جامعة الجيلالي بونعامة - خميس مليانة
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية
وعلوم التسيير

السداسي الثاني

المجموعات: 2 و 3 و 4

السنة الأولى جذع مشترك LMD

رياضيات 02

من مطبوعة :

الرياضيات للتخصصات الاقتصادية

المحور الأول:

ملخص درس : **المعادلات التفاضلية**

1. معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى والثانية
2. مفهوم المعادلة التفاضلية
3. حل بعض أنماط المعادلات من الرتبة الأولى
4. حل معادلات تفاضلية حطبة من الرتبة الثانية
5. أمثلة وتمارين محلولة

السنة الجامعية 2023 -2024

1. معادلات من الرتب الأولى والثانية

1.1 مفهوم المعادلة التفاضلية

مثال تمهيدي

الدالة $f_0 : x \mapsto e^{\alpha x}$؛ $\left(\alpha \in \mathbb{R}^*\right)$ المعرفة على $\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

ولدينا $f_0'(x) = \alpha \cdot e^{\alpha x} = \alpha \cdot f$

إذن الدالة f_0 تحقق المساواة $f_0' - \alpha \cdot f_0 = 0$

تسمى المعادلة $(1) \quad f' - \alpha f = 0$

حيث المجهول f دالة قابلة للاشتقاق على R : **معادلة تفاضلية،** ويسمى f_0 **حل** لهذه المعادلة.

- تكتب المعادلة (1) بالشكل: $(2) \quad y' - \alpha y = 0$

حيث المجهول y، دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

وبالعكس، يمكن طرح مسألة تعيين كل الدوال y للمتغير x والقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، والتي تحقق المعادلة (2).

2.1 تعريف:

تسمى المعادلة **معادلة تفاضلية** من الرتبة الأولى، كل معادلة من الشكل: $(E) \quad f' - \alpha f = 0$

تكتب المعادلة (1) بالشكل: $(2) \quad y' - \alpha y = 0$

وبصورة عامة، تسمى معادلة تفاضلية من الرتبة n كل معادلة من الشكل:

$$(E) \quad g\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

حيث g دالة للمتغيرات $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$ والمجهول y: دالة للمتغير x قابلة للاشتقاق n مرة على الأقل على مجال I.

تنسب المعادلة التفاضلية (E) إلى المشتق الأعلى مرتبة الذي تحويه.

مثال

$y' + 3y - 5x = 0$: معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى،

$y'' = \sin(3x - 1)$: معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية.

- يسمى حل للمعادلة التفاضلية (E) كل دالة عددية y (للمتغير x) تقبل الاشتقاق n مرة على مجال I من $\mathbb{R}$، وتحقق (E).

مثال:

المعادلة التفاضلية $y' + 2y'' = x^3 + 5x - 3x$ ، $D = \mathbb{R}$

تقبل الدالة y المعرفة على $\mathbb{R}$ كحل لها، حيث: $y = x^3 - x^2 + x - 2$.

تمرين رقم 1

شكل معادلة تفاضلية، تقبل الدالة y المعرفة على $]-1,+1[$ حلا لها. حيث

$$y = -\frac{1}{2}\ln(x^2-1)+3$$

الحل

الدالة $y = -\frac{1}{2}\ln(x^2-1)+3$ على المجال $]-1,+1[$ تقبل الاشتقاق، ولدينا : $y' = -\frac{x}{x^2-1}$

وهي المعادلة التفاضلية المطلوبة

2. دراسة المعادلات التفاضلية من الرتب الأولى والثانية

نعتبر المعادلة التفاضلية $g(x,y,y')=0$ أو $g(x,y,y',y'')=0 \quad (*)$

- نعني بحل المعادلة التفاضلية $(*)$ تعيين كل الدوال y حيث:
  - الدالة y معرفة على D من $\mathbb{R}$، وتأخذ قيمتها في $\mathbb{R}$.
  - الدالة y تقبل الاشتقاق مرة أو مرتين D (حسب رتبة $(*)$).
  - الدالة y تحقق المعادلة $(*)$.
- إذا بدلنا y,y',y'' في $(*)$ بعباراتهم بالنسبة إلى x، فإن الدالة y ذات المتغير x تصبح مساوية للصفر على مجال D من $\mathbb{R}$ تكون فيه y ومشتقتيها y,y' معرفتان.

مثلا: في المعادلة $y'=3$ ، $D=\mathbb{R}$ ، تكون مجموعة حلولها y، هي الدوال الأصلية للدالة الثابتة على $\mathbb{R}$:

$x \mapsto 3$ أي $y = 3x + c$ حيث c من $\mathbb{R}$.

قيمة خاصة للثابت الاختياري c :

- من أجل $c=1$، $y = 3x+1$: معادلة (منحنى) مستقيم.

$y = 3x + c$: معادلة كل المنحنيات البيانية الممثلة للدالة y. $(x \in \mathbb{R})$

إذا اشتمل أحد هذه المنحنيات على النقطة $M_0(x_0,y_0)$، فإن $y_0 = 3x_0 + c$

ومنه $c = y_0 - 3x_0$

والمعادلة المرفقة هي: $y = 3x + (y_0 - 3x_0)$

مثال

في المعادلة $y'' = \frac{1}{x^2}$، $D = \mathbb{R}_+^*$

الحلول y، هي الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto -\frac{1}{x} + c$.

أي $y = -\ln x + c\cdot x + d$، حيث c و d من $\mathbb{R}$.

تمرين رقم 2

حل المعادلة التفاضلية: $y' = x + \tan x$ ، $D = \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$

الحل

بمكاملة الدالة $y = -\frac{1}{2}\ln(x^2-1)+3$ على المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ نجد :

$$y = -\frac{1}{2}\int\left(3+\ln(x^2-1)\right)dx$$
$$= \frac{x^2}{2}+\ln(\cos x)+c$$

1.2 الحل الخاص والحل العام.

نقبل أن حل المعادلة التفاضلية (*) يحتوي ثابتا أو ثابتين حقيقيين (مستقلين) حسب مرتبة المعادلة.

يسمى مثل هذا الحل: **الحل العام،** كما يسمى كل حل ينتج من الحل العام بإعطاء قيم لهذين الثابتين **بالحل الخاص.**

إن عدد الحلول الخاصة غير متناه.

2.2 تعين ثابت التكامل

إن ثابت التكامل c يكون ثابتا عندما يطلب الحل من أجل $x_0 = x$ معطى. يكون هذا الحل هو

$$y(x) = y(x_0) = y_0$$

نصل إلى نفس النتائج باستخدام نتائج التكاملات المحدودة

$$f(y)\cdot y' = g(x) \wedge y(x_0) = y_0 \iff \int_{y_0}^{y} f(\eta)d\eta = \int_{x_0}^{x} g(\xi)d\xi$$

ونحصل مباشرة على الدالة y بحيث $y(x_0) = y_0$ دون المرور على تحديد ثابت التكامل.

تمرين رقم 3

أحسب التكامل $z(x) = \int \frac{1}{2}(x^2+1)\cdot e^{-x}dx$. ثم شكل المعادلة التفاضلية التي تقبل الدالة $z(x) = -\frac{1}{2}\left(2x+x^2-2c\right)\cdot e^{-x}$ حلا لها. (c ثابت اختياري حقيقي).

الحل

- باشتقاق الدالة: $z(x) = -\frac{1}{2}(x^2+2x-2c)\cdot e^{-x}$ نجد : $z'(x) = \frac{1}{2}(x^2+2c-2)\cdot e^{-x}$

وبحذف الثابت الاختياري c نجد المعادلة التفاضلية المطلوبة بالشكل: $z+z' = -(x+1)\cdot e^{-x}$

تمرين رقم 4

عين المعادلة التفاضلية التي تقبل كحل لها الدوال: $y = \lambda\cdot e^{x}$ (λ عدد حقيقي).

هي حل عام للمعادلة التفاضلية $y' - y = 0$.

الحل

بالفعل، الدالة y معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $y' = \lambda\cdot e^{x}$.

بوضع $\lambda = \frac{y'}{e^x}$ $(e^x \neq 0)$، وتبديله بقيمته في عبارة y، نجد المعادلة التفاضلية المطلوبة.

تمرين رقم 5

جد المعادلة التفاضلية التي تقبل كحل الدالة: $y = \alpha\cos 2x + \beta\sin 2x$، ($\alpha$ و β عددين حقيقيين)

الحل

لحذف الثابتين α و β اللذين تحويلهما الدالة y، تحتاج بالإضافة إلى الدالة y نفسها، إلى دالتين نحصل عليهما باشتقاقين متتاليين للدالة y، نجدهما :

$$y' = -2\alpha\cos 2x + 2\beta\sin 2x$$
$$y'' = -4\alpha\cos 2x - 4\beta\sin 2x = -4(\alpha\cos 2x + \beta\sin 2x)$$

ونجد العلاقة بين y'' و y المستقلة عن هذين الثابتين:

$$y'' + 4y = 0$$

وهي المعادلة التفاضلية المطلوبة.

3. حل بعض المعادلات التفاضلية

1.3 المعادلات من الشكل: $y' = f(x)$ (1)

حيث f دالة مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$.

إذا كانت h دالة أصلية لـ f على I، فإن الحل العام للمعادلة (1) في المجال I فإن الحل العام للمعادلة (1) في المجال I، هي الدوال y، حيث:

$$(\mathbb{R} \ni c) \quad y = \int f(x)\,dx = h(x) + c$$

2.3 المعادلات من الشكل: $y'' = f(x)$ (2)

حيث f دالة مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$.

إذا كانت h دالة أصلية لـ f على I، وكانت h هي الأخرى مستمرة على I وتقبل k كدالة أصلية لها على I، فإن :

$$y'' = f(x) \Leftrightarrow (\mathbb{R} \ni c)\, y' = h(x) + c$$
$$\Leftrightarrow (c, d \in \mathbb{R})\, y' = k(x) + cx + d$$

إذن الحل العام للمعادلة (2) في المجال I، هي الدوال y؛

حيث: $(c, d \in \mathbb{R}) \quad y = \int (h(x) + c)\,dx = k(x) + cx + d$

تمرين رقم 6

عين حل المعادلة التفاضلية : $y' = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ $\quad D =]0, +\infty[$

الحل

الدالة $\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} \mapsto f$ مستمرة على D، ومنه الحل العام هو الدوال y :

$$y=\int -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=e^{\frac{1}{x}}+c$$ حيث c من $\mathbb{R}$

الحل الخاص : $y(1)=e$: لدينا $y(1)=e \Leftrightarrow e^1+c=e \Leftrightarrow c=e$

ومنه الحل الخاص على $]0,+\infty[$ هو $y_0=e^{\frac{1}{x}}$.

تمرين رقم 7

عين حلا للمعادلة التفاضلية : $y''=\frac{1}{x}$ $\quad D=\mathbb{R}^*$

الحل

الدالة $\frac{1}{x} \mapsto f$ مستمرة $\mathbb{R}^*$، بالمكاملة نحصل على الدالة المشتقة الأولى كالآتي :

$$y'=\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$$ حيث c من $\mathbb{R}$

وبمكاملة ثانية نجد الحل العام : $y=\int(\ln|x|+c)\,dx=x\ln|x|-(1-c)x+d \quad (c,d\in\mathbb{R})$

الحل الخاص : $y(1)=0$ و $y(-1)=1$

لدينا $\begin{cases} y(1)=0 \\ y(-1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1+c+d=0 \\ -1-c+d=1 \end{cases} \Leftrightarrow c=d=\frac{1}{2}$

ومنه الحل الخاص على $D=\mathbb{R}^*$ هو $y_0=x\ln|x|-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

تمرين

عين الحل العام للمعادلة التفاضلية : $y''=\frac{\ln x}{x^2}$ على $\mathbb{R}_+^*$

واستنتج الحل الخاص الذي يحقق $\begin{cases} y(1)=0 \\ y'(1)=1 \end{cases}$

4.3 معادلات من الشكل $y'=\alpha y$ (3) حيث α من $\mathbb{R}^*$

نعين الدوال y القابلة للاشتقاق على $D\subset\mathbb{R}$ التي تحقق (3). نلاحظ بأن $y=0$ حل ظاهري لـ(3)

– نبحث عن الحلول التي لا تنعدم على D: ليكن y حل للمعادلة (3)، بحيث y لا ينعدم على D.

لدينا $(3) \Leftrightarrow \alpha=\frac{y'}{y} \quad (3')$

بمكاملة طرفي $(3')$ نجد: $\ln|y|=cx+d$، $(c,d)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

أي: $|y|=e^{cx+d}=e^d\cdot e^{cx}$، $(c,d)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

وبما أن y مستمرة على D ولا تنعدم (على D) فإن إشارتها تبقى ثابتة على هذا المجال.

ومنه: إما $y = e^{d} \cdot e^{cx}$، وإما $y = -e^{d} \cdot e^{cx}$.

في كلتا الحالتين، نكتب $y = \lambda \cdot e^{cx}$، $\left(\lambda \in \mathbb{R}^*\right)$

وبالتالي تكون حلول للمعادلة (3)، هي الدوال $x \mapsto \lambda \cdot e^{cx}$ المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

أ) تعيين الحل العام.

ليكن y حل كيفي للمعادلة (3).

نعلم بان الدالة $x \mapsto e^{cx}$ المعرفة على D، هي حل للمعادلة (3).

بوضع $z = \dfrac{y}{e^{cx}}$ $\left(e^{cx} \neq 0\right)$ يكون $y = z \cdot e^{cx}$، ومستقتها على D هي: $y' = z'e^{cx} + cx\,e^{cx}$

ومنه $y' - cy = z' \cdot e^{cx} + cx \cdot e^{cx} - cx \cdot e^{cx} = z' \cdot e^{cx}$

بما أن y هي حل للمعادلة (3) فإن $z' = 0$، أي أن z هي الدالة الثابتة على D.

إذن الدوال $y = \lambda \cdot e^{cx}$، $\left(\lambda \text{ و } \mathbb{R}^*\right)$ المعرفة في $\mathbb{R}$، وكذلك، من أجل $\lambda = 0$ (الحل الخاص: $y = 0$) هي حلول للمعادلة التفاضلية (3).

ملاحظة

إذا كان $\left(x_0, y_0\right)$ من $\left(D, \mathbb{R}\right)$، يكون $y_0 = \lambda \cdot e^{cx_0}$، ومنه $\lambda = y_0 \cdot e^{-cx_0}$ والحل الخاص الوحيد $y = y_0 \cdot e^{c(x - x_0)}$.

مثلا: المعادلة التفاضلية $y' - 3y = 0$ من الشكل: $y' = y$، وحلها العام هو $y = \lambda \cdot e^{x}$ $\left(\lambda \text{ و } \mathbb{R}\right)$

الحل الخاص الذي يحقق $y(-1) = 1$، هو $y_0 = \lambda \cdot e^{cx_0}$.

تمرين رقم 8

أ) لتكن f دالة عددية معرفة كما يلي: $f(x) = -\frac{3}{2} + \lambda \cdot e^{2x}$، λ عدد حقيقي معطى

– بين أن f تطبيق من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$.

– بين أن f يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

– تأكد من أن f تحقق المعادلة: $f'(x) - 2f(x) = 3$ ماذا تستنتج؟

ب) نعتبر المعادلة التفاضلية:

$$y' - 2y = 3 \qquad (1)$$

– تحقق من أن المعادلة (1) تقبل الدالة $y = -\frac{3}{2}$ كحل لها على $\mathbb{R}$.

– لتكن y إحدى حلول المعادلة (1)، برهن أن الدالة $y + \frac{3}{2}$ تحقق معادلة من الشكل:

$$z' - 2z = 0 \qquad (2)$$

– حل المعادلة (2)، واستنتج حلول المعادلة (1).

– عين من بين حلول المعادلة (1) الدالة y التي تحقق: $y(0) = 0$.

الحل

أ) – لدالة f معرفة على $\mathbb{R}$. فهي تطبيق من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$.

– f مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$. ولدينا $f'(x)=0+2\lambda\cdot e^{2x}$ ، $\lambda\in\mathbb{R}$

– f تحقق المعادلة المعطاة: $f'(x)-2f(x)=2\lambda e^{2x}-2\left(-\frac{3}{2}+\lambda e^{2x}\right)=3$ أي

$$f'(x)-2f(x)=3$$

والدالة f هي حل للمعادلة التفاضلية ذات الرتبة الأولى $y'-2y=3$.

ب) – لدينا $y=-\frac{3}{2}$ حل خاص للمعادلة (1)، لأن $y'=0$ و $y'-2y=0-2\left(-\frac{3}{2}\right)=3$

– نضع $z=y+\frac{3}{2}$ حيث y حل لـ (1)، وبالتعويض عن y و y' بدلالة المجهول z في (1):

$z'-2\left(z-\frac{3}{2}\right)=3$ أي $z'-2z=0$ وبالتالي $y+\frac{3}{2}$ تحقق المعادلة (2).

– معادلة التفاضلية (2) من الشكل: $z'=2z$، فحلها العام هو كل الدوال $z=\lambda e^{2x}$، $\lambda\in\mathbb{R}$، المعرفة على D من $\mathbb{R}$.

ينتج عن كل حل لـ (1) حلا للمعادلة (2) من الشكل: $z=y+\frac{3}{2}$

ومنه $y=z-\frac{3}{2}$ وبالتالي $y=-\frac{3}{2}+\lambda e^{2x}$، $\lambda\in\mathbb{R}$، المعرفة على D من $\mathbb{R}$.

– حل الخاص الذي يحقق $y(0)=0$، يحقق $0=-\frac{3}{2}+\lambda e^{3\times 0}$ وذلك من أجل $\lambda=-\frac{3}{2}$

والحل الخاص المطلوب هو $y_0=-\frac{3}{2}\left(1-e^{2x}\right)$.

6.3 معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى من الشكل $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$

هذه المعادلة تُحل باستخدام التحويل $z=\frac{y}{x}$ ومنه $y=x\cdot z$ ويكون $\frac{dy}{dx}=z+xz'$

والمعادلة * تأخذ الشكل $x\frac{dz}{dx}=-z+f(z)$ أو $\frac{dx}{x}=\frac{dz}{f(z)-z}$

تمرين رقم 9

حل المعادلة التفاضلية: $x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}=y\cos\left(\frac{y}{x}\right)-x$

الحل

نضع $z=\frac{y}{x}$ ومنه $y=x\cdot z$ ويكون $\frac{dy}{dx}=z+xz'$،

فتأخذ المعادلة الشكل $x\cos z\cdot(z+xz')=xz\cos z-x$ أو

$$\cos z\cdot(z+xz')=z\cos z-1$$

$$x\,z'\cos z=-1 \Leftrightarrow x\frac{dz}{dx}\cos z=-1 \Leftrightarrow \cos z\,dz=-\frac{dx}{x}$$

بالمكاملة $\int\cos z\,dz=-\int\frac{dx}{x}$ نجد : $\sin z=-\ln x+\ln c$ حيث c من $\mathbb{R}$

$\sin z=-\ln x+\ln c=\ln\frac{c}{x}$ وأخيرا $e^{\sin(y/x)}=\frac{c}{x}$

7.3 معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى ذات متغيرات منفصلة

نقول عن معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى أنها بمتغيرات منفصلة إذا أمكن كتابتها بأحد الشكلين :

$$g(x)dy=h(y)dx \quad \text{أو} \quad g(x)dx=h(y)dy$$

في الشكل الأول إذا كانت $G(x)$ و $H(x)$ الدالتان أصليتان لـ $g(x)$ و $h(x)$ يكون لدينا $G(x)=H(x)+c$

تمرين رقم 10

حل المعادلة التفاضلية $y'=e^{x+y}$

الحل

لدينا $\frac{dy}{dx}=e^{x}\cdot e^{y} \Leftrightarrow e^{-y}dy=e^{x}dx$

وبالمكاملة $e^{-y}+c=e^{x}$ أي $c=e^{x}-e^{-y}$ حيث c من $\mathbb{R}$

تمرين

حل على $D=]1,+\infty[$ المعادلة التفاضلية $x\,y'\ln x=(3\ln x+1)y$

حل المعادلة التفاضلية $x\,e^{x+2y}+y'=0$

4. معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الأولى

1.4 معادلات من الشكل $af'+bf=g$

ليكن a و b ثابتين حقيقيين مع $a\neq 0$.، ولتكن g دالة عددية معرفة ومستمرة على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$.

- لنعتبر المعادلة التفاضلية $\quad (1)\quad af'+bf=g$

نكتب (1) بالشكل $\quad af'(x)+bf(x)=g(x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

عندما g هي الدالة المعدومة، هذه المعادلة تأخذ الشكل $af'+bf=0$، وتسمى معادلة متجانسة أو معادلة بدون طرف ثاني.

المعادلة المتجانسة تكافئ المعادلة $\frac{f'}{f}=-\frac{b}{a}$ التي حلها هو : $f(x)=c\cdot e^{-\frac{b}{a}x}$ حيث c من $\mathbb{R}$.

تكون مجموعة حلول المعادلة (1)، هي مجموعة الدوال التي هي على شكل مجموع لحل خاص للمعادلة (1) وحل عام للمعادلة المتجانسة المرفقة.

• إذا كانت $g(x)$ مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$، وكان المعاملان a و b دالتين لـ x مستمرتين على I بحيث $0 \neq a(x)$.

$$(1) \quad a(x)y'(x)+b(x)y(x)=g(x)$$

فإن المعادلة المتجانسة:

$$(2) \quad a(x)y'(x)+b(x)y(x)=0$$

ستأخذ الشكل $\frac{y'}{y}=-\frac{b(x)}{a(x)}$ وهي تكافئ عندما تكون $H(x)$ دالة أصلية للطرف الأيمن، المعادلة

$$\ln y(x)=H(x)$$

ومنه $\boxed{y(x)=y_1(x)=c\cdot e^{H(x)}}$ حيث c من $\mathbb{R}$.

إن مجموعة حلول المعادلة المتجانسة هو فضاء جزئي من $C^1(I)$. نحصل على مجموعة حلول المعادلة (1)، بإضافة حل خاص للمعادلة (1) إلى كل حلول المعادلة المتجانسة المرفقة.

2.4 البحث عن حل خاص للمعادلة (1) (بطريقة تغيير الثابت)

هذا الحل الخاص يوضع بالشكل $y(x)=c(x)\cdot e^{H(x)}$ حيث تتحدد الدالة $c(x)$ "بتغيير الثابت".

بالاشتقاق $y'(x)=c'(x)\cdot e^{H(x)}+H'(x)\cdot c(x)\cdot e^{H(x)}$

وبالتعويض في (1) نجد

$$a(x)\left(c'(x)\cdot e^{H(x)}+H'(x)\cdot c(x)\cdot e^{H(x)}\right)+b(x)c(x)\cdot e^{H(x)}=g(x)$$

$$a(x)c'(x)\cdot e^{H(x)}+\cancel{a(x)H'(x)\cdot c(x)\cdot e^{H(x)}}+\cancel{b(x)c(x)\cdot e^{H(x)}}=g(x)$$

$$a(x)c'(x)\cdot e^{H(x)}=g(x)$$

$$c'(x)=\frac{g(x)}{a(x)}e^{-H(x)}$$

بمكاملة هذه الأخيرة (مركبة من دوال مستمرة على I) والتعويض في عبارة هذا الحل الخاص ، نجد :

$$\boxed{y(x)=y_0(x)=e^{H(x)}\int\frac{g(x)}{a(x)}e^{-H(x)}dx}$$

فيكون $y(x)$ الحل العام للمعادلة (1) مؤلفا من مجموع الحلين : $y_1(x)$ حل عام للمعادلة المتجانسة و $y_0(x)$ حل خاص للمعادلة (1). أي $y(x)=y_0(x)+y_1(x)$

$$\boxed{y(x)=e^{H(x)}\int\frac{g(x)}{a(x)}e^{-H(x)}dx+c\cdot e^{H(x)}}$$

حيث $H(x)=\int-\frac{b(x)}{a(x)}dx$ و حيث c ثابت اختياري من $\mathbb{R}$.

تمرين رقم 11

• حل المعادلة التفاضلية: $y'(x)+y(x)=x\cdot e^{-x}$ .... (1)

واستنتج الحل الخاص لها الذي يحقق الشرط الابتدائي: $y_0(0)=1$

• أحسب التكامل $z(x)=\int\frac{1}{2}(x^2+1)\cdot e^{-x}dx$. ثم شكل المعادلة التفاضلية التي تقبل الدالة $z(x)=-\frac{1}{2}\left(2x+x^2-2c\right)\cdot e^{-x}$ حلا لها. (c ثابت اختياري حقيقي)

الحل

– حل المعادلة التفاضلية: $y'(x)+y(x)=x\cdot e^{-x}$ ..... (1)

- نوجد أولا الحل العام y_1 للمعادلة التفاضلية المتجانسة: $y'(x)+y(x)=0$ بالشكل: $y_1=c\cdot e^{-x}$
- ثم نوجد حلا خاصا y_0 للمعادلة التفاضلية (1) يكون بالشكل: $y_0=c(x)\cdot e^{-x}$.

باشتقاق العلاقة الأخيرة نجد: $y_0'=c'(x)\cdot e^{-x}-c(x)\cdot e^{-x}$ أي: $y_0'=c'(x)\cdot e^{-x}-y_0$ ، وبالتعويض في المعادلة (1) نحصل على: $c'(x)\cdot e^{-x}-y_0+y_0=x\cdot e^{-x}$

التي تكافئ: $dc=x\cdot dx \Leftrightarrow \frac{dc}{dx}=x \Leftrightarrow c'(x)=x$

وبالمكاملة، نحصل على إحدى الدوال الأصلية بالشكل: $c(x)=\int dc=\int x\cdot dx=\frac{1}{2}x^2$

فيأخذ الحل الخاص للمعادلة المتجانسة الشكل: $y_0=c(x)\cdot e^{-x}=\frac{1}{2}x^2\cdot e^{-x}$

- الحل العام y للمعادلة (1) : $y=y_1+y_0$ أي : $y=c\cdot e^{-x}+\frac{1}{2}x^2\cdot e^{-x}$

والحل الخاص y_0 للمعادلة (1) الذي يحقق لشرط الابتدائي: $y_0(0)=1$ أي : $c\cdot e^{-0}+\frac{1}{2}0^2\cdot e^{-0}=c=1$

هو : $y(0)=f(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)\cdot e^{-x}$

– إحدى الدوال الأصلية للدالة: $f(x)$ نجدها بالمكاملة بالتجزئة كالآتي:

$$z(x)=\int\frac{1}{2}(x^2+1)\cdot e^{-x}dx=-\frac{1}{2}\left(x^2+2x+3\right)\cdot e^{-x}$$

- باشتقاق الدالة: $z(x)=-\frac{1}{2}(x^2+2x-2c)\cdot e^{-x}$ نجد : $z'(x)=\frac{1}{2}(x^2+2c-2)\cdot e^{-x}$

وبحذف الثابت الاختياري c نجد المعادلة التفاضلية المطلوبة بالشكل: $z+z'=-(x+1)\cdot e^{-x}$

ملاحظة

إذا كان y_1 و y_2 هما حلين خاصين للمعادلة (1)، فإن y_2-y_1 سيكون حلا للمعادلة المتجانسة المرفقة، والحل العام للمعادلة (1) هو $y(x)$ حيث $y=y_1+c(y_2-y_1)$ حيث c اختياري من $\mathbb{R}$.

تمرين رقم 12

حل المعادلة التفاضلية: $x\ y'(x)+y(x)=\frac{1}{x}\ln x \quad \ldots\ldots (1)$

الحل

حل المعادلة المتجانسة: $x\,y'(x)+y(x)=0$ هو $y_1=\frac{c}{x}$ حيث c من $\mathbb{R}$

نوجد حل خاص y_2 لـ (1) من الشكل: $y_2=\frac{c(x)}{x}$

فنجد: $c(x)=\frac{1}{2}\ln^2 x$ ومنه $y_2=\frac{1}{2x}\ln^2 x$

إذن الحل العام $y=y_1+y_2=\frac{c}{x}+\frac{1}{2x}\ln^2 x$ حيث c من $\mathbb{R}$

الحل الخاص لـ (1) الذي يحقق: $y_0(1)=1$ يعطي $c=1$

ومنه $y_0(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}\ln^2 x$

– باستخدام التكامل بالتجزئة

$$z(x)=-\frac{1}{2}\int\frac{2-2\ln x+\ln^2 x}{x^2}\,dx=\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}\ln^2 x$$

$z(x)=\frac{c}{x}+\frac{1}{2x}\ln^2 x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $x\,z'(x)+z(x)=\frac{1}{x}\ln x$

تمرين رقم 13

حل المعادلة التفاضلية: $e^x\cdot y'(x)-y(x)=1 \quad \ldots\ldots (1)$

واستنتج الحل الخاص لها الذي يحقق الشرط الابتدائي: $y(0)=0$.

الحل

أ) 1. حل المعادلة التفاضلية: $e^x\cdot y'(x)-y(x)=1 \ \ldots (1)$

- نوجد الحل العام y_1 للمعادلة التفاضلية المتجانسة: $e^x\cdot y'(x)-y(x)=0\ \ldots (2)$، الذي هو:

$$e^x\cdot y'(x)-y(x)=0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y}=e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \ln|y|=c_1-e^{-x} \Leftrightarrow y=\pm c_1\cdot e^{-e^{-x}}$$

ومنه الحل العام لـ (2) : $y_1(x)=c\cdot e^{-e^{-x}}$ حيث $c\in\mathbb{R}$

- ثم نوجد حلا خاصا y_0 للمعادلة (1) يكون من الشكل: $y_0=c(x)\cdot e^{-e^{-x}}$.

باشتقاق العلاقة الأخيرة نجد: $y_0'(x)=c'(x)\cdot e^{-e^{-x}}+c(x)\cdot e^{-x}e^{-e^{-x}}$

وبالتعويض في (1) نحصل على:

$$e^x y_0'-y_0=$$
$$=e^x c'(x)\cdot e^{-e^{-x}}+\cancel{e^x c(x)\cdot e^{-x}e^{-e^{-x}}}-\cancel{e^x c(x)\cdot e^{-x}e^{-e^{-x}}}$$
$$=e^x c'(x)\cdot e^{-e^{-x}}=1$$

أي

$$c'(x)=e^{-x}\cdot e^{-e^{-x}}$$

وبالمكاملة، نحصل على إحدى الدوال الأصلية لـ $c(x)$ بالشكل: $c(x)=\int e^{-x}\cdot e^{-e^{-x}}dx=-e^{-e^{-x}}$

فيكون الحل الخاص للمعادلة (1) : $y_0(x)=-e^{-e^{-x}}\cdot e^{-e^{-x}}=-1$

- الحل العام y للمعادلة (1) : $y=y_1+y_0$ هو : $y(x)=c\cdot e^{-e^{-x}}-1$ حيث $c\in\mathbb{R}$

الحل الخاص y_2 للمعادلة (1) الذي يحقق لشرط الابتدائي: $y(0)=0$:

$$c\cdot e^{-1}=1 \iff c\cdot e^{-e^{-0}}-1=0$$

ومنه : $c=\frac{1}{e}$ ويكون الحل الخاص المطلوب هو : $y_2(x)=\frac{1}{e}\cdot e^{-e^{-x}}-1$

5. معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الثانية

1.5 معادلة تفاضلية من الشكل $ay''+by'+cy=g(x)$

نعتبر المعادلة التفاضلية $\quad (1)\quad ay''+by'+cy=g(x)$

حيث a و b و c ثوابت حقيقية مع $a\neq 0$. و $g(x)$ دالة مستمرة على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$.

معادلة المتجانسة المرفقة بـ (1)

$$(2)\quad ay''+by'+cy=0$$

حسب النتائج العامة تكون نحصل على مجموعة حلول المعادلة (1)، بإضافة حل خاص للمعادلة (1) إلى كل حلول المعادلة المتجانسة المرفقة.

- من أجل $x_0\in I$ و α و β، من $\mathbb{R}$، المعادلة (1) تقبل حلا وحيدا y يحقق

$$y(x_0)=\alpha,\ y'(x_0)=\beta$$

- إن مجموعة حلول المعادلة المتجانسة على I لها بنية فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$، بعده 2، وبالتالي إذا كان y_1 و y_2 حلين مستقلين للمعادلة المتجانسة، فإنهما يشكلان أساسا لهذا الفضاء.

- حتى يكون y_1 و y_2 حلين مستقلين للمعادلة المتجانسة يجب يكون المحدد المجموعة : $\{(y_1(x), y_1'(x)), (y_2(x), y_2'(x))\}$ غير معدوم.

ولدينا

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)\cdot y_2'(x) - y_1'(x)\cdot y_2(x)$$

إذا كان $w(x_0) \neq 0$ من أجل $x_0 \in I$، فإن $w(x) \neq 0$ من أجل كل $x \in I$

2.5 حل المعادلة المتجانسة المرفقة

نبحث عن الحلول من الشكل $y = e^{rx}$ حيث r من $\mathbb{R}$. لدينا $y' = ry$ و $y'' = r^2 y$، والمعادلة (1) تأخذ الشكل $y(ar^2 + br + c) = 0$

تسمى المعادلة $ar^2 + br + c = 0$ (3) بالمعادلة المميزة للمعادلة (1).

ووفق إشارة مميز المعادلة المميزة $\Delta = b^2 - 4ac$ يكون لدينا :

- إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة المميزة تقبل جذرين مختلفين $r_1 \neq r_2$، ويكون حل المعادلة المتجانسة هو : $y = ce^{r_1 x} + de^{r_2 x}$ حيث c و d من $\mathbb{R}$.
- إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة المميزة تقبل جذرا مضاعفا $r \in \mathbb{R}$، ويكون حل المعادلة المتجانسة هو : $y = ce^{rx} + dxe^{rx}$ حيث c و d من $\mathbb{R}$.
- إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة المميزة تقبل جذرين مركبين (مترافقين): $r_1 = \alpha + i\beta$ و $r_2 = \alpha - i\beta$ (α و $\beta \in \mathbb{R}$ مع $\beta \neq 0$) ويكون حل المعادلة المتجانسة هو : $y = ce^{\alpha x}\cos\beta x + dxe^{\alpha x}\sin\beta x$ حيث c و d من $\mathbb{R}$.

3.5 حل خاص للمعادلة (1)

نميز أيضا حالتين وطريقة عامة :

$g(x) = e^{\alpha x}P(x)$ حيث α من $\mathbb{C}$ و $P(x)$ من $\mathbb{C}[x]$ كثير حدود

نبحث عن الحلول من الشكل $y(x) = e^{\alpha x}Q(x)$ حيث $Q(x)$ كثير حدود، يمكن تحديد درجته:

- إذا لم يكن α جذرا للمعادلة المميزة، فإن $\deg Q = \deg P$
- إذا كان α أحد الجذرين للمعادلة المميزة، فإن $\deg Q = \deg P + 1$
- إذا كان α جذرا مضاعفا للمعادلة المميزة، فإن $\deg Q = \deg P + 2$

4.5 ملاحظة

هذه الطريقة تطبق أيضا عندما يكون $\alpha=0$ أي في الحالة $g(x)=P(x)$

يمكن أيضا البحث عن حل من الشكل $y(x)=z(x)e^{\alpha x}$ حيث z دالة معلومة. والتعويض في المعادلة (1)، فنحصل على معادلة تفاضلية من أجل z.

إذا كان $g(x)=A\cos\mu x+B\sin\mu x$ حيث A و B و μ من $\mathbb{R}$.

نميز حالتين:

- إذا لم يكن α جذرا للمعادلة المميزة، في هذه الحالة الدالتان $\cos(\mu x)$ و $\sin(\mu x)$ ليستا حل للمعادلة المتجانسة ، حل خاص للمعادلة (1)، يأخذ الشكل

$$y=c\cos\mu x+d\sin\mu x$$ حيث c و d من $\mathbb{R}$ (يتحددان بالمطابقة).

- إذا كان α جذرا للمعادلة المميزة، في هذه الحالة الدالتان $\cos(\mu x)$ و $\sin(\mu x)$ هما حلين للمعادلة المتجانسة ، حل خاص للمعادلة (1)، سيأخذ الشكل

$$y=x(c\cos\mu x+d\sin\mu x)$$ حيث c و d من $\mathbb{R}$ (يتحددان بالمطابقة).

ملاحظة هامة

إذا كان $g(x)$ بالشكل $g(x)=g_1(x)+g_2(x)$ فإن أي حل خاص معطى بالشكل $y=y_1+y_2$ حيث y_j هو حل للمعادلة $a y_j''+b y_j'+c y_j=g_j(x)$ $(j=1,2)$

تمرين رقم 14

حل المعادلة التفاضلية $y''+y=x+e^x$ على $I=\mathbb{R}$

الحل

- المعادلة المتجانسة : المعادلة المميزة هي $r^2+r=0$ والحل هو : $y=c\cos x+d\sin x$
- لحل خاص لـ $y''+y=x$: $y=x$
- لحل خاص لـ $y''+y=e^x$ ، نجد $y=\frac{1}{2}e^x$
- **خلاصة:** الحل العام هو : $y=x+\frac{1}{2}e^x+c\cos x+d\sin x$

5.5 طريقة تغير الثابتين

ليكن y_1 و y_2 حلين مستقلين للمعادلة المتجانسة. نبحث عن حل خاص لـ (1) بالشكل $y=c\,y_1+d\,y_2$ حيث c و d دالتان تحققان: $c'y_1+d'y_2=0$. وكذلك $y'=c\,y_1'+d\,y_2'$، فتصبح المعادلة (1) كما يلي $a\left(c'y_1'+d'y_2'\right)=g(x)$.

(لأن $a y_j''+b y_j'+c y_j=0$ من أجل $j=1,2$)

إذن c' و d' هما حلين للجملة الآتية :

$$\begin{cases} c'y_1+d'y_2=0 \\ c'y_1'+d'y_2'=\frac{1}{a}g(x) \end{cases}$$

- تحل هذه الجملة بالتجريب لتعطي c' و d' ثم بالمكاملة للحصول على c و d.

تمرين رقم 15

حل المعادلة **الفاضلية:** $y''+y=e^x \quad (*)$

الحل

المعادلة المتجانسة : المعادلة المميزة هي $r^2+r=0$ والحل هو : $y_h=c\cos x-d\sin x$

حيث c و d من $\mathbb{R}$

الحلان $y_1=\sin x$ و $y_2=\cos x$ مستقلين.

نبحث عن حل من الشكل $y=c\cos x-d\sin x$ مع $c'y_1-d'y_2=0$,

c' و d' هما حلين للجملة :

$$\begin{cases} c'\sin x+d'\cos x=0 \\ c'\cos x+d'\sin x=e^x \end{cases}$$

إذن $c'=\frac{1}{w(x)}\begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ e^x & -\sin x \end{vmatrix}=e^x\cos x$ و $d'=\frac{1}{w(x)}\begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & e^x \end{vmatrix}=-e^x\sin x$

وبالمكاملة نحصل على مع الدالتين : $c=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)e^x$ ، $d=\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)e^x$

ومنه الحل الخاص $y_P=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)e^x+\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)e^x=\frac{1}{2}e^x$

والحل العام لـ $(*)$ يأخذ الشكل $y=y_P+y_h=y_P=\frac{1}{2}e^x+c\cos x-d\sin x$.

المراجع:

- K. Abdelkarim, *Exercices résolus d'analyse* (*avec rappel de cours*), Alger, OPU, 1993.
- E. Azoulay, *Mathématiques*: *cours et exercices*, tome 1, Paris, Mc Graw-Hill, 1983.
- S. Benachour, *Exercices d'analyse avec solutions*, tome 1, Alger, Khawarysm, 1991.
- J.-J. Colin, *Fonctions usuelles*: *exercices corrigés avec rappels de cours*, Paris, Cépaduès, 2007.
- Y. Dodge, *Mathématiques de base pour économistes*, Paris, Springer, 2002.
- G. Patrik, *Mathématiques pour l'économie*: *méthodes et exercices corrigés*, Belgique : de boeck, 2005.
- F. Pham, *Fonctions d'une ou deux variables*: des fonctions variables, Paris, Dunod, 2003.