
Examen Final (S1)

Questions de Cours:(05 pts)

Répondre par vrai ou faux. Justifier la proposition vrai et corriger la proposition faux.

1. Toute solution globale de l'équation $y' = f(t, y)$ est maximale.
2. Si $f \in C^1(I \times \Omega)$ alors f vérifie les conditions du théorème de Cauchy Lipschitz.
3. Soit y la solution de l'équation $y' = -y^2$ définie sur $J =]-\infty, 0[$ par $y(t) = \frac{1}{t}$. on a y est maximale
4. Les solutions de l'équation $y' = e^t y + y^2$ sont de classe $C^3(J)$.
5. Soient $A, B \in M_n(R)$, On a $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$

Exercice 1:(04 pts)

1. Étudier la lipschitziennité au voisinage de 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(y) = 3\sqrt{|y|}$.
2. Soit $a \geq 0$. Vérifier que la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y(t) = \begin{cases} \frac{9}{4}(t-a)^2 & t \succ a \\ 0 & t \preceq a \end{cases}$$

est solution du problème de Cauchy $y'(t) = 3\sqrt{|y(t)|}$.

Exercice 2:(07 pts)

On considère l'équation différentielle $(E_2) : y'' = -y - \frac{5}{2}y'$ avec la condition initiale $y(0) = a, y'(0) = 0$.

1. Résoudre ce problème sur $\mathbb{R}$.
2. Réécrire l'équation différentielle (E_2) comme un système différentiel $Y' = AY$.
3. Montrer qu'il existe des matrices D diagonale, P inversible, telle que $A = PDP^{-1}$.

4. Calculer l'exponentielle de matrice e^{tD} , puis donner l'expression de la solution du système différentiel $X' = DX$ satisfaisant la condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Exercice 3:(04 pts)

1. Résoudre le système différentiel $y' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} y \dots\dots\dots (H)$
2. Déterminer la matrice résolvante, une matrice fondamental et un système fondamental du système (H) .