يرجع حل مسالة البرمجة الخطية للعالم (George B. Dantzig) سنة 1947، حيث استخدمت طريقة البرمجة الخطية لحل المشاكل العسكرية والمدنية والصناعية بالإضافة إلى تخطيط المدن ومجالات أخرى عديدة.

منذ عام 1947 نشر (George B. Dantzig) لأول مرة طريقة حل البرمجة الخطية وسماها "Simplex" حيث قام الكثير بعده بتطويرها لتحسين كفاءة مخرجاتها، وأولى هذه المحاولات خرجت سنة 1953 بواسطة المكتب الوطني للقياسات النمطية بالولايات المتحدة حيث أصبح علم الإعلام الآلي متاحا وأصبح استخدام الرياضي بواسطة الحاسوب.

رأينا سابقا أن الطريقة البيانية تستعمل بالخصوص في حل النماذج التي لا تتعدى عدد المتغيرات فيها اثنين، فإذا ما أصبح عدد المتغيرات في النموذج الخطي أكثر من ذلك فإنه يصعب رسم معادلات القيود الفنية بيانيا، لذلك ظهرت طريقة الـ "**Simplex**" لتسهيل إيجاد حل للنماذج الخطية التي تحتوي على أكثر من متغيرين.

تعتبر طريقة الـ "**Simplex**" تعميم لطريقة البيانية التي تعتمد على نقاط تقاطع مستقيمات القيود والمشكلة لمنطقة الحلول الممكنة، حيث تسمح لنا هذه الطريقة بالانتقال من نقطة إلى أخرى لتحسين مستوى الحل، أو بالأحرى مستوى قيمة دالة الهدف.

المطلب الأول: طريقة "simplex" لحل البرامج الخطية في حالة كل القيود من الشكل "<=".

وتستخدم هذه الطريقة في حالة النماذج الخطية من الشكل:

$$\left(\mathbf{Max} \text{ أو } Min\right) Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n$$

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

من أجل حل أي نموذج خطي من الشكل الموضح أعلاه يجب إتباع الخطوات التالية:

1– تحويل المتباينات إلى معادلات مع إضافة متغيرات الفجوة (الفارق): ولفهم هذه مرحل نستعين بالمثال التوضيحي التالي:

لتكن لدينا المتباينة التالية: $8 \leq 5$، لتحويل هذه المتباينة إلى معادلة يجب إضافة العدد (3) من اليسار لتصبح المتباينة على شكل معادلة على النحو التالي: $8 = \mathbf{3} + 5$، وتعبر القيمة (3 بالموجب) عن الفجوة (الفارق) للمتباينة.

نفس المبدأ يمكن تطبيقه على القيود من الشكل:

$$a_{ij}x_j \leq b_i$$

لكي يصبح الطرفان متساويان يلزم يجب إضافة إلى الطرف الأيسر متغير الفجوة الذي سنرمز له بالرمز (S_i)، والتي تفسر اقتصاديا بالموارد العاطلة، بمعنى أخر تعبر عن الموارد التي لم تستعمل بعد، وحتى تصبح كل المتغيرات ممثلة في جميع معادلات النموذج الخطي فإننا نضيف متغيرات الفرق بمعامل (0) إلى دالة الهدف، فهذه المتغيرات لا تضيف أي شيء إلى دالة الهدف، ولأن هذه المتغيرات غير ممثلة أصلا في دالة الهدف.

ليصبح النموذج الخطي السابق على النحو التالي:

$$\left(\mathbf{Max} \text{ أو } \boldsymbol{Min}\right) \boldsymbol{Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n + 0S_1 + 0S_2 + \cdots + 0S_m}$$

$$\boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + S_1 = b_1}$$
$$\boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + S_2 = b_2}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\boldsymbol{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + S_m = b_m}$$
$$\boldsymbol{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0}$$

2- تمثيل معطيات البرنامج الخطي الجديد في جدول يسمى جدول الحل الابتدائي:

الحل	**(متغيرات الفجوة)** $S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad \dots S_m$	**(متغيرات القرار)** $x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_n$	**متغيرات دالة الهدف** ⇨
b_i	**تشكل معاملات متغيرات الفجوة في القيود مصفوفة الوحدة** ⇩	**معاملات متغيرات القيود الفنية** ⇩	**متغيرات الحل الابتدائي (قاعدة الحل)** ⇩
b_1 b_2 $.b_3$ $\vdots$ b_m	1 0 0 ... 0 0 1 0 ... 0 0 0 1 ... 0 $\vdots \quad \vdots$ 0 0 0 ... 1	$a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \dots \quad a_{1n}$ $a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \dots \quad a_{2n}$ $a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \dots a_{3n}$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $a_{m1} \quad a_{m2} \quad a_{m3} \dots \quad a_{mn}$	S_1 S_2 S_3 . $\vdots$ S_m
0	0 0 0 ... 0	$-C_1 \quad -C_2 \quad -C_2 \dots \quad -C_n$	**معاملات متغيرات دالة الهدف** ⇨

ملاحظة: تضرب معاملات متغيرات دالة الهدف في (1-) في حالة (Max) و (Min) لتسهيل عملية تتبع الحل الأمثل.

يعني جدول الحل الابتدائي القاعدة التي ننطلق منها في البحث عن حل أمثل، وهي تعني اقتصاديا تلك المرحلة التي تكون فيها المؤسسة الاقتصادية قد أعدت كل وسائل الإنتاج المطلوبة لممارسة نشاطها لكنها لازالت لم تبدأ بعد في ممارسة هذا النشاط؛ فإذا كانت المؤسسة لازالت لم تبدأ بعد في ممارسة نشاطها، فهذا يعني أن مؤشرات

هذا النشاط هي عند المستوى (0)؛ فإذا كانت مؤشرات القرار في دالة الهدف تساوي (0) ومتغيرات الفرق معاملاتها هي (0)، فإن دالة الهدف في هذه الحالة تساوي (0) وهي تتناسب مع مرحلة ما قبل بداية النشاط.

بالنسبة للقيود الفنية، إذا كانت متغيرات القرار تساوي (0)، فعند ضربها في معاملاتها، تكون المحصلة كلها (0) وتبقى متغيرات الفرق وهي تساوي كمية الموارد المتوفرة، وتعتبر هي الحل الابتدائي لهذا النموذج والذي يتناسب مع مرحلة ما قبل النشاط:

$$S_1 = b_1$$
$$S_2 = b_2$$
$$S_3 = b_3$$
$$\vdots \quad \vdots$$
$$S_m = b_m$$

مثال1: ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$Max\ Z = 2x_1 - 8x_2 + 10x_3$$
$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 8$$
$$3x_1 - 3x_2 - 3x_3 \leq 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

المطلوب: تكوين جدول الحل الابتدائي.

الحل:

❖ تحويل المتباينات إلى معادلات:

$$Max\ Z = 2x_1 - 8x_2 + 10x_3 + 0S_1 + 0S_2$$
$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + S_1 = 8$$
$$3x_1 - 3x_2 - 3x_3 + S_2 = 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

❖ تكوين جدول الحل الابتدائي:

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	الحل
S1	**4**	**2**	**2**	**1**	**0**	**8**
S2	**3**	**− 3**	**− 3**	**0**	**1**	**4**
Z	**−2**	**+ 8**	**− 10**	**0**	**0**	**0**

3– بعد تكوين جدول الحل الابتدائي، ندخل في مرحلة البحث عن الحل الأمثل، حيث نبدأ في المرحلة تجريب متغيرات القرار (مرحلة تجريب نقاط منطقة الحلول الممكنة) وذلك بإدخالها واحدا بعد الآخر إلى قاعدة الحل في مكان متغيرات الحل الابتدائي ونرى مدى تأثيرها على تحسين دالة الهدف التي كانت تساوي (0)، ويكون ذلك بإتباع الخطوات التالية:

❖ يكون الفصل بين أي من المتغيرات الذي يدخل إلى قاعدة الحل قبل باقي المتغيرات الأخرى على النحو التالي:

➢ في حالة التعظيم (Max): يدخل المتغير صاحب اقل قيمة سالبة.

➢ في حالة التدنية (Min): يدخل المتغير صاحب اكبر قيمة موجبة.

❖ إن إدخال احد المتغيرات الأساسية (x_i) (مرحلة بداية الإنتاج) يكون على حساب احد الموارد العاطلة، وبذلك يجب إخراج احد متغيرات الفجوة (S_i) من قاعدة الحل، ويكون الفصل في المتغير الذي يخرج من قاعدة الحل من بين المتغيرات الأخرى، بقيام قسمة المعاملات الموجودة في عمود الموارد المتاحة (b_i) على معاملات العمود الذي ينتمي إليه المتغير الأساسي (x_i) الذي اخترناه للدخول إلى قاعدة الحل، ثم نختار المتغير الذي ينتمي إلى الصف صاحب اقل قيمة **معلومة وغير سالبة*** من قسمة (bi/a_{ij})، ونقوم بإخراجه من قاعدة الحل.

❖ تحديد عمود المتغير الداخل وصف المتغير الخارج، وتعيين (نقطة ارتكاز"pivot") وهي القيمة التي يتقاطع فيها العمود والصف المحددين.

❖ من مبادئ طريقة "Simplex" أن المتغيرات الموجودة في قاعدة الحل يلزم أن تشكل دائما **مصفوفة وحدة** فيما بينها، فيلزم إذن أن المتغير الذي ندخله يأخذ مكان المتغير الذي نخرجه، وبالتالي يلزم أن يشكل **مصفوفة وحدة** مع باقي متغيرات الحل الابتدائي الموجودة حاليا في قاعدة الحل. وذلك بإتباع الخطوات التالية:

– تشكيل جدول جديد ونقوم بإعادة كتابة عليه نفس متغيرات دالة الهدف، وإجراء التغير الحاصل في قاعدة الحل من إدخال المتغير الأساسي (x_i) وإخراج متغير الفجوة (S_i).

– في الجدول الجديد، وفي مكان الصف الذي ينتمي إليه المتغير الخارج في الجدول السابق، نقوم بكتابة القيم الناتجة من قسمة قيم صف المتغير الخارج على قيمة الـ"pivot".

– نقوم بملء باقي قيم صفوف الجدول الجديد، بضرب قيم الصف الجديد (الناتجة من قسمة قيم صف المتغير الخارج على قيمة الـ"pivot")، في **ناقص*** (–) معاملات العمود الذي ينتمي إليه المتغير الداخل في الجدول القديم، وجمع النتيجة مع قيم الصف الموجودة في الجدول القديم والمراد الحصول على قيمه في الجدول الجديد.

❖ نعيد خطوات البحث على الحل الأمثل عدد المرات اللازمة، ونكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل (توقف عن محاولات البحث عن حل أمثل)، إذا أصبحت كل القيم الموجودة في السطر الأخير من الجدول (وهي معاملات دالة الهدف)،كلها موجبة أو مساوية لـ (0) في حالة دالة الهدف من شكل (Max)، أو إذا أصبحت كلها سالبة أو مساوية لـ (0) إذا ما كنا بصدد البحث عن (Min) دالة الهدف.

مثال 2: أكمل حل مثال 1.

* يجب أن تكون ($bi \geq 0$) و($a > 0$)

*ناقص معاملات تعني المعاملات * (–1)

$$Max\ Z = 2x_1 - 8x_2 + 10x_3$$
$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 8$$
$$3x_1 - 3x_2 - 3x_3 \le 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

الحل:

<u>جدول الحل الابتدائي</u>

المتغير الداخل صاحب اقل قيمة سالبة في صف دالة الهدف

تقاطع عمود المتغير الداخل وصف المتغير الخارج"pivot".

المتغير الخارج صاحب اقل قيمة موجبة من قسمة $({}^{bi}/_{a_{ij}})$=4

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	الحل	$({}^{bi}/_{a_{ij}})$
S1	4	2	2	1	0	8	8/2=4
S2	3	−3	−3	0	1	4	~~(4/−3)~~ لا تدخل في الحساب لأنها غير موجبة
Z	−2	+8	−10	0	0	0	

❖ تكوين جدول جديد ونقوم بإعادة كتابة عليه نفس متغيرات دالة الهدف، وإجراء التغير الحاصل في قاعدة الحل من إدخال المتغير الأساسي (x_i) وإخراج متغير الفجوة (S_i)، ثم تحويل قيم العمود الذي ينتمي إليه المتغير الداخل (x_3) إلى قيم عمود المتغير الخارج (S_1)، ليبقى يشكل **مصفوفة الوحدة** مع باقي متغيرات قاعدة الحل (في هذا المثال (S_2))، بدأ بقسمة قيم صف المتغير الخارج في الجدول أعلاه على قيمة الـ"pivot".

		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	الحل
3 *	x_3	2	1	1	$^1/_2$	0	4
	S_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	b_2
	Z	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	y

❖ من اجل إكمال باقي قيم الجدول، ودعنا نبدأ بقيم الصف الثاني (الذي ينتمي إليه (S_2))، نقوم بضرب قيم الصف الجديد (في الجدول الجديد) الذي ينتمي إليه (x_2) في **ناقص** القيمة التي كانت موجودة في عمود (x_3) من الجدول القديم (وهي القيمة (−3)*) وجمع النتيجة المتحصل عليها مع باقي القيم التي تنتمي إلى الصف المراد حساب قيمه الموجود في الجدول السابق: فمثلا إذا أردنا حساب القيمة (a_{21}) من الجدول الجديد فهي تساوي:

* 3= (1-)*(3-)

$$a_{21} = (3) * (2) + (3) = 9$$

وهكذا نكمل باقي القيم

$$a_{22} = (3) * (1) + (-3) = 0$$
$$a_{23} = (3) * (1) + (-3) = 0$$
$$a_{24} = (3) * \left(\frac{1}{2}\right) + (0) = \frac{3}{2}$$
$$a_{25} = (3) * (0) + (1) = 1$$
$$b_2 = (3) * (4) + (4) = 16$$

10 *	**x_3**	**2**	**1**	**1**	**$^1/_2$**	**0**	**4**
	S_2	9	0	**0**	$^3/_2$	1	16

❖ بنفس الطريقة نكمل ملء الصف الثالث (صف دالة الهدف): حيث نقوم بضرب قيم الصف الجديد الذي ينتمي إليه (x_2) في **ناقص** القيمة التي كانت موجودة فيه في العمود الجدول السابق (وهي القيمة (-10)*) وجمع النتيجة المتحصل عليها مع باقي القيم التي تنتمي إلى الصف المراد حساب قيمه الموجود في الجدول القديم:

فمثلا إذا أردنا حساب القيمة (c_1) من الجدول الجديد فهي تساوي:

$$c_1 = (10) * (2) + (-2) = 18$$

وهكذا نكمل باقي القيم

$$c_2 = (10) * (1) + (8) = 18$$
$$c_3 = (10) * (1) + (-10) = 0$$
$$c_4 = (10) * \left(\frac{1}{2}\right) + (0) = 5$$
$$a_{25} = (10) * (0) + (0) = 0$$
$$y = (10) * (4) + (0) = 40$$

في الأخير نحصل على جدول كل قيمه محسوبة، ويسمى بجدول المحاولة الأولى:

جدول المحاولة الأولى

	x_1	**x_2**	**x_3**	**S_1**	**S_2**	**الحل**
x_3	**2**	**1**	**1**	**$^1/_2$**	**0**	**4**
S_2	**9**	**0**	**0**	**$^3/_2$**	**1**	**16**
Z	**18**	**18**	**0**	**5**	**0**	**40**

* 10= (1-)*(10-)

الملاحظة 1: نلاحظ من الجدول الأخير أن قيم العمود الذي ينتمي إليه التغير الداخل (x_3) قد تحول إلى نفس قيم العمود المتغير الخارج (S_1) في الجدول السابق (0،0،1)، وبذلك أصبح يشكل مصفوفة الوحدة مع أعمدة المتغيرات الأخرى من قاعدة الحل، والمتمثل في المثال بـ (S_2).

الملاحظة 2: نلاحظ من جدول المحاولة الأولى أن جميع معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف أصبحت كلها غير سالبة، ومنه يمكن القول أن جدول المحاولة الأولى هو جدول الحل الأمثل:

$$\boldsymbol{x_1 = 0}$$ **(لا يظهر في قاعدة الحل)**

$$\boldsymbol{x_2 = 0}$$ **(لا يظهر في قاعدة الحل)**

$$\boldsymbol{x_3 = 4}$$

$$\boldsymbol{Max\ Z = 40}$$

وللتأكد أكثر من الحل نقوم بتعويض متغيرات الحل في دالة الهدف:

$$Max\ Z = 2(0) - 8(0) + 10(4) = 40$$

ويمكن أن نعوض متغيرات الحل في القيود:

$$4(0) + 2(0) + 2(4) + {\color{red}0} = 8$$ عدم ظهور متغير الفجوة (S_1=0)

$$3(0) - 3(0) - 3(4) + {\color{red}16} = 4$$ ظهور متغير الفجوة (S_2=16)

مثال 2: حل البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{gathered} Max\ Z = 6x_1 + 10x_2 + 3x_3 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 15 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 8 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{gathered}$$

الحل:

- ❖ تحويل المتباينات إلى معادلات:

$$\begin{gathered} Max\ Z = 6x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + S_1 = 15 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + S_2 = 8 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + S_3 = 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{gathered}$$

❖ تكوين جدول الحل الابتدائي:

5 PIVOT 2 3

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	الحل	
S_1	5	3	4	1	0	0	15	15/3
S_2	2	4	6	0	1	0	8	8/4
S_3	1	1	4	0	0	1	4	4/1
Z	−6	−10	−3	0	0	0	0	

4 1

مرحلة البحث عن الحل الأمثل:

– المحاولة الأولى:

– من اجل ملء قيم الصف الثاني (x_2) نقسم قيم صف المتغير الخارج في الجدول أعلاه على قيمة الـ"pivot".

– من اجل ملء الصف الأول (S_1) نضرب الصف الذي ينتمي إليه (x_2) في الجدول الجديد في (−3) ونجمع النتيجة مع قيم الصف الذي ينتمي إليه (S_1) في الجدول السابق.

– من اجل ملء الصف الثالث (S_3) نضرب الصف الذي ينتمي إليه (x_2) في الجدول الجديد في (−1) ونجمع النتيجة مع قيم الصف الذي ينتمي إليه (S_3) في الجدول السابق.

– من اجل ملء صف الرابع والأخير (دالة الهدف) نضرب الصف الذي ينتمي إليه (x_2) في الجدول الجديد في (+10) ونجمع النتيجة مع قيم صف دالة الهدف في الجدول السابق.

ملاحظة 1: كما شرحنا سابقا، وللتوضيح أكثر، المعاملات (−3،−1،10) هي **ناقص** قيم العمود الذي تنتمي إليه المتغير الداخل (x_2) في الجدول السابق من غير قيمة الـ (pivot)، (−)*(**3،1،−10**).

فنحصل في الأخير على الجدول التالي:

جدول المحاول الأولى.

PIVOT

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	الحل	
S_1	7/2	0	− 1/2	1	− 3/4	0	9	$9/(\frac{7}{2})$
x_2	1/2	1	3/2	0	1/4	0	2	$2/(\frac{1}{2})$
S_3	1/2	0	5/2	0	− 1/4	1	2	$2/(\frac{1}{2})$
Z	−1	0	12	0	5/2	0	20	

-3 -1 10

الملاحظة 2: نلاحظ من الجدول الأخير أن قيم العمود الذي ينتمي إليه المتغير الداخل (x_2) قد تحول إلى نفس قيم العمود المتغير الخارج (S_2) في الجدول السابق (0،0،1،0)، وبذلك أصبح يشكل مصفوفة الوحدة مع أعمدة المتغيرات الأخرى من قاعدة الحل، والمتمثل في مثال بـ (S_2).

الملاحظة 3: نلاحظ من جدول المحاولة الأولى أن جميع معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف لم تصبح كلها غير سالبة (معامل (x_1) في دالة الهدف يساوي (−1))، ومنه يمكن القول أن جدول المحاولة الأولى ليس هو جدول الحل الأمثل، بمعنى انه يكمن تحسين حل المحاولة الأولى، ومنه نقوم بالمحاولة الثانية.

– المحاولة الثانية:

– من اجل ملء قيم الصف الأول (x_1) نقسم قيم صف المتغير الخارج في الجدول أعلاه على قيمة الـ"pivot".

– من اجل ملء قيم الصف الثاني (x_2) نضرب الصف الذي ينتمي إليه (x_1) في الجدول الجديد في (−1/2) ونجمع النتيجة مع قيم الصف الذي ينتمي إليه (x_2) في الجدول السابق.

– من اجل ملء الصف الثالث (S_3) نضرب الصف الذي ينتمي إليه (x_1) في الجدول الجديد في (−1/2) ونجمع النتيجة مع قيم الصف الذي ينتمي إليه (S_3) في الجدول السابق.

– من اجل ملء صف الرابع والأخير (دالة الهدف) نضرب الصف الذي ينتمي إليه (x_1) في الجدول الجديد في (+1) ونجمع النتيجة مع قيم صف دالة الهدف في الجدول السابق.

فنحصل في الأخير على الجدول التالي:

			x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	الحل
-1/2	-1/2	1	x_1	1	0	−1/7	2/7	−3/14	0	18/7
			x_2	0	1	11/7	−1/7	5/14	0	5/7
			S_3	0	0	18/7	−1/7	−1/7	1	5/7
			Z	0	0	83/7	0	5/2	0	158/7

نلاحظ من جدول المحاولة الثانية أن جميع معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف أصبحت كلها غير سالبة، ومنه يمكن القول أن جدول المحاولة الثانية هو جدول الحل الأمثل:

$$\boldsymbol{x_1 = 18/7}$$
$$\boldsymbol{x_2 = 5/7}$$
$$\boldsymbol{x_3 = 0}\text{(لا يظهر في قاعدة الحل)}$$
$$\boldsymbol{Max\ Z = 158/7}$$

وللتأكد أكثر من الحل نقوم بتعويض متغيرات الحل في دالة الهدف:

$$Max\ Z = 6(18/7) + 10(57) + 3(0) = 158/7$$

ويمكن أن نعوض متغيرات الحل في القيود:

$5(18/7)+3(5/7)+4(0)+0=15$ عدم ظهور متغير الفجوة ($S_1=0$).

$2(18/7)+4(5/7)+6(0)+0=8$ عدم ظهور متغير الفجوة ($S_2=0$).

$1(18/7)+1(5/7)+4(0)+(5/7)=4$ ظهور متغير الفجوة ($S_3=5/7$).

المطلب الثاني: طريقة "simplex" لحل البرامج الخطية في حالة القيود "$\geq,=$".(طريقة BIG_M).

وتستخدم هذه الطريقة في حالة ما إذا كان أي برنامج خطي يحتوي على قيد من الشكل "$\geq,=$" على النحو التالي:

$$\left(\mathbf{Max} \text{ أو } \boldsymbol{Min}\right)\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{C_1x_1}+\boldsymbol{C_2x_2}+\cdots+\boldsymbol{C_nx_n}$$
$$\boldsymbol{a_{11}x_1}+\boldsymbol{a_{12}x_2}+\cdots+\boldsymbol{a_{1n}x_n}\geq\boldsymbol{b_1}$$
$$\boldsymbol{a_{21}x_1}+\boldsymbol{a_{22}x_2}+\cdots+\boldsymbol{a_{2n}x_n}=\boldsymbol{b_2}$$
$$\boldsymbol{x_1}\geq\mathbf{0},\boldsymbol{x_1}\geq\mathbf{0},\dots,\boldsymbol{x_n}\geq\mathbf{0}$$

من أجل حل أي نموذج خطي من الشكل الموضح أعلاه يجب إتباع الخطوات التالية:

1– تحويل المتباينات إلى معادلات مع إضافة متغيرات الفجوة (الفارق): ولفهم هذه مرحل نستعين بالمثال التوضيحي التالي:

لتكن لدينا المتباينة التالية: $5\geq 3$، لتحويل هذه المتباينة إلى معادلة يجب إضافة العدد (2–) من اليسار لتصبح المتباينة على شكل معادلة على النحو التالي: $5-\mathbf{2}=3$، وتعبر القيمة (2 بالسالب) عن الفجوة السالبة للمتباينة.

نفس المبدأ يمكن تطبيقه على القيود من الشكل:

$$\boldsymbol{a_{ij}x_j}\geq\boldsymbol{b_i}$$

لكي يصبح الطرفان متساويان يلزم يجب إضافة إلى الطرف الأيسر متغير الفجوة (**–Si**) بالسالب.

أما في حالة المعادلات فمثلا: $5=5$ يمكن كتابتها : $5+0=5$ وتعبر القيمة (0) عن فجوة معدومة.

نفس المبدأ يمكن تطبيقه على القيود من الشكل:

$$\boldsymbol{a_{ij}x_j}=\boldsymbol{b_i} \text{ و}$$

يجب إضافة إلى الطرف الأيسر متغير الفجوة (0Si).

ليصبح النموذج الخطي السابق على النحو التالي:

$$\left(\mathbf{Max} \text{ أو } \boldsymbol{Min}\right)\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{C_1x_1}+\boldsymbol{C_2x_2}+\cdots+\boldsymbol{C_nx_n}+\mathbf{0}\boldsymbol{S_1}+\mathbf{0}\boldsymbol{S_2}$$
$$\boldsymbol{a_{11}x_1}+\boldsymbol{a_{12}x_2}+\cdots+\boldsymbol{a_{1n}x_n}-\mathbf{1}\boldsymbol{S_1}=\boldsymbol{b_1}$$
$$\boldsymbol{a_{21}x_1}+\boldsymbol{a_{22}x_2}+\cdots+\boldsymbol{a_{2n}x_n}+\mathbf{0}\boldsymbol{S_2}=\boldsymbol{b_2}$$
$$\boldsymbol{x_1}\geq\mathbf{0},\boldsymbol{x_2}\geq\mathbf{0},\dots,\boldsymbol{x_n}\geq\mathbf{0}$$

نتبع ألان خطوات طريقة "**Simplex**" الأولى، تمثل معطيات البرنامج الخطي في جدول الحل الابتدائي كما يلي:

الحل	(متغيرات الفجوة) S_1 S_2	(متغيرات القرار) x_1 x_2 x_3 ... x_n	متغيرات دالة الهدف ⇨
b_i	معاملات متغيرات الفجوة في القيود لا تشكل مصفوفة الوحدة ⇓	معاملات متغيرات القيود الفنية ⇓	متغيرات الحل الابتدائي (قاعدة الحل) ⇓
b1 b2	$\begin{Bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	a_{11} a_{12} a_{13} ... a_{1n} a_{21} a_{22} a_{23} ... a_{2n}	S1 S2
0	0 0	$-C_1$ $-C_2$ $-C_3$ ... $-C_n$	معاملات متغيرات دالة الهدف ⇨

نلاحظ أن الحل الابتدائي هنا أيضا يتكون من متغيرات الفرق إلا أن عناصر هذا الحل في هذه الحالة لا تتوفر فيها شروط القبول، وذلك لأن معاملات هذه المتغيرات في القيود الفنية لا تشكل مصفوفة الوحدة (المعاملات أحادية سالبة أو مساوية لـ(0))، وهو من أهم شروط استخدام طريقة "**Simplex**"،وفي هذه الحالة لا نستطيع البحث عن حل أمثل للنموذج المطروح بالاعتماد على حل ابتدائي غير مقبول.

للتخلص من هذه المشكلة والحصول على حل ابتدائي مقبول، نلجأ إلى استعمال نوع جديد من المتغيرات التي نسميها المتغيرات الاصطناعية ونرمز لها بالرمز (F_i) ونضيفها إلى الطرف الأيسر من القيود الفنية التي تتسبب في مشكل عدم قبول الحل الابتدائي فقط (القيود من الشكل "=,≥" فقط)، حيث أن هذه المتغيرات (F_i) هي متغيرات وهمية ولا وجود لها في الواقع، نستعملها فقط من أجل تسهيل حل النموذج ثم نتخلص منها عند نهاية الحل.

إضافة المتغيرات (F_i) إلى القيود الفنية يتطلب منا أيضا إضافتها إلى دالة الهدف بمعاملات كبيرة نسميها (**M**) على النحو التالي:

- إضافة المتغيرات (F_i) بمعاملات (**M**–) إلى دالة الهدف في حالة تعظيم لدالة الهدف (**Max**).
- إضافة المتغيرات (F_i) بمعاملات (**M**+) إلى دالة الهدف في حالة تعظيم لدالة الهدف (**Max**).

على اعتبار أن (**M**) هو عدد كبيرة جدا يقترب من ما لانهاية، الأمر الذي أدى إلى تسمية هذه الطريقة **بطريقة (BIG_M)**.

عند إضافة المتغيرات الاصطناعية إلى القيود الفنية سوف نتمكن من الحصول على حل ابتدائي جديد، الذي يتكون من المتغيرات الاصطناعية ومتغيرات الفرق التي تكون معاملاتها في القيود الفنية في ما بينها مصفوفة أحادية على النحو التالي:

في حالة تعظيم دالة الهدف (**Max**)

$$Max\ Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n + 0S_1 + 0S_2(-)MF_1(-)MF_2$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - 1S_1 + F_1 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + 0S_2 + F_2 = b_2$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

وتمثل معطيات البرنامج الخطي في جدول الحل الابتدائي كما يلي:

متغيرات دالة الهدف ⇨	(متغيرات القرار) (متغيرات الفجوة) x_1 x_2 $x_3 \ldots x_n$ S_1 S_2	(متغيرات اصطناعية) F_1 F_2	الحل
متغيرات الحل الابتدائي (قاعدة الحل) ⇩	معاملات متغيرات القيود الفنية ⇩	معاملات المتغيرات الاصطناعية في القيود تشكل مصفوفة الوحدة ⇩	b_i
F_1	a_{11} a_{12} $a_{13} \ldots a_{1n}$ -1 0	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$	b1
F_2	a_{21} a_{22} $a_{23} \ldots a_{2n}$ 0 0		b2
معاملات متغيرات دالة الهدف ⇨	$-C_1 - C_2 - C_3 \ldots -C_n$ 0 0	$(-)M$ $(-)M$	$-MF_1 - MF_2$

في حالة تدنية دالة الهدف (**Min**)

$$Min\ Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n + 0S_1 + 0S_2(+)MF_1(+)MF_2$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - 1S_1 + F_1 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + 0S_2 + F_2 = b_2$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

وتمثل معطيات البرنامج الخطي في جدول الحل الابتدائي كما يلي:

متغيرات دالة الهدف ⇨	(متغيرات القرار) (متغيرات الفجوة) x_1 x_2 $x_3 \ldots x_n$ S_1 S_2	(متغيرات اصطناعية) F_1 F_2	الحل
متغيرات الحل الابتدائي (قاعدة الحل) ⇩	معاملات متغيرات القيود الفنية ⇩	معاملات المتغيرات الاصطناعية في القيود تشكل مصفوفة الوحدة ⇩	b_i
F_1	a_{11} a_{12} $a_{13} \ldots a_{1n}$ -1 0	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$	b1
F_2	a_{21} a_{22} $a_{23} \ldots a_{2n}$ 0 0		b2
معاملات متغيرات دالة الهدف ⇨	$-C_1 - C_2 - C_3 \ldots -C_n$ 0 0	$(+)M$ $(+)M$	$+MF_1 + MF_2$

ملاحظة: قيم عمود متغير الفجوة (S_2) كلها تساوي (0)، في هذه الحالة يمكن حذفه كليا من الجدول.

بعد التخلص من مشكلة مصفوفة الوحدة التي يجب أن تشكلها متغيرات قاعدة الحل لقبول جدول الحل الابتدائي، تظهر لنا مشكلة أخرى، وهي مشكلة معاملات متغيرات الاصطناعية في دالة الهدف (($-\mathbf{M}$، $-\mathbf{M}$) في حالة ($\mathbf{Max}$)، ($-\mathbf{M}$، $-\mathbf{M}$) في حالة ($\mathbf{Min}$))، وكذلك القيمة الموجودة في خانة قيمة دالة الهدف (($-\mathbf{MF_1}-\mathbf{MF_2}$) في حالة ($\mathbf{Max}$)، ($+\mathbf{MF_1}+\mathbf{MF_2}$) في حالة ($\mathbf{Min}$))، حيث نعلم انه من شروط الحل الابتدائي، يجب أن تكون معاملات متغيرات قاعدة الحل في دالة الهدف مساوية لـ (0)، وكذلك قيمة دالة الهدف يجب أن تساوي (0)، ولتجاوز هذه المشكلة يوجد طريقتين:

الطريقة الأولى: قبل تكوين جدول الحل الابتدائي نقوم بالخطوات التالية:

❖ وضع دالة الهدف تساوي القيمة ($(\boldsymbol{b_1}+\boldsymbol{b_2})*\boldsymbol{M}$) كمايلي:

- في حالة تعظيم دالة الهدف ($\mathbf{Max}$):

$$\boldsymbol{Max\ Z}=\boldsymbol{C_1x_1}+\boldsymbol{C_2x_2}+\cdots+\boldsymbol{C_nx_n}+\mathbf{0}\boldsymbol{S_1}+\mathbf{0}\boldsymbol{S_2}-\mathbf{MF_1}-\mathbf{MF_2}=(-(b_1+b_2)*M)$$

- في حالة تدنية دالة الهدف ($\mathbf{Min}$)

$$\boldsymbol{Min\ Z}=\boldsymbol{C_1x_1}+\boldsymbol{C_2x_2}+\cdots+\boldsymbol{C_nx_n}+\mathbf{0}\boldsymbol{S_1}+\mathbf{0}\boldsymbol{S_2}+\mathbf{MF_1}+\mathbf{MF_2}=((b_1+b_2)*M)$$

❖ كتابة القيود على الشكل:

$$\mathbf{F_1}=\boldsymbol{b_1}-(\boldsymbol{a_{11}x_1}+\boldsymbol{a_{12}x_2}+\cdots+\boldsymbol{a_{1n}x_n}-\mathbf{1}\boldsymbol{S_1})$$
$$\mathbf{F_2}=\boldsymbol{b_2}-(\boldsymbol{a_{21}x_1}+\boldsymbol{a_{22}x_2}+\cdots+\boldsymbol{a_{2n}x_n}+\mathbf{0}\boldsymbol{S_2}).$$

❖ تعويض ($\mathbf{F_1}$) و ($\mathbf{F_2}$) في دالة الهدف، ثم تشكيل جدول الحل الابتدائي حسب النتائج المحسوبة من تعويض ($\mathbf{F_1}$) و ($\mathbf{F_2}$) في دالة الهدف.

الطريقة الثانية:

❖ تشكيل جدول الحل الابتدائي بشكل عادي مع وضع في خانة الحل الأمثل قيمة ($-(b_1+b_2)*M$) في حالة ($\mathbf{Max}$)، و($+(b_1+b_2)*M$) في حالة ($\mathbf{Min}$).

❖ نضرب الصفوف التي تحتوي على ($\mathbf{Fi}$) في ($\mathbf{M+}$) في حالة ($\mathbf{Max}$)، و ($\mathbf{M-}$) في حالة ($\mathbf{Min}$)، وجمع مجموعهم مع معاملات متغيرات دالة الهدف.

مهما كانت الطريقة المستعملة فإننا نحصل في الأخير جدول الحل الابتدائي تتوفر فيه كل شروط القبول.

الحل	(متغيرات اصطناعية) F_1 F_2	(متغيرات الفجوة) S_1 (متغيرات القرار) x_1 x_2 x_3 ... x_n	متغيرات دالة الهدف ⇨
b_i	معاملات المتغيرات الاصطناعية في القيود تشكل مصفوفة الوحدة ⇩	معاملات متغيرات القيود الفنية ⇩	متغيرات الحل الابتدائي (قاعدة الحل) ⇩
b1 b2	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$	a_{11} a_{12} a_{13} ... a_{1n} -1 a_{21} a_{22} a_{23} ... a_{2n} 0	F_1 F_2
0.	0 0	C_1 C_2 C_3 ... C_n 0 d_1M d_2M d_3M ... d_4M $(\mp m)$	ضرب معاملات متغيرات دالة الهدف في (−) ⇨

3- مرحلة البحث عن الحل الأمثل: بعد تكوين جدول الحل الابتدائي، نتبع في هذه المرحلة نفس خطوات طريقة "**Simplex**" السابقة (في حالة القيود من شكل "≤").

مثال 1: حل البرنامج الخطي التالي:

$$Min\ Z = 3x_1 + x_2 + 5x_3$$
$$6x_1 + 0x_2 + 4x_3 \geq 4$$
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2$$
$$3x_1 + 6x_2 + 0x_3 \leq 9$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الحل:

❖ تحويل المتباينات إلى معادلات مع إضافة متغيرات الفجوة والمتغيرات الاصطناعية:

$$Min\ Z = 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 0S_1 + 0S_2 + MF_1 + MF_2$$
$$6x_1 + 0x_2 + 4x_3 - S_1 + F_1 = 4$$
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 0S_2 + F_2 = 2$$
$$3x_1 + 6x_2 + 0x_3 + S_3 = 9$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

❖ **الطريقة الأولى لتكوين جدول الحل الابتدائي**:

$$F_1 = 4 - 6x_1 - 4x_3 + S_1$$
$$F_2 = 2 - 2x_1 - 2x_2 - 2x_3$$

بوضع دالة الهدف تساوي $\big((4+2)M\big)$، وتعويض (F_1) و(F_2) في دالة الهدف:

$$3x_1 + x_2 + 5x_3 + M(4 - 6x_1 - 4x_3 + S_1) + M(2 - 2x_1 - 2x_2 - 2x_3) = 6M$$

$$\leftrightarrow 3x_1 + x_2 + 5x_3 + M(4) - 6M(x_1) - 4M(x_3) + M(S_1) + M(2) - 2M(x_1) - 2M(x_2) - 2M(x_3) = 6M$$

$$\leftrightarrow (3 - 6M - 2M)x_1 + (1 - 2M)x + (5 - 4M - 2M)x + M(S) + (2 + 4)M = 6M$$
$$\leftrightarrow (3 - 8M)x_1 + (1 - 2M)x_2 + (5 - 6M)x_3 + M(S) + \cancel{(6)M} = \cancel{6M}$$
$$\leftrightarrow (3 - 8M)x_1 + (1 - 2M)x_2 + (5 - 6M)x_3 + M(S) = 0$$

تصبح دالة الهادف والبرنامج الخطي كله من الشكل:

$$Min\ Z = (3 - 8M)x_1 + (1 - 2M)x_2 + (5 - 6M)x_3 + M(S)$$
$$6x_1 + 0x_2 + 4x_3 - S_1 + F_1 = 4$$
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 0S_2 + F_2 = 2$$
$$3x_1 + 6x_2 + 0x_3 + S_3 = 9$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

جدول الحل الابتدائي

	x_1	x_2	x_3	S_1	F_1	F_2	S_3	الحل
F_1	**6**	**0**	**4**	**−1**	**1**	**0**	**0**	4
F_2	**2**	**2**	**2**	**0**	**0**	**1**	**0**	2
S_3	**3**	**6**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	9
Z (−)*	**−3 +8M**	**−1 +2M**	**−5 +6M**	**−M**	**0**	**0**	**0**	**0**

الطريقة الثانية لتكوين جدول الحل الابتدائي:

$$Min\ Z = 3x_1 + x_2 + 5x_3 + MF_1 + MF_2$$
$$6x_1 + 0x_2 + 4x_3 - S_1 + F_1 = 4$$
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 0S_2 + F_2 = 2$$
$$3x_1 + 6x_2 + 0x_3 + S_3 = 9$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

جدول الحل الابتدائي

		x_1	x_2	x_3	S_1	F_1	F_2	S_3	الحل
-M	F_1	6	0	4	-1	1	0	0	4
-M	F_2	2	2	2	0	0	1	0	2
	S_3	3	6	0	0	0	0	1	9
	Z $(-)^*$	-3 $+8M$	-1 $+2M$	-5 $+6M$	$-M$	$\cancel{+M}$ $\cancel{-M}$ 0	$\cancel{+M}$ $\cancel{-M}$ 0	$\cancel{+M}$ $\cancel{-M}$ 0	$\cancel{6M}$ $\cancel{-6M}$ 0

❖ **مرحلة البحث عن الحل الأمثل:** إتباع نفس خطوات "**simplex**" المعروفة:

pivot

جدول الحل الابتدائي

	x_1	x_2	x_3	S_1	F_1	F_2	S_3	الحل	
F_1	6	0	4	-1	1	0	0	4	$4/(6)$.
F_2	2	2	2	0	0	1	0	2	$2/(2)$.
S_3	3	6	0	0	0	0	1	9	$9/(3)$.
Z $(-)^*$	-3 $+8M$	-1 $+2M$	-5 $+6M$	$-M$.	0	0	0	0	

– **المحاولة الأولى:**

– من اجل ملء قيم الصف الأول (x_1) نقسم قيم صف المتغير الخارج في الجدول أعلاه على قيمة الـ"pivot".

– من اجل ملء الصف الثاني (F_2) نضرب الصف الذي ينتمي إليه (x_1) في الجدول الجديد في (-2) ونجمع النتيجة مع قيم الصف الذي ينتمي إليه (F_2) في الجدول السابق.

– من اجل ملء الصف الثالث (S_3) نضرب الصف الذي ينتمي إليه (x_1) في الجدول الجديد في (-3) ونجمع النتيجة مع قيم الصف الذي ينتمي إليه (S_3) في الجدول السابق.

– من اجل ملء صف الرابع والأخير (دالة الهدف) نضرب الصف الذي ينتمي إليه (x_1) في الجدول الجديد في (3-8M) ونجمع النتيجة مع قيم صف دالة الهدف في الجدول السابق.

جدول المحاولة الأولى

pivot

		x_1	x_2	x_3	S_1	F_1	F_2	S_3	الحل	
-2 -3 3-8M	x_1	**1**	**0**	**4/6**	**−1/6**	.	**0**	**0**	**2/3**	$\cancel{\frac{2}{3}/(0)}$.
⇦	F_2	**0**	**2**	**2/3**	**1/3**	.	**1**	**0**	**2/3**	$\frac{2}{3}/(2)$.
	S_3	**0**	**6**	**−2**	**1/2**	.	**0**	**1**	**7**	$7/(6)$.
	Z	**0**	$-1+2M$	$-3+2/3M$	$-1/2+1/3M$.	.	**0**	**0**.	2– 8/3M	

بما أن دالة الهدف (Min) ، فإننا نتوقف في حالة كل معاملات دالة الهدف غير موجبة (سالبة أو تساوي (0)، منه نستنتج أن جدول المحاولة الأولى ليس جدول الحل الأمثل.

-المحاولة الثانية

- من اجل ملء قيم الصف الثاني (x_2) نقسم قيم صف المتغير الخارج في الجدول أعلاه على قيمة الـ"pivot".
- من اجل ملء الصف الأول (x_1) نضرب الصف الذي ينتمي إليه (x_2) في الجدول الجديد في (0) ونجمع النتيجة مع قيم الصف الذي ينتمي إليه (x_1) في الجدول السابق.
- من اجل ملء الصف الثالث (S_3) نضرب الصف الذي ينتمي إليه (x_2) في الجدول الجديد في (6–) ونجمع النتيجة مع قيم الصف الذي ينتمي إليه (S_3) في الجدول السابق.
- من اجل ملء صف الرابع والأخير (دالة الهدف) نضرب الصف الذي ينتمي إليه (x_2) في الجدول الجديد في (1-2M) ونجمع النتيجة مع قيم صف دالة الهدف في الجدول السابق.

جدول المحاولة الثانية

		x_1	x_2	x_3	S_1	F_1	F_2	S_3	الحل
	x_1	**1**	**0**	**4/6**	**−1/6**	.	.	**0**	2/3
0 -6 1-2M	x_2	**0**	**1**	**1/3**	**1/6**	.	.	**0**	1/3
	S_3	**0**	**0**	**−4**	**−1**	.	.	**1**	5
	Z	**0**	**0**	**−8/3**	**−1/3**	.	.	**0**	**7/3–** **~~10/3M~~**

ملاحظة1: عند إخراج أي متغير اصطناعي يمكن عدم حساب معاملته في كل صف، إلا في حالة مراد معرفة حل البرنامج الثنائي (المرافق) الذي سنتطرق له في الفصل القادم، فيجب حساب معاملات المتغيرات الاصطناعية.

من جدول المحاولة الثانية أن جميع معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف أصبحت كلها غير موجبة، ومنه يمكن القول أن جدول المحاولة الثانية هو جدول الحل الأمثل:

$x_1 = 2/3$ $\quad$ $x_2 = 1/3$ $\quad$ $x_3 = 0$(لا يظهر في قاعدة الحل) $\quad$ $Min\ Z = 7/3$

ملاحظة2: بما أن (M) معامل المتغيرات الاصطناعية التي تم إضافتها لمساعدتنا في إيجاد الحل الأمثل، يجب حذفها في جدول الحل الأمثل.

مثال 2:

$$Max\ Z = 4x_1 + 6x_2 - 10x_3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$
$$4x_1 - 10x_2 + 2x_3 \geq 20$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الحل:

- تكوين جدول الحل الابتدائي باستعمال الطريقة الثانية:

$$Max\ Z = 4x_1 + 6x_2 - 10x_3 + MF_1 + MF_2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + F_1 = 7$$
$$4x_1 - 10x_2 + 2x_3 - S_2 + F_2 = 20$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

جدول الحل الابتدائي

		x_1	x_2	x_3	S_2	F_1	F_2	الحل	
+M	F_1	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**7**	7/(1)
+M	F_2	**4**	**− 10**	**2**	**− 1**	**0**	**1**	**20**	20/(4)
	Z (−)*	-4 $-5M$	-6 $+9M$	$+10$ $-3M$	$+M$	**0**	**0**	**0**	

جدول المحاولة الأولى

		x_1	x_2	x_3	S_2	F_1	F_2	الحل	
	F_1	**0**	**7/2**	**1/2**	**1/4**	**1**	.	**2**	$2/(\frac{7}{2})$
(-1) (4+5M)	X_1	**1**	**− 5/2**	**1/2**	**− 1/4**	**0**	.	**5**	$\cancel{2/(-\frac{5}{2})}$
	Z (−)*	**0**	-16 $-7/2M$	12 $-1/2M$	$-1/4M$	**0**	.	**20+ 25M**	

جدول المحاولة الثانية

		x_1	x_2	x_3	S_2	F_1	F_2	الحل
(5/2) $(16+\frac{7}{2}M)$	x_2	0	1	1/7	1/14	.	.	4/7
	x_1	1	0	6/7	− 1/14	.	.	45/7
	Z (−)*	0	0	100/7	8/7	.	.	204/7+ ~~27M~~

من جدول المحاولة الثانية نلاحظ أن جميع معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف أصبحت كلها غير سالبة، ومنه يمكن القول أن جدول المحاولة الثانية هو جدول الحل الأمثل:

$$\boldsymbol{x_1 = 4/7} \qquad \boldsymbol{x_2 = 45/7} \qquad \boldsymbol{x_3 = 0} \qquad \boldsymbol{Min\ Z = 204/7}$$

المطلب الثالث: الحالات الخاصة لحل مسالة البرمجة الخطية بطريقة "simplex".

بما أن طريقة "simplex" عبارة عن تعميم للطريقة البيانية في حل البرامج الخطية، فانه ستواجهنا حالات خاصة غير الحالة العادية التي تطرقنا لها سابقا والتي نلخصها مع إعطاء نفس الأمثل للحالات الخاصة باستعمال الطرقة البيانية كما يلي:

أولا: حالة وجود حل غير محدود.

إذا لاحظنا في جدول من جداول الحل بواسطة طريقة "simplex" انه تم التعرف على المتغير الداخل ولم نستطع تحديد المتغير الخارج، فان يمكن القول أننا أمام حالة حل غير محدود، بمعنى آخر أن عمود معاملات المتغير الذي يجب أن يدخل إلى قاعدة الحل معاملات هذا المتغير في القيود الفنية أصبحت كلها سالبة أو تساوي (0) فهذا يعني أن الحل الأمثل غير محدود.

مثال:

$$Max\ Z = 2x_1 + 4x_2$$
$$8x_1 + 10x_2 \geq 80$$
$$-2x_1 + 4x_2 \leq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

جدول الحل الابتدائي.

	x_1	x_2	S_1	F_1	S_2	الحل	
F_2	8	10	− 1	1	0	80	80/10
S_2	−2	4	0	0	1	8	8/(4)
Z (−)*	−2 $-8M$	− 4 $-10M$	 $+M$	0	0	0	

جدول المحاول الأولى.

	x_1	x_2	S_1	F_1	S_2	الحل	
F_2	**13**	**0**	**− 1**	**1**	**− 1/5**	**60**	$60/(13)$.
x_2	**−1/2**	**1**	**0**	**0**	**1/4**	**2**	~~$.8/(-\frac{1}{2})$~~
Z $(-)^*$	**−4** $-13M$	**0**	. $+M$.	**0**	**1.** **5/2M.**	**8+20M**	

-10 4+10M

جدول الحل الابتدائي

	x_1	x_2	S_1	F_1	S_2	الحل
x_1	**1**	**0**	$-\frac{1}{13}$	.	$-\frac{5}{26}$	**60/13**
x_2	**0**	**1**	**− 1/26**	.	$\frac{2}{13}$	**56/13**
Z $(-)^*$	**0**	**0**	**−4/13**	.	**0**	**26+83M**

المتغير الداخل (S_1)، وعند البحث عن المتغير الخارج بقسمة (b_i/a_{ij}) نلاحظ معاملات العمود الذي ينتمي إليه (S_1) غير موجبة (حالة وجود حل امثل غير محدود).

ثانيا: حالة عدم وجود حل امثل (غير قابلة للحل).

يمكن اكتشاف هذه الحالة أذا تم الوصول لجدول الحل الأمثل ومازال في قاعدة الحل لجدول الحل الأمثل متغير اصطناعي أو أكثر.

مثال:

$$Max\ Z = 7x_1 + 3x_2$$
$$4x_1 - 4x_2 \leq 8$$
$$-3x_1 + x_2 \geq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

جدول الحل الابتدائي.

	x_1	x_2	S_2	S_1	F_2	الحل	
S_1	**4**	**− 4**	**0**	**1**	**0**	**8**	**8/4**
F_2	**−3**	**1**	**− 1**	**0**	**1**	**3**	~~**3/(−3)**~~
Z $(-)^*$	**−7** $-M$	**− 3** $+3M$	$+M$	**0**	**0**	**0**	

جدول المحاولة الأولى.

		x_1	x_2	S_2	S_1	F_2	الحل
+3 $\quad 7+M$	x_1	**1**	**− 1**	**0**	$\frac{1}{4}$	**0**	**2**
	F_2	**0**	**2**	**− 1**	$\frac{3}{4}$	**1**	**9**
	Z $(-)^*$	**0**	-10 $+2M$	$+M$	$\frac{7}{4}+\frac{M}{4}$	**0**	**14+2M**

❖ وصول إلى جدول الحل الأمثل مع بقاء (F_i) في قاعدة الحل↔ لا يوجد حل لهذا البرنامج الخطي.

ثالثا: حالة وجود عدة حلول مثلى تعطينا نفس نتائج دالة الهدف.

كما رأينا في الطريقة البيانية أن هناك بعض البرامج الخطية لها أكثر من حل واحد، وعند استعمال طريقة "simplex" في حل هذه الفئة من المسائل، نلاحظ أنه في محاولة من المحاولات نوجد أننا قد توصلنا إلى الحل الأمثل، ولكن بالرغم من ذلك لو أدخلنا متغير غير موجود في قاعدة الحل الأمثل، ويكون معامله في صف معاملات دالة الهدف يساوي (0)، فإننا نسجل أنه لا يزيد ولا ينقص في الحل المتوصل إليه (أي أن النتيجة تبقى نفسها التي حصلنا عليها في الحل السابق)، وبالتالي فإن هذا الحل الناتج عن إدخال هذا المتغير هو أيضا حل أمثل مساوي للحل السابق.

مثال:

$$Max\ Z = 3x_1 + 5x_2$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$6x_1 + 10x_2 \leq 30$$
$$x_2 \geq 1$$
$$x_1 \geq 0$$

جدول المحاولة الأولى.

	x_1	x_2	S_3	S_1	S_2	F_3	الحل	
S_1	**4**	**2**	**0**	**1**	**0**	**0**	**10**	.10/2
S_2	**6**	**10**	**0**	**0**	**1**	**0**	**30**	.30/10
F_3	**0**	**1**	**− 1**	**0**	**0**	**1**	**1**	1/1.
Z $(-)^*$	-3 $0M$	-5 $-M$	$+M$	**0**	**0**	**0**	**0**	

-2 -10 5+M

	x_1	x_2	S_3	S_1	S_2	F_3	الحل	
S_1	4	0	2	1	0	.	8	8/2.
S_2	6	0	10	0	1	.	20	20/10.
x_2	0	1	−1	0	0	.	1	.$\cancel{1/-1}$
Z	−3	0	−5	0	0	..	5+M	

-2 +1 +5

	x_1	x_2	S_3	S_1	S_2	F_3	الحل	
S_1	14/5	0	0	1	−1/5	.	4	$4/(\frac{14}{5})$.
S_3	3/5	0	1	0	1/10	.	2	.$2/(\frac{3}{5})$
x_2	3/5	1	0	0	0	.	3	.$3/(\frac{3}{5})$
Z	0	0	0	0	1/2	.	15+M	

- نلاحظ أننا قد وصلنا إلى جدول الحل الأمثل:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 3.$$
$$Max\ Z = 15.$$

لكن يمكن أن نجد حل امثل أخر، بإدخال ($x1$) ومعامله يساوي (0) إلى قاعد الحل:

$-\frac{3}{5}$ $-\frac{3}{5}$ 0

	x_1	x_2	S_3	S_1	S_2	F_3	الحل
x_1	1	0	0	5/14	−1/14	.	10/7
S_3	0	0	1	−3/14	1/7	.	8/7
x_2	0	1	0	−3/14	3/70	.	15/7
Z	0	0	0	0	1/2	.	15+M

- الحل الأمثل الثاني:

$$x_1 = 10/7 \qquad x_2 = 15/7$$
$$Max\ Z = 15$$

رابعا: حالة عدم انتظام (وجود قيد زائد).

حالة عدم الانتظام نلاحظها في طريقة "simplex" عند التعرف على المتغير الخارج وبعد ذلك عند قسمة (b_i/a_{ij}) تكون أصغر قيمة غير سالبة من القيم التي نعتمدها ليست وحيدة، أي تساوي على الأقل قيمتين. ولحل هذه المشكلة سنقوم عشوائيا بإخراج أي من المتغيرات الذين تقابلهم القيم الصغيرة المتساوية، ونواصل المحاولات حتى نصل إلى حل أمثل معين، ثم نقوم بعدها بإخراج المتغير الآخر عند النقطة التي ظهرت فيها حالة عدم الانتظام ونحاول مرة أخرى، وهكذا حتى يتم أخراج كل المتغيرات ذات القيم المتساوية، وهنا تواجهنا حالتين:

- إما أن نجد في كل المحاولات، الحل الأمثل متساوي.
- إما أن نجد في كل المحاولات، على الأقل حلين غير متساوي، هنا نقارن بين الحلول المثلى ونأخذ أحسنهم.

مثال1:

$$Max\ Z = 4x_1 + 5x_2$$
$$2x_1 + 1x_2 \le 5$$
$$-4x_1 + 2x_2 \le 8$$
$$3x_1 + 3x_2 \le 15$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

جدول الحل الابتدائي

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	الحل	
S_1	2	1	1	0	0	5	$\frac{5}{1} = 5.$
S_2	−4	1	0	1	0	8	$\frac{8}{1} = 8$
S_3	3	3	0	0	1	15	$\frac{15}{3} = 5.$
Z	−4	− 5	0	0	0.	0	

المتغير الداخل (x_2) المتغير الخارج (S_1) أو (S_2):

نختر عشوائيا متغير، وليكن على سبيل المثال المتغير الخارج (S_1):

جدول المحاولة الأولى بعد إخراج (S_1)

				x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	الحل
-1	-3	5	x_2	2	1	1	0	0	5
			S_2	−6	0	−1	1	0	3
			S_3	−3	0	0	0	1	0
			Z	6	0	5	0	0	25

نعود للجدول الأول ونقوم بإخراج (S_2):

جدول المحاولة الأولى بعد إخراج (S_2)

		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	الحل
	S_1	**1**	**0**	**1**	**0**	**− 1/3**	**0**
	S_2	**−5**	**0**	**0**	**1**	**− 1/3**	**3**
-1 -1 5	x_2	**1**	**1**	**0**	**0**	**1/3**	**5**
	Z	**+1**	**0**	**0**	**0**	**5/3**	**25**

الحل الأمثل في المحاولتين متساوي:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 5 \qquad Max\,Z = 25$$

سلسلة تمارين:

حل باستعمال طريقة "simplex" البرامج الخطية التالية مع اكتشاف الحالات الخاصة إن وجدت:

1/

$$Max\ Z = 10x_1 + 2x_2 + 12x_3 + 4x_4.$$
$$8x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 2x_4 \leq 88.$$
$$16x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 6x_4 \leq 72.$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

2/

$$Max\ Z = 6x_1 + 10x_2 + 3x_3$$
$$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 15$$
$$4x_1 + 8x_2 + 12x_3 \leq 16$$
$$2x_1 + 2x_2 + 8x_3 \leq 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

3/

$$Max\ Z = 4x_1 + 5x_2$$
$$x_1 + x_2 \geq 80$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 75$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

4/

$$Max\ Z = x_1 + x_2$$
$$2x_1 + 1x_2 \leq 8$$
$$1x_1 + 3x_2 \leq 9$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

5/

$$Max\ Z = 2x_1 - 8x_2 + 10x_3$$
$$6x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 12$$
$$4x_1 - 4x_2 - 4x_3 \leq 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

6/

$$Min\ Z = 4x_1 + 18x_2 + 2x_3$$
$$2x_1 + 6x_3 \leq 14$$
$$x_1 + 17x_2 + 15x_3 \geq 25$$
$$6x_1 + 6x_2 + 21x_3 \geq 30$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

7/

$$Min\ Z = 6x_1 + 2x_2 + 10x_3$$
$$9x_1 + 6x_3 \geq 6$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 16$$
$$4x_1 + 8x_2 \leq 12$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

8/

$$Min\ Z = 6x_1 + 20x_2$$
$$5x_1 + 6x_2 \geq 10$$
$$2x_1 + 7x_2 \geq 14$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

9/

$$Max\ Z = 10x_1 + 25x_2$$
$$x_1 \leq 200$$
$$x_1 \leq 150$$
$$x_1 + x_2 = 300$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

10/

$$Max\ Z = 3x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$-10x_1 + 30x_3 \geq 10$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 6$$
$$10x_1 + 20x_2 - 10x_3 \leq 20$$
$$x_1, x_2, x_3$$