Université Djilali Bounaama
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département MI
2023–2024

$2^{ème}$ année maths
Module : Logique math

Série d'exercices N°04 : Ensembles finis, infinis, dénombrables

<u>Exercice 01 :</u> Soit $m \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble

$$X_m = \{q \in \mathbb{Q} /\ 0 \leq q \leq 1 \text{ et } mq \in \mathbb{Z}\}$$

Montrer que X est fini et déterminer son cardinal $Card\ X$

<u>Exercice 02 :</u> Soient E et F deux ensembles finis. Soit $f : E \longmapsto F$ une application.

1) Alors $f(E)$ est fini et $Card\ f(E) \leq \min(Card\ E; Card\ F)$.
2) $Card\ f(E) = Card\ E \Leftrightarrow f$ est injective.
3) $Card\ f(E) = Card\ F \Leftrightarrow f$ est surjective.

En déduire que

4) $Card\, E = Card\, F \Longrightarrow (f$ est *injective* $\Longleftrightarrow f$ est *surjective* $\Longleftrightarrow f$ est *bijective*$)$

<u>Exercice 03 :</u> Montrer que $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sont dénombrables.

<u>Exercice 04 :</u> Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ ne sont pas dénombrable.

<u>Exercice 05 :</u> On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ (n, m) \quad = \quad f(n, m) = 2^m(2n + 1) \end{aligned}$$

1. Montrer que cet application est injective, et en déduire que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.
2. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^k$ est dénombrable.
3. En déduire que le produit d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

<u>Exercice 06 :</u> Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ?

1. $\{2^n;\ n \geq 0\}$
2. $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$
3. $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\right\}$
4. l'ensemble des nombres premiers.
5. l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Solution

Exercice 2 : Pour prouver que X_m est fini, nous avons par définition besoin d'un nombre naturel n choisi pour pouvoir construire une bijection de $[0, n]$ vers X_m. Pour comprendre ce que pourrait être n, jetons un coup d'œil à quelques exemples de X_m

$$\begin{aligned} m &= 1 : Xm = \{0,1\}, m = 2 : Xm = \{0,1/2,1\}, m = 3 : Xm = \{0,1/3,2/3,1\}, \\ m &= 4 : Xm = \{0,1/4,1/2,3/4,1\}. \end{aligned}$$

Il semble donc que $Card\ X_m$ devrait être $m + 1$. En effet, cela a également un sens mathématique : si $mq \in \mathbb{Z}$, alors nous devrions pouvoir penser à q de dénominateur m, de sorte que les dénominateurs s'annulent. Le nombre de rationnels différents entre 0 et 1 ayant pour dénominateur m est certainement $m + 1$.

Maintenant, pour prouver formellement que $Card\ X_m = m + 1$, nous devons construire une bijection de $[0, m + 1]$ vers X_m.

Définisson :

$$f : \begin{cases} [1, m+1] \longmapsto X_m, \\ k \longmapsto f(k) = \frac{k-1}{m}, \end{cases}$$

donc f est une fonction bien définie. Nous souhaitons établir que f est bijective.

Injectivité : Soient $k, j \in [0, m + 1]$ avec $f(k) = f(j)$. Alors $\frac{k-1}{m} = \frac{j-1}{m}$, donc clairement $k = j$. Donc f est injectif.

Surjectivity : Soientt q$\in$ X_m. Alors mq $\in \mathbb{Z}$, soit $k = mq$, donc $q = k/m$. Par définition de X_m, il faut que $0 \leq k \leq m$. Par conséquent, $1 \leq k + 1 \leq m + 1$, et donc $k+1 \in [0, m+1]$. De plus, $f(k+1) = \frac{k+1-1}{m} = \frac{k}{m} = q$. Donc f est surjectif.

Puisque f est à la fois injectif et surjectif, il est bijectif, et donc X_m est fini, avec $Card\ X_m = m + 1$.

Exercice 2 :

1) Cette inégalité signifie : $Card\ f(E) \leq Card\ E$ et $Card\ f(E) \leq Card\ F$.

• $f(E)$ est une partie de F (fini) donc est fini et $Card\ f(E) \leq Card\ F$.

• Comme f est une application, à tout élément x de E on associe seulement un élément y de F , qui est alors, par définition, dans $f(E)$. Ainsi : $Card\ f(E) \leq Card\ E$.

2) L'égalité ($Card\ E = Card\ f(E)$) siginifie qu'il y a autant d'éléments dans E que d'éléments dans $f(E)$. Autrement dit, tout élément de $f(E)$ n'est atteint qu'une fois par f, ce qui signifie que f est injective.

3) On a égalité ($Card\ F = Card\ f(E)$) ssi $F = f(E)$ (ce qui signifie que f est surjective).

4) On suppose Card E = Card F . D'après la proposition 3, on a :

$$
\begin{aligned}
finjective &\iff Card\ f(E) = Card\ E \\
&\iff Card\ f(E) = Card\ F \\
&\iff f\ surjective
\end{aligned}
$$

,

,