Université Djilai Bounaama — **$2^{ème}$ année maths**
Faculté des Sciences et de la Technologie — **Module : Logique math**
Département MI
2023–2024

Série d'exercices N^0 :02

<u>Exercice 01 :</u> Formalisez les propositions suivantes en utilisant uniquement les prédicats indiqués, les connecteurs et les quantificateurs :
1. Personne n'est parfait : $[p(x) : x \text{ est parfait}]$.
2 . L'entier 0 est multiple de chaque nombre entier

$$[m(x, y) : x \text{ est multiple de } y\,;\, e(x) : x \text{ est un entier}] .$$

3. Les absents n'ont pas tous tort $[a(x) : x \text{ est absent}\,;\, t(x) : x \text{ a tort}]$.

<u>Exercice 02 :</u> On Considère les prédicats
$amis(x, y)$: x et y sont amis et une constante
$joue(x, y)$: x joue avec y et un prédicat d'égalité.
$self$: représente l'individu qui s'exprime.
Traduire en language courant les formules suivantes :
1. $\forall x, (joue(self, x) \Rightarrow ami(self, x))$
2. $\forall x, \exists y, ami(x, y)$
3.$\neg(\exists x, (joue(self, x) \wedge ami(self, x)))$
4. $\exists x\ y, (amis(self, x) \wedge amis(self, y) \wedge \neg(x = y))$

<u>Exercice 03 :</u> Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On considère la proposition P suivante :

$$P : \exists t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < t$$

1. Écrire la négation de P.
2. Donner un exemple de fonction f qui vérifie P, un exemple qui ne vérifie pas P.
3. Parmi les propositions ci-dessous, déterminer celles qui sont équivalentes à P, celles qui sont toujours vraies, celles qui sont toujours fausses, et celles pour lesquelles on ne peut rien dire.

$$\begin{aligned} P_1 &: \exists x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) < x, \\ P_2 &: \exists t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(t) < x, \\ P_3 &: \forall t \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < t, \\ P_4 &: \forall t \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R},\ f(t) < x. \end{aligned}$$

<u>Exercice 04 :</u> Ecrivez la négation des formules suivantes :
1. $\forall x(p(x) \Rightarrow q(x))$ 2. $\exists x(p(x) \wedge q(x))$

3. $\forall x(p(x) \Leftrightarrow q(x))$ 4. $\exists x \forall y(q(x,y) \Rightarrow p(x,y) \vee r(x,y))$
5. $\forall x \exists y(p(x,y) \Leftrightarrow q(x,y))$ 6. $\forall x(\exists y p(x,y) \Rightarrow r(x))$
7. $\forall x \exists y p(x,y) \Rightarrow \forall z r(z)$ 8. $\forall x(r(x) \Rightarrow \exists y p(x,y))$

Exercice 05 : Soit x une variable prenant ses valeurs dans l'alphabet habituel et soient les prédicats :
$cons(x)$: x est une consonne, $voy(x)$: x est une voyelle
Expliquer dans chaque cas l'affirmation donnée par les propositions suivantes :
1. $\forall x(cons(x) \vee voy(x))$
2. $(\forall x cons(x)) \vee (\forall x voy(x))$
3. $(\exists x cons(x)) \wedge (\exists x voy(x))$
4. $\exists x(cons(x) \wedge voy(x))$.