2

Corrélation quantiques

2.1 Introduction

Nous incursions dans le monde quantique, ce sont jusqu'à présent limités aux états à un quanton. L'objet de ce chapitre est la description d'états à deux quantons qui conduisent à des configurations très riches dites intriquées ou corrélées. Ces corrélations sont à la base du calcul quantique.

2.2 Produit tensoriel et états intriquées

2.2.1 Etats

Soient deux systèmes physiques isolés $(S1)$ et $(S2)$, d'espaces d'états correspondant respectifs H_1 et H_2. Si on considère l'ensemble de ces deux états comme un système unique (S), quel est l'espace des états H associe?

Définition 01 Par définition, l'espace d'états H est appelé "produit tensoriel" de H_1 et H_2 et noté $H = H_1 \otimes H_2$, si à tout couple de vecteurs, $(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle) \in H_1 \times H_2$, on associe un vecteur de H, noté $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ et appelé produit tensoriel de $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$, tel que cette correspondance soit linéaire par rapport à la multiplication par des scolaires, et distributive par rapport à l'addition vectorielle:

$$\begin{aligned} [|\psi_1\rangle + \lambda |\psi_1'\rangle] \otimes |\psi_2\rangle &= |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle + \lambda |\psi_1'\rangle \otimes |\psi_2\rangle \\ |\psi_1\rangle \otimes [|\psi_2\rangle + \lambda |\psi_2'\rangle] &= |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle + \lambda |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2'\rangle \end{aligned}$$

pour des raisons de simplicité, on note le plus souvent

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle\, |\psi_2\rangle = |\psi_1 \psi_2\rangle$$

Définition 02 Le produit scalaire sur $H = H_1 \otimes H_2$ se définit de la manière suivante:

$$\langle \psi_1' \psi_2' \, | \psi_1 \psi_2 \rangle = \langle \psi_1' \, | \psi_1 \rangle \, \langle \psi_2' \, | \psi_2 \rangle$$

Si $\{|n\rangle\}$ est une base orthonormée de H_1, et $\{|m\rangle\}$ est une base orthonormée de H_2 telles que

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \, |n\rangle \\ |\psi_2\rangle &= \sum_{m=1}^{M} \alpha_m \, |m\rangle \end{aligned}$$

$$|\psi_1 \psi_2\rangle = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \alpha_m \, |n \ m\rangle$$

$$\langle n' \ m' \, | n \ m\rangle = \delta_{n \ n'} \ \delta_{m \ m'}$$

exemple On considère dans la base $\{|0\rangle\,, \ \ |1\rangle\}$ les vecteurs d'état

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{|0\rangle - |1\rangle\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{|0\rangle + |1\rangle\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dans la base $\{|00\rangle\,, \ \ |01\rangle\,, |10\rangle\,, \ \ |11\rangle\}$, le produit tensoriel $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ a pour matrice

$$
\begin{aligned}
|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\,|\psi_2\rangle \\ -1\,|\psi_2\rangle \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2.2.2 Opérateurs

Soient A et B deux opérateurs agissant respectivement dans H_1 et H_2, on peut construire un opérateur $A \otimes B$ agissant dans $H = H_1 \otimes H_2$ tel que:

$$A \otimes B\,|\psi_1\psi_2\rangle = A\,|\psi_1\rangle \otimes B\,|\psi_2\rangle$$

Si A et B sont des opérateurs hermitiens, alors $A \otimes B$ est opérateur hermitien.
Une classe simple des opérateurs de H est $A \otimes I_B$ et $I_A \otimes B$
Il est à noter que

$$(A \otimes B)\,(C \otimes D) = (AC \otimes BD)$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
[A \otimes I_B,\ I_A \otimes B] &= (A \otimes I_B)\,(I_A \otimes B) - (I_A \otimes B)\,(A \otimes I_B) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Si $|\psi_1\rangle$ est vecteur propre de l'opérateur A avec la valeur propre a,

$$A\,|\psi_1\rangle = a\,|\psi_1\rangle\,,$$

alors $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ est aussi vecteur propre de $A \otimes I_B$ avec la valeur propre a :

$$
\begin{aligned}
A \otimes I_B\,|\psi_1\psi_2\rangle &= A\,|\psi_1\rangle \otimes I_B\,|\psi_2\rangle \\
&= a\,|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \\
&= a\,|\psi_1\psi_2\rangle
\end{aligned}
$$

en supprimant le produit tensoriel

$$A\,|\psi_1\psi_2\rangle = a\,|\psi_1\psi_2\rangle$$

Exemple 01

La matrice représentant le produit tensoriel des matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est:

$$\begin{aligned} \sigma_x \otimes \sigma_z &= \begin{pmatrix} 0\cdot\sigma_z & 1\cdot\sigma_z \\ 1\cdot\sigma_z & 0\cdot\sigma_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Exemple 02

La matrice représentant le produit tensoriel des matrices de Pauli

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est:

$$\begin{aligned} \sigma_z \otimes \sigma_x &= \begin{pmatrix} 1\cdot\sigma_x & 0\cdot\sigma_x \\ 0\cdot\sigma_x & -1\cdot\sigma_x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Nous remarquons que $\sigma_x \otimes \sigma_z \neq \sigma_z \otimes \sigma_x$

2.2.3 Etats corrélés

Soient deux qubits de H_A et H_B

$$\begin{aligned}|\varphi_A\rangle &= \alpha_0 |0_A\rangle + \alpha_1 |1_A\rangle \\ |\varphi_B\rangle &= \beta_0 |0_B\rangle + \beta_1 |1_B\rangle\end{aligned}$$

Le produit tensoriel $|\varphi_A\rangle \otimes |\varphi_B\rangle$ est donné par

$$\begin{aligned}|\varphi_A\rangle \otimes |\varphi_B\rangle &= |\varphi_A \varphi_B\rangle \\ &= \alpha_0\beta_0 |0_A 0_B\rangle + \alpha_0\beta_1 |0_A 1_B\rangle + \alpha_1\beta_0 |1_A 0_B\rangle + \alpha_1\beta_1 |1_A 1_B\rangle \qquad (2.3)\end{aligned}$$

Un vecteur arbitraire $|\psi\rangle$ de H est

$$|\psi\rangle = a |0_A 0_B\rangle + b |0_A 1_B\rangle + c |1_A 0_B\rangle + d |1_A 1_B\rangle \qquad (2.4)$$

ce vecteur n'est en général pas de la forme (2.3):

en comparant (2.3) et (2.4), on note que pour que $|\psi\rangle$ soit de la forme $|\varphi_A\rangle \otimes |\varphi_B\rangle$ (produit tensoriel), une condition nécessaire et suffisante est que:

$$\begin{aligned}a &= \alpha_0\beta_0,\ b = \alpha_0\beta_1,\ c = \alpha_1\beta_0,\ d = \alpha_1\beta_1 \\ &\Rightarrow ad = bc\end{aligned}$$

ce qui à priori n'a aucune raison d'être valide.

Lorsque $|\psi\rangle$ n'est pas de la forme (2.3), on dit qu'il est dans un état intriqué ou corrélé.

C'est par exemple le cas de

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A 1_B\rangle + |1_A 0_B\rangle)$$

qui est manifestement intriqué puisque

$$\begin{aligned}a &= 0,\ b = c = \frac{1}{\sqrt{2}},\ d = 0 \\ &\Rightarrow ad \neq bc\end{aligned}$$

2.3 Théorème de Bell et interférences des états corrélés

2.3.1 L'analyse EPR

Cette analyse est celle d'Einstein, Podolsky et Rosen en 1935. Ils utilisèrent la notion d'état corrélés pour montrer l'opposition entre la théorie quantique et une théorie réaliste et locale du monde physique. L'analyse s'appuie sur deux principes.

Principe 1: Réalité : Si, sans perturber localement un système, on peut prévoir avec certitude la valeur d'une de ses grandeurs physiques alors il existe un élément de réalité associé à cette grandeur.

Principe 2 : Localité : Au moment de la mesure, les deux systèmes n'interagissent plus et sont dans des régions locales de l'espace temps, qui ne peuvent pas être causalement reliées, alors rien de ce que l'on fait au premier système ne peut modifier le second.

A la suite de ces hypothèses, ils font les constants suivants:

- Une théorie complète doit prédire les valeurs précises de tous les éléments de réalité.
- Les deux orientations du spin sont des éléments de réalité.
- Pourtant, la théorie quantique ne peut pas prédire ces orientations de spins.
- La théorie quantique est donc incomplète!

Il faut donc, sans contester en introduisant un niveau supplémentaire de description plus détaillé. Cependant, en 1964, John Bell montre qu'il n'est pas possible de comprendre dans leur totalité les corrélations EPR en complétant le formalisme quantique dans l'esprit suggéré par Einstein.

2.3.2 Théorème de Bell

L'objet de ce théorème est de fournir un critère pour tester expérimentalement l'hypothèse que l'information qui détermine les corrélations quantiques est établie à la source.

Théorème de Bell Il existe un nombre positif X calculable à partir de corrélations observées, tel que:

1 - X est toujours inférieur où égal à 2 si les corrélations sont établies à la source.

2 - X peut dépasser 2 lorsque les corrélations sont dues à l'intrication.

$X \leq 2$ est appelée inégalité de Bell. si $X > 2$, on dit que les corrélations violent l'inégalité de Bell. Les corrélations qui voilent une inégalité de Bell ne peuvent être produites à la source.

Démonstration Pour cela, on a besoin de deux conditions supplémentaire.

1 - Sur chaque quanton qu'elle reçoit, Alice choisit parmi deux mesures $A \equiv A_+$ et $A' \equiv A_-$; de même Bob choisit entre $B \equiv B_+$ et $B' \equiv B_-$. On a donc quatre possibilités de mesures sur chaque paire de quantons:

$$(A,\ B)\,,\ (A',\ B)\,,\ (A,\ B')\ \text{ et }\ (A',\ B')\,.$$

2 - Chacune des mesures A, A', B et B' ne peut donner que deux résultats $+1$ et -1. Donc chaque paire ne peut valoir que $+2$ et -2.

On définit le nombre

$$X = A\left(B + B'\right) + A'\left(B - B'\right).$$

Alors X peut prendre les valeurs $+2$ et -2 :

En effet, si $B' = B,\ B' + B = \pm 2$

si $B' = -B,\ B' - B = \pm 2$

Malheureusement, on ne peut pas mesurer X sur chaque paire de quantons, car Alice mesure soit A soit A', jamais les deux à la fois.

Mais on peut mesurer la valeur moyenne de X sur un grand nombre de paires de quantons, car

$$\langle X\rangle = \langle AB\rangle + \langle AB'\rangle + \langle A'B\rangle - \langle A'B'\rangle$$

Selon l'hypothèse, $|\langle X\rangle| \leq 2$.