Correction d'examen final (S1)

I. (5 points) **Questions de cours**

(1) Toute solution globale de l'équation $y' = f(t, y)$ est maximale.

Réponse: Vrai, car la solution globale est définie sur l'intervalle tout entier qui est l'intervalle de définition le plus grand possible. (1 point)

(2) Si $f \in C^1(I \times \Omega)$ alors f vérifie les conditions du théorème de Cauchy Lipschitz.

Réponse: Vrai, car

$$f \in C^1(I\times\Omega) \Longrightarrow \begin{cases} f \textit{ est continue sur } I \times \Omega \\ \quad et \\ f \textit{ est localement Lischitzienne par rapport } \ y. \end{cases} \qquad (\text{ 1 point })$$

(3) Soit y la solution de l'équation $y' = -y^2$ définie sur $J =]-\infty, 0[$ par $y(t) = \dfrac{1}{t}$, on a y est maximale.

Réponse: Vrai, car

$$\lim_{t \overset{<}{\mapsto} 0} \frac{1}{t} \qquad n'existe\ pas. \qquad (1\ point)$$

(4) Les solutions de l'équation $y' = e^t y + y^2$ sont de classe $C^3(J)$.

Réponse: Vrai, car
la fonction définie par $f(t, y) = e^t y + y^2$ est de $C^2(J)$. (1 point)

(5) Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, on a $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.

Réponse: Faux, La correction:si $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A{\cdot}e^B$. (1 point)

II. (4 points) **Exercice 01 :**

(1) Etudier le Lipschitziennité au voisinage de "0" de la fonction f qui définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(y) = 3\sqrt{|y|}.$$

Réponse: Au voisinage de $y = 0$, la fonction f n'est pas localement Lipschitzienne. En effet, pour $k > 0$ si on prend $y_1 = 0$ et $y_2 = \frac{u}{k^2}$, on aura

$$|f(y_2) - f(y_1)| = |3\sqrt{|y_2|} - 0| = \frac{6}{k} > k|\frac{u}{k^2} - 0| = k|y_2 - y_1|. \qquad (1.5\ point)$$

(2) Soit $a \geq 0$, vérifier que la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y(t) = \begin{cases} \frac{9}{4}(t-a)^2 \ si \ t > a \\ 0 \ si \ t \leq a. \end{cases}$$

est une solution du problème de Cauchy $y' = 3\sqrt{|y|}$

Réponse: On a pour $t = a, y(a) = 0$

$$\lim_{t \to a^+} \frac{y(t) - y(a)}{t - a} = \lim_{t \to a^+} \frac{\frac{9}{4}(t-a)^2 - 0}{t - a} = 0. \qquad (1\ point)$$

et

$$\lim_{t \to a^-} \frac{y(t) - y(a)}{t - a} = \lim_{t \to a^-} \frac{0 - 0}{t - a} = 0. \qquad (1\ point)$$

$$y'(t) = \begin{cases} \frac{9}{2}(t-a) \ si \ t > a \\ 0 \quad si \ t = a = 3\sqrt{|y(t)|} \\ 0 \quad si \ t < a. \end{cases} \qquad (0.5\ point)$$

Il vient que

$$y(t) = \begin{cases} \frac{9}{4}(t-a)^2 \ si \ t > a \\ 0 \ si \ t \leq a. \end{cases}$$

est un solution du problème de

$$\begin{cases} y'(t) = 3\sqrt{|y(t)|} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

III. (7 points) **Exercice 02 :**

On considère l'équation différentielle :

$$(E_2) : y'' = -y - \frac{5}{2}y' \text{ avec la condition initiale } \begin{cases} y(0) = a \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

(1) Résoudre ce problème sur $\mathbb{R}$.

Réponse: L'équation (E_2) est linéaire 2, homogène.
L'équation caractéristique associé est

$(EC) : r^2 + \frac{5}{2}r + 1 = 0, \quad s = \frac{25}{4} - 4 = \frac{25}{4} - \frac{16}{4} = \frac{9}{4}$

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{-\frac{5}{2} - \frac{3}{2}}{2} = \dfrac{-8}{4} = -2 \\ r_2 = \dfrac{-\frac{5}{2} + \frac{3}{2}}{2} = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2}. \end{cases}$$

Par conséquent les solutions de (E_2) sont les fonctions:

$$y(t) = \lambda e^{-2t} + \mu e^{\frac{-t}{2}} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Il reste à satisfaire la condition initiale.
Si $y(t) = \lambda e^{-2t} + \mu e^{\frac{-t}{2}} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a : (1 point)

$$\begin{cases} y(0) = a \\ y'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = a \\ -2\lambda - \frac{1}{2}\mu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = a - \mu \\ -2(a - \mu) - \frac{1}{2}\mu = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = a - \mu \\ -2a + 2\mu - \frac{1}{2}\mu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = a - \mu \\ -2a + \frac{3}{2}\mu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = a - \mu \\ -4a + 3\mu = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = a - \mu \\ \mu = \frac{+4}{3}a \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = a - \frac{4}{3}a \\ \mu = \frac{+4}{3}a \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{-1}{3}a \\ \mu = \frac{+4}{3}a. \end{cases}$$

Finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \frac{-a}{3}e^{-2t} + \frac{4}{3}ae^{\frac{-t}{2}}. \qquad (1 \textit{ point})$$

(2) Ecriture de (E_2) sous la forme $y' = Ay$.

Réponse: On a :

$$y'' = -y - \frac{5}{2}y' \Longrightarrow \begin{cases} y_1(t) = y(t) \\ y_2(t) = y'(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_1'(t) = y'(t) \\ y_2'(t) = y''(t) \end{cases} \qquad (0.5 \textit{ point})$$

Posons

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow y' = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}'$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y_1'(t) = y_2 \\ y_2'(t) = -y_1 - \frac{5}{2}y_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad (1 \textit{ point})$$

$$(E_2) \qquad \Longleftrightarrow y' = Ay \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

(3) Montrer qu'il existe des matrices D, P.

Réponse: C-à-d montrons que A diagonalisable.

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda T_r A + \det A = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \frac{5}{2} - \lambda \end{pmatrix}$$
$$= \lambda(\lambda + \frac{5}{2}) + 1 = \lambda^2 + \frac{5}{2}\lambda + 1$$
$$P_A(\lambda) = \lambda^2 + \frac{5}{2}\lambda + 1 \Longrightarrow \Delta = \frac{25}{4} - \frac{16}{4} = \frac{9}{4} > 0 \qquad (0.5 \; point)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{\frac{-5}{2} - \frac{3}{2}}{2} = \dfrac{-8}{4} = -2 \\ \lambda_2 = \dfrac{\frac{-5}{2} + \frac{3}{2}}{2} = \dfrac{-1}{2} \end{cases} \qquad (0.5 \; point)$$

Comme la matrice A est une matrice carrée avec deux valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable.

$$\exists P \in GL_2 \Longleftrightarrow A = P \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \qquad (0.5 \; point)$$

(4) Calculer l'exponentielle de matrice e^{tD}, puis donner l'expression de la solution du système différentiel $X' = DX$ avec la condition initiale $x(0) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$,

Réponse:

$$e^{tD} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tD)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n D^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & (\frac{-1}{2})^n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-2t)^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(\frac{-t}{2})^n}{n!} \end{pmatrix}$$

D'où

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-t}{2}} \end{pmatrix}$$

La solution du système $X' = DX$ sont de la forme :

$X(t) = e^{tD} X_0$ avec $X(0) = X_0$. Ainsi la solution cherchée est :

$$X(t) = e^{tD} X_0 = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-t}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} x_1 \\ e^{\frac{-t}{2}} x_2 \end{pmatrix} \qquad (2 \; point)$$

IV. (4 points) **Exercice 03 :**

(1) Résoudre le système différentiel :

$$y' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} y$$

Réponse: La solution du système $y' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} y$ est donnée pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$y(t) = e^{tA}C, \qquad y \in \mathbb{R}^2, \text{ ici } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = e^{t\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} -2t & t \\ 0 & -2t \end{pmatrix}} = e^{-2tI_2 + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = e^{-2t} \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

On peut facilement montrer que $\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nilpotente d'indice $m = 2$. Alors :

$$e^{tA} = e^{-2t}\left(I_2 + \frac{\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{1!}\right) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}. \qquad \text{(1 point)}$$

Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}^2. \qquad \text{(0.5 point)}$$

(2) La matrice résolvante.

Réponse: Soient $t, t_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A} = \begin{pmatrix} e^{-2(t-t_0)} & (t-t_0)e^{-2(t-t_0)} \\ 0 & e^{-2(t-t_0)} \end{pmatrix} \qquad \text{(1 point)}$$

• Une matrice fondamentale M :

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$M(t) = R(t, 0) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \qquad \text{(1 point)}$$

• Un système fondamental

$\{y_1, y_2\}$ est un système fondamental puisque y_1 et y_2 sont les colonnes de M.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$y_1 = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad y_2 = \begin{pmatrix} te^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}. \qquad \text{(0.5) } \textit{point}$$