pi\int_0^{+\infty}\exp(-r^2)rdr$$
$$=-\pi\left[\exp(-r^2)\right]_0^{+\infty}=\pi$$

Preuve :

Calculons l'espérance et la variance par le changement de variable $u=\frac{(t-m)}{\sqrt{2}\sigma}$

$$E(X)=\int_R tf_{m,\sigma}(t)dt=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_R t.\exp(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2})dt$$
$$=\int_R\frac{\sqrt{2}\sigma u+m}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_R ue^{-u^2}du+\frac{m}{\sqrt{\pi}}\int_R e^{-u^2}du=m$$

$$Var(X)=\int_R (t-m)^2 f_{m,\sigma}(t)dt=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_R (t-m)^2.\exp(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2})dt$$
$$=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_R u^2\ e^{-u^2}du=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}\left[-ue^{-u^2}\right]_R+\frac{1}{2}\int e^{-u^2}du\right)=\sigma^2$$

II.4 Loi normale centrée réduite N (0, 1)

Définition :

La loi normale centrée réduite est une la loi continue, d'une v.a. X `a valeurs ,dans X(Ω) = R tout entier, définie à partir de la densités :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}$$

Il n'existe par contre pas d'expression simple de sa fonction de répartition autre que la formule intégrale.

$$\forall a \in R, \quad F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt$$

Espérance e, variance et écart type

Proposition :
Soit X une variable aléatoire suit la loi Normale X ~ N(0,1) alors :

$E(X) = 0\,,\ \ Var(X) = 1\,,\ \ \sigma(X) = 1$

Proposition :

Si la v.a.r. X suit une loi N (m, σ^2), alors la variable aléatoire $Y = \dfrac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale N(0,1)

Preuve :

Calculons pour a < b quelconques P(a ≤ Y ≤ b) :

$$P(a \le \frac{X-m}{\sigma} \le b) = P(\sigma a + m \le X \le \sigma b + m)$$
$$= \int_{\sigma a+m}^{\sigma b+m} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2})dt$$

Il suffit alors de faire le changement de variable $S = \dfrac{t-m}{\sigma}$ pour obtenir :

$\forall a \in R, \quad P(a \leq Y \leq b)$

$$= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{S^2}{2}) dS$$

C'est à dire Y suit la loi N (0, 1).

Propriétés :

Si $Y \leadsto$ N (0, 1), c'est-à-dire Y suit une loi normale centrée réduite de moyenne (0) et D'écart type (1), alors les propretés ci-dessous sont toujours vérifiées :

1. $\forall y \in R, F(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)dt$
2. $\forall y \in R, F(-y) = 1 - F(y)$
3. $\forall y \in R, P(Y \succ y) = 1 - P(Y \leq -y)$

Manipulation de la loi normale

On notera Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite N (0, 1). On utilise les valeurs de Φ(a) tabulées et le changement de variable pour calculer les valeurs de la fonction de répartition F d'une loi normale générale.

Exemple

Considérons X une v. a. qui suit une loi N (6, 4) et Z une v.a. de loi N (0, 1), on a par exemple

$$F_X(7) = P(X \leq 7) = p\left(\frac{X-6}{2} \leq \frac{7-6}{2}\right)$$

$$= P(Y \leq \frac{1}{2}) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0.6915$$

Les valeurs ne sont tabulées que pour des valeurs de a positives, mais on s'en sort à l'aide de la propriété suivante de la fonction de répartition Φ de la loi normale :

Propriété :

Soit Z une v.a. de loi N (0, 1) ; on a alors $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$ et en particulier $\Phi(0) = \frac{1}{2}$

D'autre part : $P(|Y| \leq a) = 2.\Phi(a) - 1$

Exemple

$$P(X \succ 1) = P\left(\frac{X-6}{2} \succ \frac{1-6}{2}\right) = P(Y \succ -2.5) = \Phi(2.5) = 0.9938$$

$$P(4 \leq X \leq 8) = P(-1 \leq Y \leq 1) = P(|Y| \leq 1) = 2\Phi(1) = 0.6826$$

II.5 Lois log-normales

Définition :

Une variable aléatoire réelle X suit une loi log-normale si elle admet la densité :

$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{\sigma t\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(\ln t-m)^2}{2\sigma^2} & si\ t\geq 0 \quad m\in R,\sigma\in R^*\\ 0 \quad ailleur\end{cases}$$

Proposition :
Si X est de loi log-normale alors ln(X) suit une loi normale et réciproquement.
Preuve : TDexo
II.6 Lois de Cauchy
Définition : soit $a\in R_+^*$
On appelle loi de Cauchy de paramètre a la loi de probabilité absolument continue dont une densité est donnée par :

$$f(x)=\frac{a}{\pi\left(a^2+x^2\right)},\ x\in R$$

Remarque : l'espérance de la loi de Cauchy n'est pas définie

II.7 Lois de Gamma
Définition :
Soient r > 0, λ > 0. On définit la fonction Γ par :

$$\Gamma(r)=\int_0^{+\infty}x^{r-1}e^{-x}dx$$

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi gamma de paramètres r, λ si sa fonction de densité f est donnée par :

$$f(x)=\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x}1_{]0,+\infty[}(x)$$

Notation : X ~ Γ(λ,r)
Espérance e, variance et écart type
Proposition :
Soit X une variable aléatoire suit la loi Normale X ~ Γ(λ,r) alors :

$$E(X)=\frac{r}{\lambda},\ Var(X)=\left(\frac{r}{\lambda}\right)^2,\quad \sigma(X)=\frac{r}{\lambda}$$

Preuve : Exo TD

II.8 Loi de Laplace
Définition : On dit qu'une variable aléatoire suit une loi de Laplace si sa fonction de densité est donnée par :

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}\quad x\in R$$

Notation : X ~ Γ(λ,r)

Espérance e, variance et écart type

Proposition :

Soit X une variable aléatoire suit la loi de Laplace X ~ L alors :

$$E(X)=0\,,\quad Var(X)=2\,,\quad \sigma(X)=\sqrt{2}$$

Preuve : Exo TD

II.9 Loi du χ2

Définition :

On dit que X suit la loi du χ2 (“khi-deux”) à k degré(s) de liberté si

$$f_k(t)=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}t^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{t}{2}},\quad t\succ 0$$

La loi du χ2 est une loi très classique en statistique. Elle est liée au test du χ2 qui permet, par exemple, de savoir si un échantillon donné est en adéquation avec une loi de probabilité définie a priori.

Espérance e, variance et écart type

Proposition :

Soit X une variable aléatoire suit la loi de χ2, X ~ χ2 alors :

$$E(X)=k\,,\quad Var(X)=2k\,,\quad \sigma(X)=\sqrt{2k}$$

II.10 la Loi Beta

Définition :

Soit X une variable aléatoire, on dit que X suit la loi de Beta de paramètre (a,b) si sa densité est donnée par : $f_X(x)=\dfrac{1}{\beta(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}1_{]0,1[}(x)$

où β(a, b) désigne la fonction Beta définie par :

$$\beta(a,b)=\beta(b,a)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Espérance e, variance et écart type

Proposition :

Soit X une variable aléatoire suit la loi β(a, b) d’alors :

$\forall k \in N \, , E(X^k) = \dfrac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+k)}$ Donc

$$E(X) = \frac{a}{a+b} \quad Var(X) = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2} \quad \sigma(X) = \frac{1}{a+b}\sqrt{\frac{ab}{(a+b+1)}}$$

II.11 Loi de Student

Définition :

Soient X ∼ N (0; 1) et Y ∼ χ2(n). Posons $f_T(t) = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$

Alors T suit une loi de Student a n degré de liberté et on la note T (n)

La fonction de densité de la loi de Student est définie sur R et continue :

Le plus souvent, elle est définie à l'aide de la fonction Gamma :

$$f_n(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \times \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \times \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

Espérance e, variance et écart type

Proposition :

Soit X une variable aléatoire suit la loi de Student, X ∼ T_n alors :

$$E(T) = 0 \, , n \succ 1, \quad Pour\ tout\ n \succ 2, \quad Var(T) = \frac{n}{n-2}, \quad \sigma(T) = \sqrt{\frac{n}{n-2}}$$

Preuve : TD exo

II.12 Loi de Weibull

Définition :

Une variable aléatoire X suit la loi de Weibull de paramètres λ>0 et α>0 si elle est absolument continue et admet pour densité

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\lambda e^{-\lambda x^{\alpha}} x^{\alpha-1} \ si\ x \geq 0 \\ 0 \sin on \end{cases}$$

Remarque : lorsque $\alpha = 2, \lambda = \dfrac{1}{2}$, on l'appelle aussi loi de Rayleigh

Espérance

Si X suit la loi de Weibull alors X admet alors une espérance : $E(X) = \dfrac{\Gamma\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}$

Remarque :

La loi de Rayleigh apparaît souvent pour décrire le bruit en sortie de certains récepteurs de transmissions. La loi de Weibull elle est utilisée notamment en théorie de la fiabilité, lorsque le système que l'on étudie vieillit et que le taux de panne augmente au cours du temps.

II.13 Loi de Fischer-Snedecor

Définition :

La loi de Fischer-Snedecor est une loi continue dépendant de deux paramètres notés ν1 et ν2, entiers naturels non nuls. La variable X distribuée selon cette loi prend toutes ses valeurs dans R_+^* ou dans R^+.

Si Y suit la loi de $\chi^2_{\upsilon_1}$ et Z suit la loi $\chi^2_{\upsilon_2}$ Y et Z étant indépendantes, la variable $X = \dfrac{\dfrac{Y}{\upsilon_1}}{\dfrac{Z}{\upsilon_2}}$ suit la loi de Fischer-Snedecor. On note $X \rightarrow F_{(\upsilon_1,\upsilon_2)}$

La loi F de Fischer-Snedecor à (υ_1, υ_2) degrés de liberté est la loi de probabilité du rapport de deux variables de khi-deux indépendantes divisées par leurs nombres de degrés de liberté (υ_1 pour le numérateur, υ_2 pour le dénominateur). Pour $\upsilon_1 = 1$, la loi F de Fischer-Snedecor à (1, υ_2) degrés de liberté est la loi de probabilité du carré d'une variable de Student à υ_2 degrés de liberté.

Densité de la variable aléatoire de Fischer-Snedecor

La densité de probabilité est, par définition

$$f_{(\upsilon_1,\upsilon_2)}(x) = \upsilon_1^{\frac{\upsilon_1}{2}} \upsilon_2^{\frac{\upsilon_2}{2}} \frac{\Gamma\left(\dfrac{\upsilon_1+\upsilon_2}{2}\right) \quad x^{\frac{\upsilon_1}{2}-1}}{\Gamma\left(\dfrac{\upsilon_1}{2}\right) \times \Gamma\left(\dfrac{\upsilon_2}{2}\right) (\upsilon_1 x + \upsilon_2)^{\frac{\upsilon_1+\upsilon_2}{2}}} \quad , x \succ 0, \upsilon_1 et \upsilon_2 \in N^*$$

Dans cette formule, Γ est la fonction Gamma d'Euler définie, lorsque la partie réelle de x est positive.

Pour la preuve :

$$\int_0$$

La fonction $f_{(\nu_1,\nu_2)}$ est bien une densité de probabilité sur $]0;+\infty[$, car :

— ses valeurs sont positives,

— la fonction est intégrable et son intégrale est donnée par :

$$\int_0^{+\infty} f_{(\nu_1,\nu_2)}(x)dx = \nu_1^{\frac{\nu_1}{2}}\nu_2^{\frac{\nu_2}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{(\nu_1 x+\nu_2)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}dx.$$

Pour calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{(\nu_1 x+\nu_2)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}dx$, on pose $t = \dfrac{\nu_1 x}{\nu_1 x+\nu_2} \Rightarrow dx = \dfrac{n_2}{n_1}\dfrac{dt}{1-t^2}$. De plus, $\nu_1 x + \nu_2 = \nu_2 \times \dfrac{1}{1-t}$ ce qui implique que lorsque $x=0$, $t=0$ et lorsque x tend vers l'infini, t tend vers 1. Par conséquent,

$$I = \int_0^1\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{\nu_1}{2}-1}\left(\frac{1-t}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{dt}{(1-t)^2} = \nu_1^{-\frac{\nu_1}{2}}\nu_2^{-\frac{\nu_2}{2}}\int_0^1 t^{\frac{\nu_1}{2}-1}(1-t)^{\frac{\nu_2}{2}-1}dt.$$

Dans l'intégrale, on reconnaît la fonction Beta d'Euler définie, lorsque les parties réelles de x et de y sont positives, par :

$$B(x,y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}du = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

donc $\displaystyle\int_0^1 t^{\frac{\nu_1}{2}-1}(1-t)^{\frac{\nu_2}{2}-1}dt = B\left(\frac{\nu_1}{2},\frac{\nu_2}{2}\right)$ ce qui implique que

$$\int_0^{+\infty} f_{(\nu_1,\nu_2)}(x)dx = \nu_1^{\frac{\nu_1}{2}}\nu_2^{\frac{\nu_2}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}\nu_1^{-\frac{\nu_1}{2}}\nu_2^{-\frac{\nu_2}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)} = 1.$$

L'intégrale de $f_{(\nu_1,\nu_2)}$ est bien égale à 1, ce qui montre que $f_{(\nu_1,\nu_2)}$ est bien une densité de probabilité.

3. Si $X \rightsquigarrow F(\nu_1,\nu_2)$ la variable $\dfrac{1}{X} \rightsquigarrow F(\nu_2,\nu_1)$ donc $F(\nu_1,\nu_2,1-\alpha) = \dfrac{1}{F(\nu_2,\nu_1,\alpha)}$.

III. Approximation des lois de probabilités

III.1 Approximation de la loi binomiale vers la loi de Poisson

La loi de Poisson est souvent utilisée comme approximation de certaines lois binomiales pour de grands échantillons, i.e. des lois binomiales correspondant `a des grands nombres n d'épreuves de Bernoulli. Il y a bien sûr quelques restrictions dont nous tairons ici les justifications théoriques, et le paramètre de la loi approximante doit être choisi de sorte que l'espérance soit celle de la loi binomiale approximée.

Soient $n \geq 1,\ 0 \prec p \prec 1$ et X suit la loi binomial B(n,p) et supposons que le produit np tends vers λ>0 lorsque n tends vers $+\infty$. Dans ce cas, pour n assez grand on peut remplacer p par $\dfrac{\lambda}{n}$. D'autre part si $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, alors $P_X(k) = P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

$$P_X(k)=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}p^kq^{n-k}$$

Ainsi pour tout $k\in\{0,1,\ldots,n\}=\dfrac{n^k\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}\left(\dfrac{p}{q}\right)^k q^n$

$$=\frac{(np)^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

Mais $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(np)^k}{k!}=\dfrac{\lambda^k}{k!}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^n=e^{-\lambda}$

Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty}P_X(k)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$, qui est la fonction de densité de la loi de Poisson du paramètre λ.

Théorème :

Soit $n\geq 1, 0\prec p\prec 1$ et X une variable aléatoire de la loi B (n,p).Supposons que $np\to\lambda$ lorsque $n\to+\infty$ et $p\to 0$,alors $B(n,p)\cong P(\lambda)$

Exemple :

Comparaison des fonctions de répartitions d'une loi B (100,0.1) et celle d'une loi de Poisson P(10)

Exemple 4.3. Dans un pays le pourcentage des personne atteints d'une certaine maladie génétique est de 0.4%. Quelle est la probabilité de trouver au plus 2 personnes atteintes de cette maladie dans un village de 250 personnes ?

SOLUTION:

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes atteinte de cette maladie dans ce village de 250 personnes. Il est clair qu'on cherche $\mathbb{P}(X \leq 2)$ et que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(250, 0.004)$. Ainsi n et assez grand et p est petit, de plus le produit $np = 250 \times 0.004 = 1$, donc si $\widetilde{X} \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq 2) &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) \\ &\simeq \mathbb{P}(\widetilde{X} = 0) + \mathbb{P}(\widetilde{X} = 1) + \mathbb{P}(\widetilde{X} = 2) \\ &= e^{-1} + e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2} \\ &= \frac{5}{2}e^{-1}. \end{aligned}$$

Remarque 4.5. Dans la pratique, ce résultat nous permet de remplacer la loi $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi $\mathcal{P}(np)$ lorsque le produit np est très petit. L'avantage de la loi de Poisson est qu'elle ne dépend que d'un seul paramètre. Bien évidement ceci

III.2 Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Soit une loi binomiale B(n, p) de moyenne m = np, d'écart-type $\sigma = \sqrt{npq}$.

On montre que l'on peut approximer la loi binomiale B(n, p) par :

la loi normale N (m = np, $\sigma = \sqrt{npq}$) si n ≥ 15, p et q étant non voisins de 0.

Dans la pratique, l'approximation est admise si n ≥ 20, np ≥ 10, nq ≥ 10.

III.3 Approximation d'une loi poisson par une loi normale

La loi de Poisson de paramètre λ est approximée par la loi normale de moyenne λ et variance λ, pour λ → ∞.

En pratique, cette approximation est faite si λ ≥ 20.

Si X est une variable aléatoire de loi Poisson de paramètre λ, avec λ ≥ 20 ; alors, on a l'approximation suivante :

$$P(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

III.4 Approximation d'une loi Khi-deux par une loi normale

La loi de Khi-deux à m degrés de liberté est approximée par la loi normale de moyenne m et variance 2m, pour m > 30.

Résumé sur les approximations de lois

- $H(N,p,n) \approx B(n,p) \quad pour\ N \succ 10n$
- $B(n,p) \approx P(\lambda = np)\ pour\ n \geq 30, p \leq 0.1\, et\ np \leq 10$
- $B(n,p) \approx N(m = np, \sigma = \sqrt{npq})\ avec \begin{cases} n \geq 30 \\ 0.1 \prec p \prec 0.9 \end{cases} ou \begin{cases} np \geq 10 \\ nq \geq 10 \end{cases} ou npq \succ 3$
- $P(\lambda = np) \approx N(m = np, \sigma = \sqrt{npq})\ pour\ np \geq 10$

Tableau comparatif

Dans ce tableaux on trouve une comparaison entre les déférents caractéristique des de types de variables aléatoire (discrète et continues).

X	Variable discrète	Variable à densité f
$X(\Omega)$	$\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$	$\mathbb{R}$ ou un intervalle
$\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$	$\sum_{a \leq x_k \leq b} \mathbb{P}(X = x_k)$	$\int_a^b f(t)\, dt$
$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$	$\sum_{x_k \leq x} \mathbb{P}(X = x_k)$	$\int_{-\infty}^x f(t)\, dt$
$E[X]$	$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k \mathbb{P}(X = x_k)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt$
$E[g(X)]$	$\sum_{k=1}^{+\infty} g(x_k) \mathbb{P}(X = x_k)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(t)\, dt$
$E[X^2]$	$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k^2 \mathbb{P}(X = x_k)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\, dt$
$\mathrm{Var}(X)$	$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(x_k - E[X]\right)^2 \mathbb{P}(X = x_k)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(t - E[X]\right)^2 f(t)\, dt$