تعتبر طريقة الرسم البياني طريقة سهلة وبسيطة وواضحة في معالجة مشاكل البرمجة الخطية خاصة تلك المشاكل التي لا يزيد فيها عدد المتغيرات عن اثنين فقط والتي تحتوي على عدد بسيط من القيود. كما تفيد طريقة الرسم البياني كمقدمة لدراسة طرق وأساليب أخرى أكثر تعقيدا في حل مشاكل البرمجة الخطية مثل "simplex".

المطلب الأول: خطوات استخدام الطريقة البيانية في حل مسائل البرمجة الخطية.

عند استخدام الطريقة البيانية يجب إتباع الخطوات التالية:

1- رسم معلم متعامد ومن الأحسن أن يكون متجانس: نسمي المحور الأفقي بـ (X1) والمحو العمودي بـ (X2)؛

2- تحويل كل المتباينات ($\geq$، $\leq$) إلى معادلات (=)؛

3- تحديد نقطتين لكل مستقيم، حيث كل مستقيم يمثل معادلة (قيد)، بفرض في كل معادلة مرة (X1=0) وحساب (X2)، ومرة أخرى (X2=0) وحساب (X1)، ومن اجل ذلك يفضل رسم جدول صغير توضع فيه القيم المفروضة والمحسوبة على النحو التالي:

	X1	X2
المعادلة (القيد) رقم (1)	0	حساب (x2)
	حساب (x1)	0
المعادلة (القيد) رقم (2)	0	حساب (x2)
	حساب (x1)	0
	⋮	⋮
المعادلة (القيد) رقم (m)	0	حساب (x2)
	حساب (x1)	0
	X1=bi/aij	
	X2=bi/aij	

في حالة القيود من الشكل:

$a_{ij}x_1(\leq$ او $\geq)bi.$

Dr.merwan haid

4- رسم المستقيمات المعبرة عن المعادلات (القيود فقط) وتضليل منطقة الحلول لكل معادلة على النحو التالي:

- إذا كان القيد (اكبر أو تساوي)($\geq$) فتضلل المنطقة الموجودة فوق المستقيم المرسوم؛
- إذا كان القيد (اصغر أو تساوي)($\leq$) فتضلل المنطقة الموجودة تحت المستقيم المرسوم؛
- إذا كان القيد (تساوي)(=) فيضلل المستقيم المرسوم فقط لاعتبار النقاط الموجودة عليه فقط هي الحل للمعادلة؛

5- تعيين منطقة الحلول الممكنة، ويعبر عنها بالمنطقة المشتركة بين كل المناطق المضللة للمستقيمات المرسومة.

6- تعيين أقصى (أطراف) النقاط الموجودة على منطقة الحلول الممكنة بوضع حروف لاتينية عليها (A...Z)، والتي تعبر عن النقاط المرشحة أن تكون حلا لتحقيق دالة الهدف.

7- إيجاد الحل للمشكلة المطروحة وذلك من خلال الطريقتين التاليتين:

الطريقة الأولى: حساب إحداثيات كل النقاط المعينة في المرحلة (6) وتعويضها في دالة الهدف حيث:

-إذا كانت دالة الهدف (Max) فالحل هو إحداثيات النقطة التي أعطت اكبر قيمة عند تعويضها في دالة الهدف.

-إذا كانت دالة الهدف (Min) فالحل هو إحداثيات النقطة التي أعطت اقل قيمة عند تعويضها في دالة الهدف.

ملاحظة: يمكن حساب إحداثيات النقاط، بحل جملة معادلتين للمستقيمين اللذان يتقاطعا في النقطة المراد حساب إحداثيتها.

الطريقة الثانية: رسم مستقيم يمثل دالة الهدف، وذلك بجعل دالة الهدف تساوي أي قيمة، ولتسهيل الحسابات نجعل دالة الهدف تساوي قيمة جداء معاملات (X_1، X_2) في دالة الهدف، ثم نقوم بتعويض (X_1=0) وحساب (X_2)، ومرة أخرى (X_2=0) وحساب (X_1)، ومن اجل ذلك يفضل رسم جدول صغير توضع فيه القيم على النحو التالي:

X2	X1
C1	0
0	C2

حيث: C1 هو معامل X1 في دالة الهدف، وC2 هو معامل X2 في دالة الهدف.

بعد رسم المستقيم الذي يمثل دالة الهدف، نحدد كل المستقيمات التي توازي مستقيم دالة الهدف، ثم إيجاد النقطة التي تمثل حل للمشكلة، على النحو التالي:

-إذا كانت دالة الهدف (Max) فالحل هو إحداثيات **آخر** نقطة تقاطعت فيها منطقة الحلول الممكنة مع احد المستقيمات الموازية لمستقيم دالة الهدف.

- إذا كانت دالة الهدف (Min) فالحل هو إحداثيات **أول** نقطة تقاطعت فيها منطقة الحلول الممكنة مع احد المستقيمات الموازية للدالة الهدف.

ملاحظة (1): يمكن حساب إحداثيات النقطة التي تعتبر حل للمشكلة المطروحة، بحل جملة معادلتين للمستقيمين اللذان يتقاطعا في النقطة المراد حساب إحداثيتها.

ملاحظة (2): يمكن تحديد المستقيمات التي توازي مستقيم دالة الهدف دون رسم هذه المستقيمات بوضع مسطرة بشكل موازي لمستقيم دالة الهدف، وسحبها من النقطة ذات الإحداثيات (0،0) في اتجاه القيم الموجبة.

مثال 1: ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$Max\ Z = 4x_1 + 7x_2$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 16$$
$$5x_1 + 6x_2 \leq 30$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

المطلوب: حل البرنامج الخطي باستخدام الطريقة البيانية.

Dr.merwan n.d

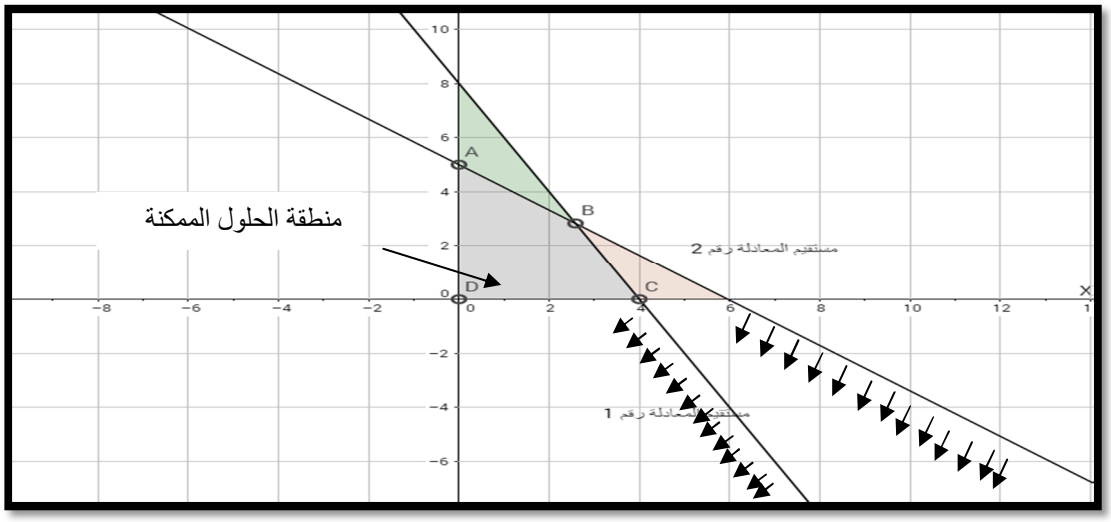
الحل:

1- تحويل القيود إلى معادلات وحساب إحداثيات (x1، x2) الموجودة على كل مستقيم الممثل لكل معادلة.

$$4x_1 + 2x_2 = 16 \dots (1)$$
$$5x_1 + 6x_2 = 30 \dots (2)$$

X2	X1
8	0
0	4
5	0
0	6

2- رسم المستقيمات وتحديد منطقة الحلول الممكنة.



3- حساب الحل الأمثل.

الطريقة الأولى:

- إحداثيات النقطة (A): (x_1=0، x_2=5)
- إحداثيات النقطة (B): (x_1=$\frac{18}{7}$، x_2=$\frac{20}{7}$) بعد حل جملة معادلتين:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 16 \dots (1) \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 \dots (2) \end{cases}$$

- ضرب المعادلة (1) في (3)

$$\begin{cases} 12x_1 + 6x_2 = 48 \dots (3) \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 \dots (4). \end{cases}$$

- طرح المعادلة (3) من المعادلة (4):

$$7x_1 + 0x_2 = 18 \dots (5)$$

$$x_1 = \frac{18}{7} = 2.58$$

- تعويض (x_1) في أي معادلة من المعادلات السابقة نجد:

$$x_2 = \frac{20}{7} = 2$$

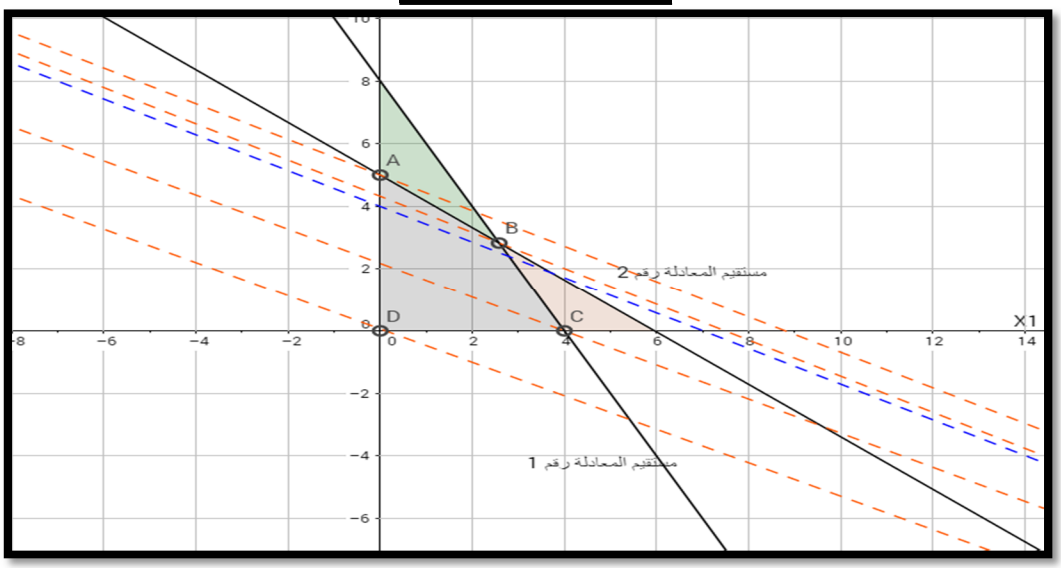
- ❖ إحداثيات النقطة (C): (x_1=4، x_2=0).
- ❖ إحداثيات النقطة (D): (x_1=0، x_2=0).
- ❖ بعد تعويض إحداثيات النقاط الأربعة (A، B،C،D) في دالة الهدف وجدت النتائج على النحو التالي: (A):(Max Z=35)، (B):(Max Z=$\frac{212}{7}$ = 30.28)، (C):(Max Z=16)، (D):(Max Z=0).
- ❖ بما أن دالة الهدف عبارة عن (تعظيم) (Max) فان الحل الأمثل هي النقطة التي أعطت عند تعويض إحداثياتها في دالة الهدف اكبر قيمة ممكنة (**الحل الأمثل هي النقطة (A) ذات الإحداثيات (x_1=0، x_2=5)**).

الطريقة الثانية:

- ❖ رسم مستقيم دالة الهدف، من اجل ذالك نضع دالة الهدف تساوي (4*7) = 28

$$4x_1 + 7x_2 = 28$$

X_2	X_1
4	0
0	7



- ❖ بما أن دالة الهدف (Max) فالحل هو إحداثيات **آخر** نقطة تقاطعت فيها منطقة الحلول الممكنة مع احد المستقيمات الموازية لمستقيم دالة الهدف (**الحل الأمثل هي النقطة (A) ذات الإحداثيات (x_1=0، x_2=5)**).

(A):(Max Z=35)

مثال 2: نفس مطلوب المثال (1).

$$Min\ Z = 4x_1 + 6x_2$$
$$2x_1 + 2x_2 \leq 8$$
$$12x_1 + 4x_2 \geq 16$$
$$2x_1 + 10x_2 \geq 8$$
$$x_2 \leq 2$$
$$x_1 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

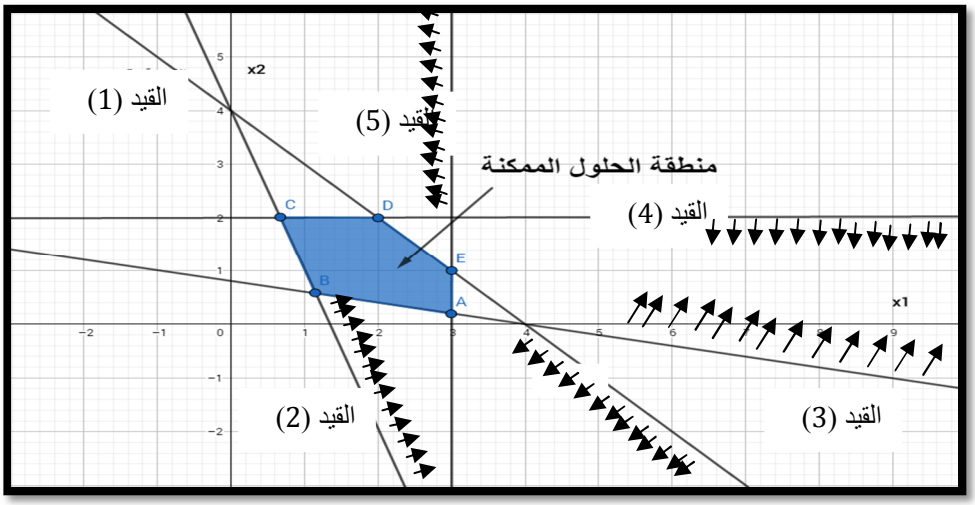
1- تحويل القيود إلى معادلات وحساب إحداثيات (x_2 ،x_1) الموجودة على كل مستقيم الممثل لكل معادلة.

$$2x_1 + 2x_2 = 8 \dots (1)$$
$$12x_1 + 4x_2 = 16 \dots (2)$$
$$2x_1 + 10x_2 = 8 \dots (3)$$
$$x_2 = 2 \dots (4)$$
$$x_1 = 3 \dots (5)$$

X2	X1
4	0
0	4
4	0
0	$4/3$
$4/5$	0
0	4
$X_2=2$	
$X_1=3$	

Dr.merwan haid

2- رسم المستقيمات وتحديد منطقة الحلول الممكنة.

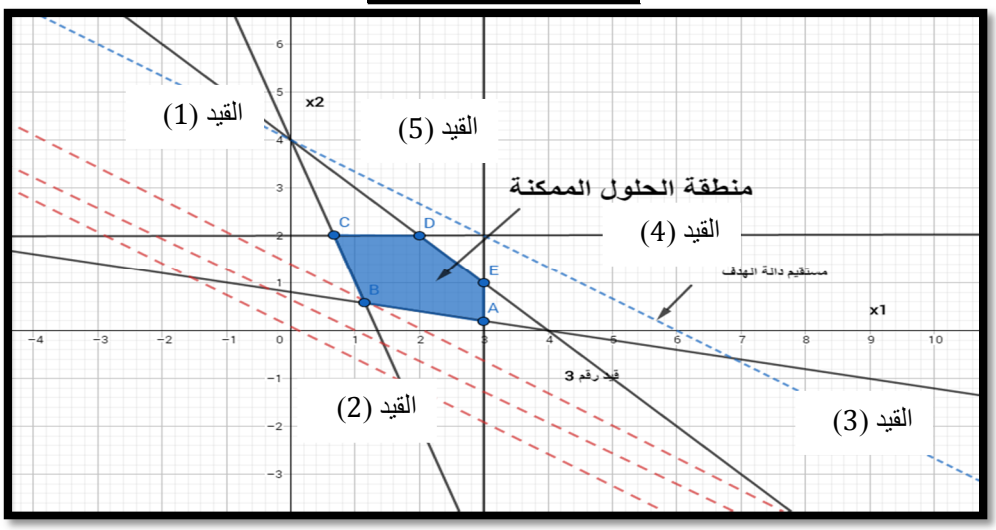


3- حساب الحل الأمثل باستخدام الطريقة الثانية.

❖ رسم مستقيم دالة الهدف، من اجل ذالك نضع دالة الهدف تساوي (4*6) = 24.

$$4x_1 + 6x_2 = 24$$

X2	X1
4	0
0	6



❖ بما أن دالة الهدف (Min) فالحل هو إحداثيات أول نقطة تقاطعت فيها منطقة الحلول الممكنة مع احد المستقيمات الموازية لمستقيم دالة الهدف (**الحل الأمثل هي النقطة (B)، ويمكن إيجاد إحداثيتها بحل جملة معادلتين (2) مع (3)**).

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 = 16 \dots (2) \\ 2x_1 + 10x_2 = 8 \dots (3) \end{cases}$$

- ضرب المعادلة (3) في القيمة(6)

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 = 16 \dots (3) \\ 12x_1 + 60x_2 = 48 \dots (4) \end{cases}$$

- طرح المعادلة (4) من المعادلة (3):

$$0x_1 + 56x_2 = 32 \dots (5)$$
$$x_2 = \frac{4}{7} = 0.57$$

- تعويض (x_2) في أي معادلة من المعادلات السابقة نجد:

$$x_1 = \frac{8}{7} = 1.14$$

- تعويض (x1، x2) في دالة الهدف:

$$\boldsymbol{Max\ Z = {}^{53}/_{7} = 7.57}$$

Dr.merw

المطلب الثاني: الحالات الخاصة لحل مسالة البرمجة الخطية بيانيا.

لقد عرضنا سابقا استعمال طريقة البيانية في حل مسائل البرمجة الخطية في الحالة العادية، ولكن في بعض المسائل يمكن أن نصادف حالات خاصة أكثر تعقيدا، ولا يمكن حلها بإتباع القواعد العامة لطريقة البيانية، وهي بالتالي تتطلب معالجة خاصة .سنتعرض بشكل مختصر لبعض هذه الحالات ونوضح كيفية معالجتها.

أولا: حالة وجود حل غير محدود.

في هذه الحالة تواجهنا في مرحلة تحديد منطقة الحلول الممكنة، منطقة حلول غير عادية، حيث تكون هذه المنطقة مفتوحة عكس مناطق الحلول الممكنة العادية التي عادة ما تكون مغلقة، ما يعني أن الحل الأمثل غير محدود.

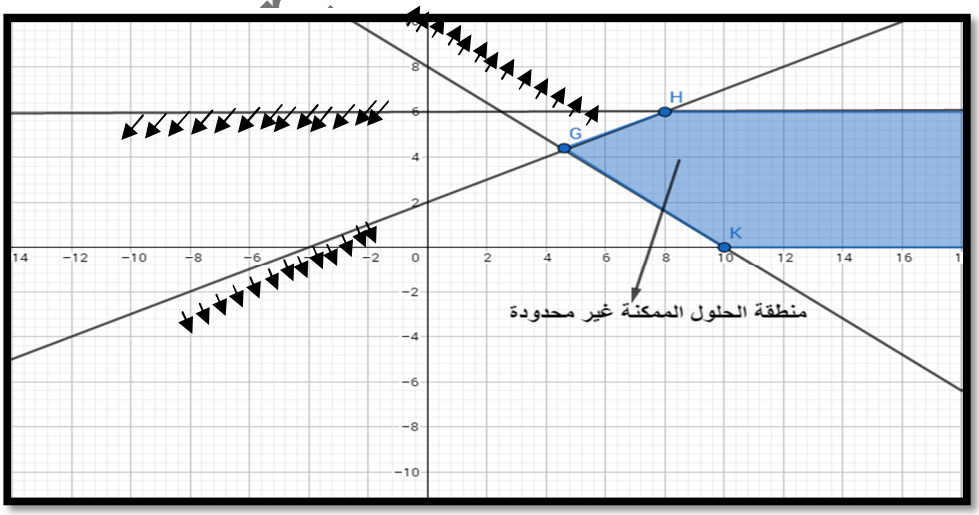
مثال: ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي، والمطلوب هو حل هذا البرنامج باستعمال الطريقة البيانية.

$$Max\ Z = 2x_1 + 4x_2$$
$$8x_1 + 10x_2 \geq 80$$
$$-2x_1 + 4x_2 \leq 8$$
$$x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

X2	X1
8	0
0	10
2	0
0	-4
$x_1 = 6$	

merwan haid



ثانيا: حالة عدم وجود حل امثل.

في هذه الحالة لا يمكن تحديد منطقة مشتركة بين مناطق حلول المعادلات (القيود)، وبالتالي لا يمكن تعيين منطقة الحلول الممكنة.

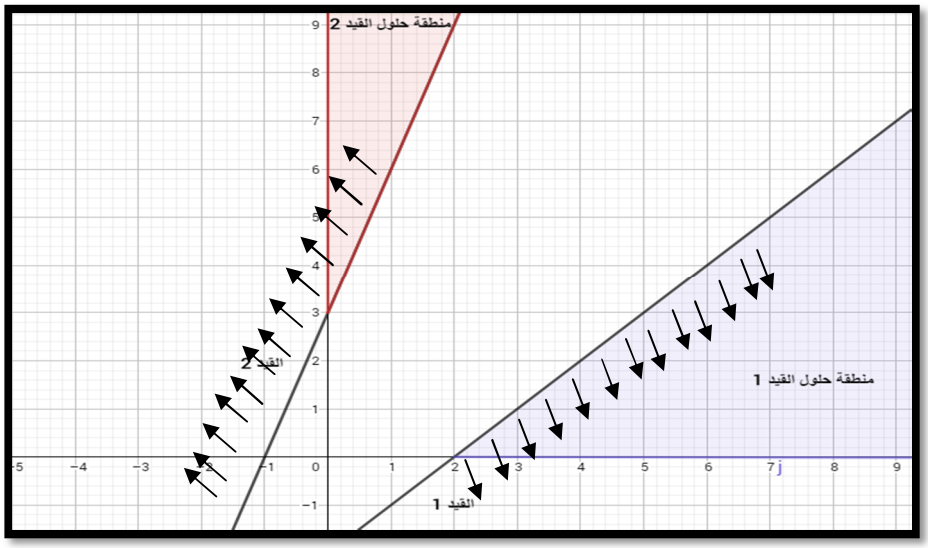
مثال: ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي، والمطلوب هو حل هذا البرنامج باستعمال الطريقة البيانية.

$$Max\ Z = 7x_1 + 3x_2$$
$$4x_1 - 4x_2 \leq 8$$
$$-3x_1 + x_2 \geq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

X2	X1
2-	0
0	2
3	0
0	1-

haid



لا توجد منطقة الحلول الممكنة، وبذلك لا يوجد حل لهذا البرنامج الخطي.

ثالثا: حالة وجود عدة حلول مثلى تعطينا نفس نتائج دالة الهدف.

تواجهنا هذه الحالة بيانيا عندما يكون مستقيم دالة الهدف موازي لأحد مستقيمات القيود، فيصبح الحل الأمثل هو عبارة عن كل إحداثيات النقاط الموجودة على قطعة مستقيمة من منطقة الحلول الممكنة.

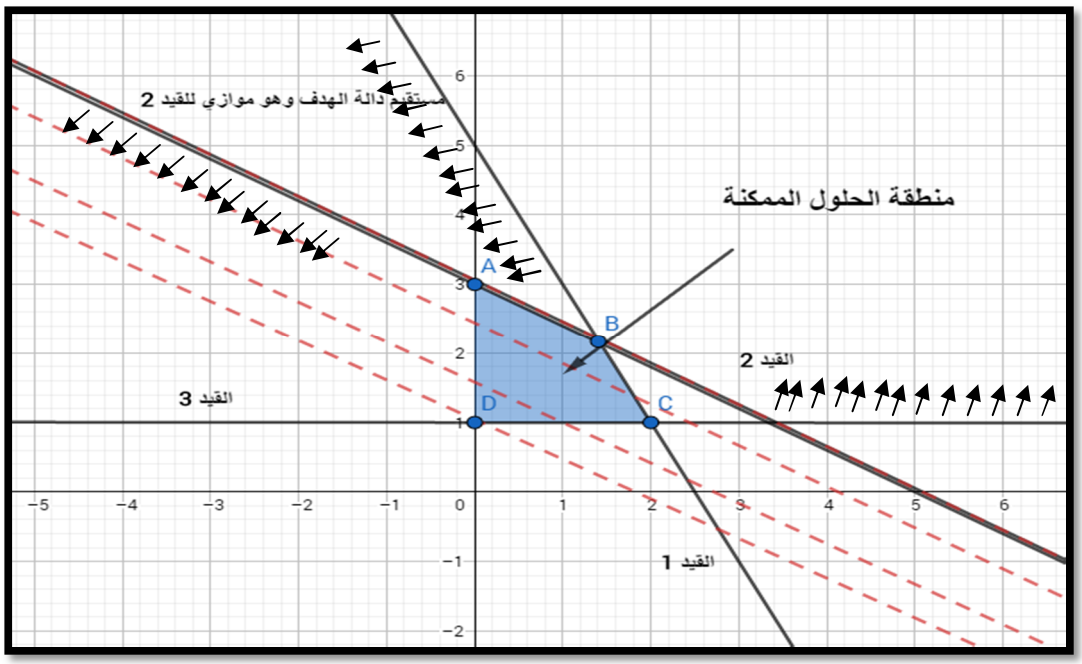
مثال: ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$Max\ Z = 3x_1 + 5x_2$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$6x_1 + 10x_2 \leq 30$$
$$x_2 \geq 1$$
$$x_1 \geq 0$$

المطلوب: حل البرنامج الخطي باستعمال الطريقة البيانية.

الحل:

X2	X1
5	0
0	2.5
3	0
0	5
$x_2 = 1$	



بما أن دالة الهدف (Max) فالحل هو إحداثيات **آخر** نقطة تقاطعت فيها منطقة الحلول الممكنة مع احد المستقيمات الموازية لمستقيم دالة الهدف، نلاحظ أن كل إحداثيات النقط الموجودة على القطعة المستقيمة $[A,B]$ تعتبر حلا امثلا لهذا البرنامج الخطي، وتعطينا نفس النتيجة عند تعويضهم في دالة الهدف.

مثلا:

- إحداثيات النقطة (A): (x_1=0، x_2=3). (Max Z=15).

-إحداثيات النقطة (B): ($x1=\frac{10}{7}$، $x2=\frac{15}{7}$) بعد حل جملة معادلتين:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 10 \dots (1) \\ 6x_1 + 10x_2 = 30 \dots (2) \end{cases}$$

- ضرب المعادلة (1) في (5):

$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 = 50 \dots (3) \\ 6x_1 + 10x_2 = 30 \dots (4) \end{cases}$$

- طرح المعادلة (3) من المعادلة (4):

$$14x_1 + 0x_2 = 20 \dots (5)$$
$$x_1 = \frac{10}{7}$$

- تعويض (x1) في أي معادلة من المعادلات السابقة نجد:

$$x_2 = \frac{15}{7}$$

(B): $(x_2=\frac{15}{7}$ ،$x_1=\frac{10}{7})$.(Max Z=15)

رابعا: حالة وجود قيد زائد.

تعني هذه الحالة وجود قيد أو أكثر زائد أو غير ضروري في البرنامج الخطي، لكن لا يمكن اكتشافه إلا بعد حل البرنامج بيانيا، وذلك بعد تحديد منطقة الحلول الممكنة، حيث يمكن حذف مستقيم القيد الزائد دون أن يؤثر على شكل منطقة الحلول الممكنة، وبذلك على الحل الأمثل.

مثال: ليكن البرنامج الخطي التالي:

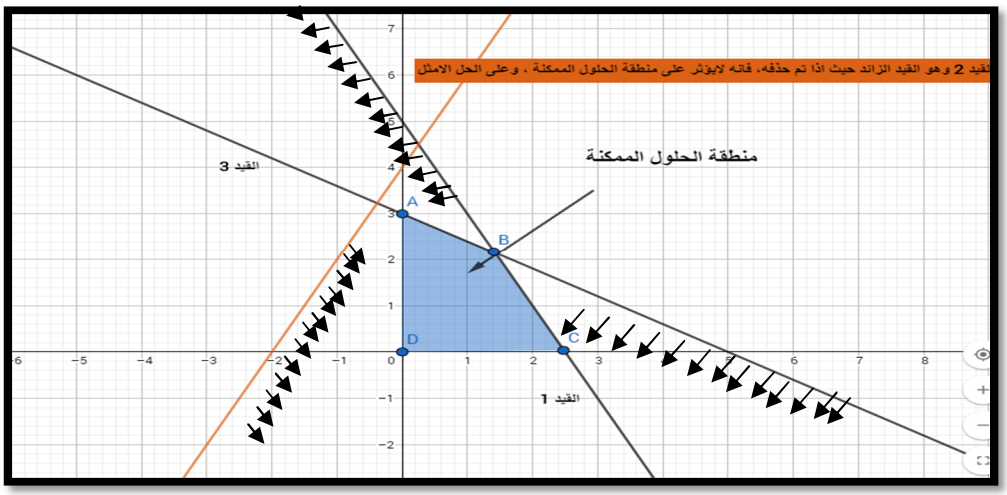
$$Max\ Z = 4x_1 + 5x_2$$
$$2x_1 + 1x_2 \leq 5$$
$$-4x_1 + 2x_2 \leq 8$$
$$3x_1 + 5x_2 \leq 15$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

المطلوب: إيجاد القيد الزائد (أو غير الضروري).

الحل:

X2	X1
5	0
0	2.5
4	0
0	2-
3	0
0	5

Dr.merwan naid



Dr.merwan haid

سلسلة تمارين.

حل باستخدام الطريقة البيانية البرامج الخطية التالية مع اكتشاف الحالات الخاصة إن وجدت:

1/

$$Max\ Z = 10x_1 + 30x_2$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$6x_1 + 1x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2/

$$Max\ Z = 180x_1 + 400x_2$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 160$$
$$4x_1 + 6x_2 \geq 240$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

3/

$$Max\ Z = 15x_1 + 12x_2$$
$$3x_1 + 6x_2 \leq 54$$
$$6x_1 + 3x_2 \leq 48$$
$$9x_1 + 9x_2 \leq 90$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

4/

$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$Max\ Z = 50x_1 + 20x_2$$
$$4x_1 + 8x_2 \leq 800$$
$$100x_1 + 50x_2 \leq 8000$$
$$x_1 \leq 60$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

5/

$$Min\ Z = 10x_1 + 12x_2$$
$$20x_1 + 10x_2 \geq 100$$
$$10x_1 + 10x_2 \geq 80$$
$$x_2 \geq 4$$
$$x_1 \geq 0$$

6/

$$Min\ Z = 30x_1 + 100x_2$$
$$8x_1 + 40x_2 \leq 80$$
$$x_1 \geq 3$$
$$x_2 \leq 5$$
$$x_2 \geq 0$$

7/

$$Min\ Z = 3x_1 + 5x_2$$
$$20x_1 + 10x_2 \geq 200$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 20$$
$$x_1 + x_2 = 16$$

8/

$$Max\ Z = 15x_1 + 25x_2$$
$$x_1 \leq 5$$
$$x_2 \leq 10$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Dr.merwan haid