EMD 01

تصحيح نموذجي

تمرين 1 [5]

- كل دالة تقبل الاشتقاق، تكون قابلة للمكاملة. صحيح ☒ ، خطأ ☐ (2)

- f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بالشكل: $f(x)=\dfrac{e^{-x}-1}{x}$

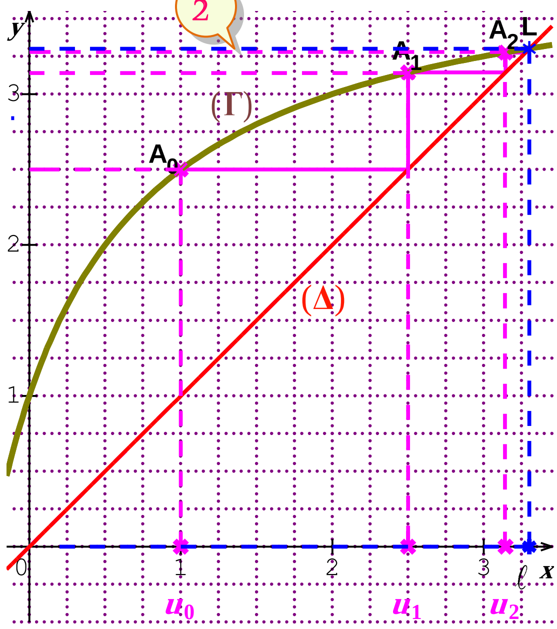
(1.5) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$ ☒ ، f تقبل الاشتقاق عند $x=0$ ☐

- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $f(x)=\ln(1+e^{-x})-x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0^+$ ☐ ، f متناقصة على $\mathbb{R}$ ☒ (1.5)

تمرين 2 [5] يرمز (Γ) لمنحنى الدالة $f(x)=\dfrac{4x+1}{x+1}$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

(u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$: $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{4u_n+1}{u_n+1} &, n\ge 0\end{cases}$



1. الحدود u_1 و u_2 و u_3. والنهايات الممكنة لـ (u_n)

(1)
- لدينا: $u_0=1$ ، $u_1=2.5$ ، $u_2\simeq 3.14$ ، $u_3\simeq 3.28$
- إذا تقاربت (u_n) نحو ℓ، فإنها تحقق: $\ell=\dfrac{4\ell+1}{\ell+1}$،

أي $\ell^2-3\ell+1=0$ ومنه $\ell=\dfrac{\sqrt{13}\pm 3}{2}$.

2. استخدام المنحنى (Γ) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$، لإنشاء النقط A_0 و A_1 و A_2 و A_3 على (Γ) ذات الفواصل u_0 و u_1 و u_2 و u_3 (الشكل المرفق).

3. نثبت بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ يكون $1\le u_n<(\sqrt{13}+3)/2$

بدء التراجع مُحقق. بفرض أن $1\le u_n<(\sqrt{13}+3)/2$ بما أن f متزايدة: $f(1)\le f(u_n)<f((\sqrt{13}+3)/2)$

وبالتالي $5/4\le f(u_n)<(\sqrt{13}+3)/2$ ومنه أيضا $1\le u_{n+1}<(\sqrt{13}+3)/2$ وهو المطلوب.

إذن $1\le u_n<(\sqrt{13}+3)/2$ والمتتالية (u_n) محدودة (من الأعلى والأسفل). (1)

4. تزايد المتتالية (u_n) وتقاربها. وتعيين نهايتها.

إشارة: $u_{n+1}-u_n=(u_n^2-3u_n-1)/(u_n+1)$ ، $u_{n+1}-u_n=(4u_n+1)/(u_n+1)-u_n$ ، موجبة على

المجال $I=\left[1;\ (\sqrt{13}+3)/2\right[$ الذي يشمل جميع حدود (u_n)، وبالتالي (u_n) متزايدة من أجل كل n من $\mathbb{N}$.

1

وبما أن (u_n) محدودة من الأعلى، فهي إذن متقاربة. وتتقارب نحو $\ell=(\sqrt{13}+3)/2\simeq 3.30$.

تمرين 3 [10]

1. نبين أن الدالة $F(x)=\int_0^x (1-\ln(1+t))\,dt$ مستمرة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$

$F(x)$ معرفة تماما، لأن $f(x)=1-\ln(1+x)$ معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}^*$، و $F(x)$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$:

2.5

$$F'(x)=\left(\int_0^x (1-\ln(1+t))dt\right)'=1-\ln(1+x)=f(x)$$

2. تحقيق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x)=1-\ln(1+x)$ في المجال $[0;1]$

$f(x)$ مستمرة على المجال $[0;1]$ و $f(x)$ تقبل الاشتقاق على $]0;1[$. حسب نظرية التزايدات المنتهية،

يوجد على الأقل α من $]0;1[$: $f'(\alpha)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}$. إذن نحل في $]0;1[$، المعادلة:

2.5

$f'(x)=\dfrac{(1-\ln 2)-1}{1-0}$ التي تكافئ $\dfrac{-1}{1+x}=-\ln 2$. ومنه الحل $\alpha=\dfrac{1}{\ln 2}-1\approx 0.44$

3. نستخدم طريقة التكامل بالتجزئة لحساب $\int \ln(1+x)\,dx$

$$\int \ln(1+x)dx=x\cdot\ln(1+x)-\int\frac{x}{1+x}dx=x\cdot\ln(1+x)-\int\frac{x+1-1}{1+x}dx$$

$$=x\cdot\ln(1+x)-\int(1-\frac{1}{1+x})dx=x\cdot\ln(1+x)-x+\ln(1+x)+c\quad /c\in\mathbb{R}$$

2.5

4. تعيين القيمة المتوسطة β للدالة $f(x)=1-\ln(1+x)$ على $[0;1]$

الدالة $f(x)=1-\ln(1+x)$ مستمرة على المجال $[0;1]$، فهي تقبل المكاملة على $[0;1]$.

25

حسب نظرية المتوسط، فإنه توجد نقطة β من المجال $]0;1[$ بحيث: $f(\beta)=\dfrac{1}{1-0}\int_0^1 f(t)\,dt$.

$$f(\beta)=\int_0^1(1-\ln(1+t))\,dt=\left[2x-(1+x)\ln(1+x)\right]_0^1=2-2\ln 2$$

نحل المعادلة $f(x)=2-2\ln 2$ في المجال $]0;1[$، أي نحل المعادلة: $1-\ln(1+x)=2-2\ln 2$،

نجد القيمة المتوسطة β لـ $f(x)$ على المجال $[0;1]$ حيث: $\beta=e^{2\ln 2-1}-1=\dfrac{4}{e}-1\simeq 0.471$

5. في المعادلة التفاضلية: $y'(x)-3\cdot y(x)=2x\,e^{3x}\ \ldots\ (1)$

0.5

- المعادلة التفاضلية المتجانسة المرفقة بـ(1) هي: $y'(x)-3\cdot y(x)=0\ \ldots\ (2)$ صحيح ☒، خطأ ☐
- الحل العام y_1 لـ(2) هو: $y_1(x)=c\cdot e^{-3x^2}$ (c من $\mathbb{R}$) ☐، $y_1(x)=c\cdot e^{3x}$ (c من $\mathbb{R}$) ☒
- حل خاص y_0 للمعادلة (1) هو: $y_0(x)=2x\,e^{3x}$ ☐، $y_0(x)=x^2e^{3x}$ ☒

0.75 0.75

- الحل العام y للمعادلة (1) هو: $y(x)=y_1(x)+y_0(x)=c\cdot e^{3x}+x^2e^{3x}$ (c من $\mathbb{R}$)

0.5