جامعة الجيلالي بونعامة بخميس مليانة

معهد العلوم الاقتصادية — السنة الأولى LMD — المجموعة الثانية — (2016/17)

الرياضيات 1 — $1^{سا}\ 30$ — 11-01-2017

EMD 1

تصحيح نموذجي

ضع إشارة (×) في الخانة التي تُعبر عن الإجابة الصحيحة، أو أكمل الفراغات بإجابات صحيحة :

تمرين 1 [4.5]

- كل دالة مستمرة تقبل الاشتقاق. خطأ ☒ ، صحيح ☐ (1.5)
- f دالة معرفة على $[0;+\infty[$ بالشكل : $f(x)=\ln(1+e^{-x})$ (1.5)

f متزايدة على $[0;+\infty[$ ☐ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ ☒

- g دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=\begin{cases} e^x\ln(x-1), & x\in]-1;0[\cup]0;+\infty[\\ 0 \quad, & x=0\end{cases}$

الدالة g مستمرة عن يمين (-1) ☐ ، الدالة g تقبل الاشتقاق عند الصفر ☒ . (1.5)

تمرين 2 [6.5]

أ) • نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+4[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{-x-1}{x-4}$

يرمز (Γ) لتمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. نبين أن f متزايدة على $I=\left]\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};\dfrac{3}{2}\right[$. (1)

الدالة f تقبل الاشتقاق على I: $f'(x)=\dfrac{5}{(x-4)^2}$. إذن الدالة f متزايدة على $\left]\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};\dfrac{3}{2}\right[$

ب) • نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$، بـ: $\begin{cases} u_0=\dfrac{3}{2} \\ u_{n+1}=\dfrac{-u_n-1}{u_n-4} \quad, n\geq 0\end{cases}$

1. الحدود u_1 و u_2 و u_3 . والنهايات الممكنة للمتتالية (u_n) (1)

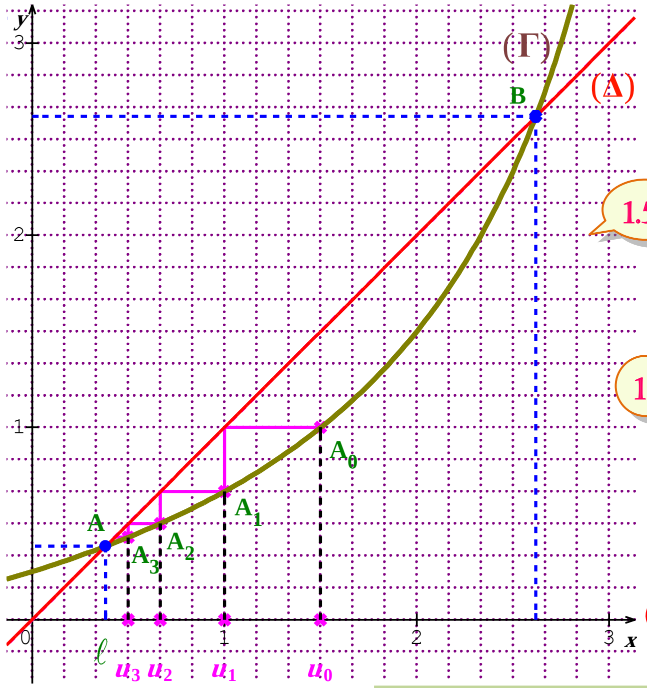
• بالحساب، نحصل على: $u_0=\dfrac{3}{2}=1.5$ ، $u_1=1$ ، $u_2=\dfrac{2}{3}\approx 0.667$ ، $u_3=\dfrac{1}{2}=0.5$. (1)

• إذا تقاربت (u_n) نحو ℓ، فإنها تحقق: $\ell=\dfrac{-\ell-1}{\ell-4}$، أي $\ell^2-3\ell+1=0$ ومنه $\ell=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ أو $\ell=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

2. استخدام المنحنى (Γ) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$، لإنشاء النقط A_0 و A_1 و A_2 و A_3 على (Γ) ذات الفواصل u_0 و u_1 و u_2 و u_3 على الترتيب (الشكل في الصفحة الثانية)

3. أثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، يكون $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<u_n\leq\dfrac{3}{2}$. (1)

بدء التراجع مُحقق. نفرض أن $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<u_n\leq\dfrac{3}{2}$. بما أن f متزايدة على I يكون $f\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)<f(u_n)\leq f\left(\dfrac{3}{2}\right)$



أي $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < f(u_{n+1}) \leq 1 < \frac{3}{2}$

وبالتالي $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < u_n \leq \frac{3}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

ومنه (u_n) محدودة (من الأعلى والأسفل)

1.5

4. تناقص المتتالية (u_n)، وتقاربها .

بوضع $u_n = x$ و $u_{n+1} = f(x)$ ، نجد المقدار

$f(x) - x = \frac{-x^2+3x-1}{x-4}$ وهو سالب على I،

الذي يشمل جميع حدود المتتالية (u_n). ومنه (u_n)

متناقصة تماما، وهي أيضا محدودة من الأسفل، فهي

متقاربة. (u_n) تتقارب نحو $\ell = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) \approx 0.382$

1

تمرين 3 [3]

نعتبر الدالة $F(x) = \int_1^x (\ln t)^2 dt$.

1. نبين أن الدالة $F(x)$ مستمرة وتقبل الاشتقاق على $J =]0;+\infty[$ ، وحساب مشتقتها $f(x)$. 1

$F(x)$ معرفة تماما، لأن $f(x) = (\ln x)^2$ مستمرة وتقبل الاشتقاق على J: $F'(x) = (\ln x)^2 = f(x)$

2. تعيين القيمة المتوسطة c لـ $f(x) = (\ln x)^2$ على $I = [1;3]$.

الدالة $f(x) = (\ln x)^2$ مستمرة على المجال $[1;3]$، فهي تقبل المكاملة على I .

2

حسب نظرية القيم المتوسطة، فإنه توجد نقطة c من المجال $]1;3[$: $f(c) = \frac{1}{3-1}\int_1^3 f(t)\,dt$.

$$f(c) = \frac{1}{3-1}\int_1^3 (\ln t)^2 dt = \frac{1}{2}\left[2x - 2x(\ln x) + x(\ln x)^2\right]_1^3 = \frac{3}{2}(\ln 3)^2 - 3\ln 3 + 2 = 2$$

نحل $f(x) = 2$ في $]1;3[$ ، المكافئة لـ $(\ln x)^2 = 2$ ، نجد القيمة المتوسطة c لـ $f(x)$ على I : $c = e \approx 2.718$.

تمرين 4 [6]

نعتبر المعادلة التفاضلية: $(1) \ldots\ x\,y'(x) + y(x) = \frac{1}{2}\frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}$ 1

- المعادلة التفاضلية المتجانسة المرفقة بـ(1) هي: $(2) \ldots\ x\,y'(x) + y(x) = 0$ صحيح ☒ ، خطأ ☐
- الحل العام y_1 لـ(2) هو: $y_1(x) = c \cdot e^{-x}$ (c من $\mathbb{R}$) ☐ ، $y_1(x) = \frac{c}{x}$ (c من $\mathbb{R}$) ☒ 1
- حل خاص y_2 للمعادلة (1) هو: $y_2(x) = \frac{\sqrt{e^x+1}}{x}$ ☒ 2 ، $y_2(x) = -x\sqrt{e^x+1}$ ☐
- الحل العام y للمعادلة (1) هو : 1 $y(x) = y_1(x) + y_2(x) = \frac{c}{x} + \frac{\sqrt{e^x+1}}{x}$ (c من $\mathbb{R}$)
- حل خاص y_3 للمعادلة (1) ، يحقق لشرط الابتدائي $y(1) = \sqrt{e+1}$ هو: .... $y_3(x) = \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{e^x+1}}{x}$ 1