جامعة الجيلالي بونعامة - خميس مليانة
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السداسي الأول

المجموعات: 2 و 3 و 4

السنة الأولى جذع مشترك LMD

رياضيات 01

من مطبوعة :

الرياضيات للتخصصات الاقتصادية

ملخص درس : الاشتقاق والدوال العددية و تطبيقات

1. عموميات حول الدوال العددية
2. النهاية
3. الاستمرار
4. الاشتقاق
5. الدوال القابلة للاشتقاق
6. الدالة العكسية
7. تطبيقات المشتقات
8. الدوال اللوغاريتمية والأسية
9. تمارين محلولة

السنة الجامعية 2023 -2024

1. عموميات حول الدوال العددية

1.1 تمهيد ومراجعة

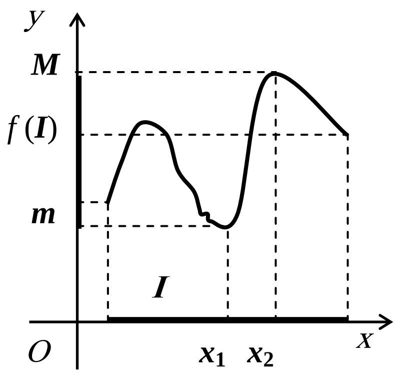
- الدالة العددية (الحقيقية) لمتغير حقيقي: هي الدالة التي مجموعة بدئها $\mathbb{R}$، ومجموعة وصولها هي $\mathbb{R}$.
  ونكتب $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $x \mapsto f(x)$
- **مجموعة التعريف دالة:** هي مجموعة القيم x التي تجعل $f(x)$ معرفة.
- **الدالة الزوجية** تحقق: $\forall x \in D_f \quad -x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)$
- **الدالة الفردية** تحقق: $\forall x \in D_f \quad -x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)$
- تكون الدالة f **دورية** إذا وجد عدد حقيقي غير معدوم T: $\forall x \in D_f \quad f(x+T) = f(x)$
- **بيان** الدالة f $(\supset \mathbb{R}\times\mathbb{R})$ هو منحنى المعادلة $f(x) = 0$ في معلم كيفي للمستوى.
- **المجالات المفتوحة** في $\mathbb{R}$ تكون من الشكل: $\{\ \},]a,+\infty[,]-\infty,b[,]a,b[$ حيث a و b من $\mathbb{R}$ مع $a<b$.
- **الدالة** المتزايدة: $\forall a,b \quad b \neq a \quad \Rightarrow \quad \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq 0$
- **الدالة المتزايدة تماما:** $\forall a,b \quad b \neq a \quad \Rightarrow \quad \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$

تعريف مشابه للدالة المتناقصة.

- **الدالة الرتيبة** هي الدالة التي تكون إما متزايدة وإما متناقصة.
- **دالة رتيبة على مجال** هي الدالة التي يكون اقتصارها على هذا المجال رتيبة.

2.1 صورة مجال مغلق بدالة مستمرة

كل دالة f مستمرة على مجال مغلق I، تكون محدودة من الأعلى بحدها الأعلى $M = \text{Sup} f$ ومحدودة من الأدنى بحدها الأدنى $m = \text{Inf} f$ (الشكل **1** يوضح $[m, M] = f(I)$) .



شكل 1

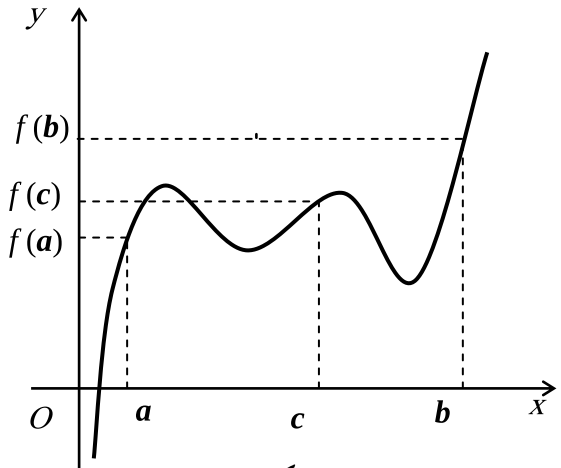
3.1 نظرية القيم المتوسطة

f دالة معرفة ومستمرة على $[a,b]$

من أجل كل قيمة y محصورة بين $f(a)$ و $f(b)$،

توجد قيمة c محصورة بين a و b بحيث $y=f(c)$

(الشكل **2** يوضح $f(c)$ بين $f(a)$ و $f(b)$).



شكل 2

نتيجة

إذا كانت f معرفة ومستمرة على مجال مغلق ومحدود $[a,b]$، بحيث يكون $f(a)$ و $f(b)$ من إشارتين مختلفتين، فإن f تنعدم على الأقل عند قيمة c من $]a,b[$.

4.1 أمثلة

- **كثير الحدود** $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ $(0<a_3)$ **ينعدم عند قيمة على الأقل من** $\mathbb{R}$.

دالة كثير الحدود مستمرة على $\mathbb{R}$، فهي مستمرة على أي مجال $[a,b]$ من $\mathbb{R}$.

نبين بأنه يوجد بالفعل عددين a و b من $\mathbb{R}$ بحيث تكون صورتيهما من إشارتين متعاكستين.

لدينا $\lim_{x\to+\infty}(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)=+\infty$ الذي يعني بالتعريف

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R},\ \exists\eta\in\mathbb{R},\quad \forall x\in\mathbb{R}:\ x>\eta\Rightarrow f(x)>\varepsilon$$

ومنه نستنتج بأنه يوجد عدد حقيقي b بحيث $0<f(b)$

وكذلك عندما $\lim_{x\to-\infty}(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)=-\infty$ الذي يعني :

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R},\ \exists\eta\in\mathbb{R},\quad \forall x\in\mathbb{R}:\ x<\eta\Rightarrow f(x)<\varepsilon$$

ومنه نستنتج بأنه يوجد عدد حقيقي a بحيث $0>f(a)$

بتطبيق نظرية التزايدات المنتهية : $f(a)$ و $f(b)$ من إشارتين مختلفتين ، فالصفر يكون محصورا بينهما، وهو صورة لقيمة على الأقل محصورة ما بين a و b .

- **نعتبر الدالة** $f(x)$ **المعرفة والمستمرة على** $[0,2]$ **بحيث** $f(0)=f(2)$

نبين بأنه يوجد α من $]0,1[$: $f(\alpha)=f(\alpha+1)$.

نعرف الدالة $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ بحيث $g(x)=f(x+1)-f(x)$.

نلاحظ بأن $g(0)=f(1)-f(0)=-(f(2)-f(1))=-g(1)$

نظرية القيم المتوسطة تضمن وجود α من $]0,1[$، تحقق $g(\alpha)=0$ أو $f(\alpha)=f(\alpha+1)$

2. النهاية

1.2 مفهوم النهاية

ليكن x_0 من $]a,b[$ و f دالة عددية معرفة على $]a,b[$، لا تشترط أن تكون f معرفة عند x_0. تعني العبارة "**عندما يؤول x إلى x_0، تؤول $f(x)$ إلى** ℓ " أنه بإعطاء $\varepsilon>0$، يمكن إيجاد $\eta>0$ يرتبط بـ ε، بحيث $|x-x_0|<\eta$، الذي يضمن $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

ونكتب $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ ، مع x قد يختلف عن x_0.

مثلا: الدالة f التي تساوي $-x$ من أجل $x<0$ و 1 من أجل $x>0$ غير معرفة من أجل $x=0$، ولا تقبل نهاية عند $x=0$، $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

2.2 تعريف

ليكن $c\ni D_f$ مجموعة تعريف دالة. نقول أن f تقبل عن يمين c النهاية ℓ، ونكتب: $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=\ell$ إذا

$$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,x\in D_f\cap]c,c+\eta[\Rightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon$$

ولدينا أيضا :

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>\mathbb{R},\exists\eta>0,x\in D_f\cap]-\infty,c[\wedge]-\infty,c[<\eta\Rightarrow f(x)>M$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\rho>0,x\in D_f\wedge x>\rho\Rightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \text{ ssi } \forall M>\mathbb{R},\exists P>0,x\in D_f\wedge x>\rho\Rightarrow f(x)>M$$

وإذا قبلت الدالتان f و g نهايتين عند c فإن الدوال الآتية : $f+g$, $g\times f$, $\dfrac{f}{g}$ $(g\neq 0)$ ستقبل أيضا نهايات مأخوذة عند c.

إضافة إلى ذلك، إذا قبلت دالة h نهاية عند $f(c)$ ، فإن $h\circ f$ ستقبل نهاية عند c.

3.2 نتائج

- ليكن $c\ni D_f$. f دالة تقبل النهاية ℓ عند c . إذا قبلت الدالة g النهاية ℓ' عند c ، فإنه يكون : إذا كان $f=g$ على مجال مفتوح I من $D_f\cap D_g$، فإن $\ell=\ell'$

إذا كان $f\geq g$ على مجال مفتوح I من $D_f\cap D_g$، فإن $\ell\geq\ell'$

- بفرض أن الدالة f تقبل النهاية ℓ عند c ، والدالة g تقبل نفس النهاية ℓ عند c . فإنه إذا ما تحققت المتراجحة المزدوجة $f\leq h\leq g$ على مجال مفتوح يشمل c ، فستقبل الدالة h النهاية ℓ عند c .
- بفرض أن $I=]a,+\infty[\subset D_f\cap D_g$.
  إذا كانت $f\leq g$ على I و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.
- ليكن $c\in\mathbb{R}$، الدالة $f(x)$ تقبل النهاية ℓ عند c إذا وإذا فقط من أجل كل متتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر D_f متقاربة نحو c، تكون المتتالية $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو ℓ.

3. الاستمرار

1.3 مفهوم الاستمرار

إذا افترضنا أن الدالة $f(x)$ المعرفة على المجال $]a,b[$ تقبل، عندما $x\to x_0$، النهاية ℓ (التي قد تختلف عن $f(x_0)$. في حالة العكس $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ نقول أن f مستمرة عند x_0.

تكون الدالة f مستمرة عند x_0 إذا تحقق: $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$ $\quad x_0\in D_f$

<u>**مثلا**</u> ندرس استمرارية الدالة:

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$$

f معرفة على $D_f=\mathbb{R}$. على $\mathbb{R}^*$ الدالة f مستمرة.

الاستمرار عن 0: $f(0)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. ومنه f مستمرة عند 0.

- إذا كانت دالة $f(x)$ مستمرة عند كل نقطة من مجال I من $\mathbb{R}$، نقول أن f مستمرة على المجال I .

تمرين

نعتبر الدالة $f(x)$ المعرفة على $[0,2]$ حيث

$$f(x)=\begin{cases} x , & x\in[0,1]\\ 2-x & , x\in]1,2]\end{cases}$$

برهن أن f مستمرة على المجال $[0,2]$

استخدام التعريف لحساب $f(x_0)$ عندما $x_0=1$.

2.3 الاستمرار والمتتالية

ليكن $c \in \mathbb{R}$، الدالة $f(x)$ مستمرة عند c إذا وإذا فقط من أجل كل متتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر D_f متقاربة نحو c، تكون المتتالية $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو $f(c)$.

3.3 التمديد بالاستمرار

إذا كانت الدالة f غير معرفة عند x_0 مع $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ ، فإنه يمكن تمديد f بالاستمرار كما يلي :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \ x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) & , \ x = x_0 \end{cases}$$

4.3 قضية

ليكن $0<k$، إذا حققت دالة f على مجال I من D_f الشرط:

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$$

فإنها تكون مستمرة على I .

4. الاشتقاق

1.4 تعريف ونظرية

نفرض أن $f(x)$ مستمرة عند x_0. إذا افترضنا أن الدالة $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ غير المعرفة عند $x=x_0$ تقبل نهاية عندما يؤول x إلى x_0، نقول أن الدالة $f(x)$ تقبل الاشتقاق عند النقطة x_0.

تسمى هذه النهاية **العدد المشتق عند** x_0.

$$f \text{ تقبل الاشتقاق عن } x_0 \iff \text{وجدت النهاية } \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

أي إذا وفقط إذا وجد العدد المشتق $f'(x_0)$.

الشرطان الآتيان متكافئين :

- الدالة f تقبل الاشتقاق عند a .
- يوجد $A \in \mathbb{R}$ وتوجد دالة ε معرفة على $I-\{a\}$ بحيث يكون من أجل كل $h \in \mathbb{R}$ يحقق :

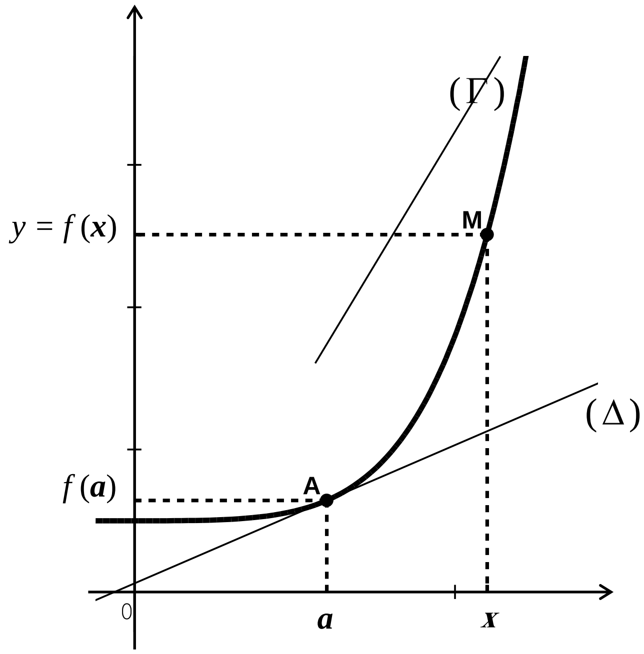
$$\begin{cases} f(a+h) = f(a) + hA + h\,\varepsilon(h) \\ \lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0 \end{cases}$$

يكون لدينا إذن $A = f'(a)$

2.4 التفسير الهندسي

ليكن (Γ) المنحنى الممثل للدالة $f(x)$ في معلم كيفي. $A(a;f(a))$ و $M(x;f(x))$ من (Γ).

إذا كان $x \neq a$ فإن $A \neq M$، ويكون معامل توجيه المستقيم AM هو $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. (الشكل **3**).



شكل 3

إذا كانت الدالة f تقبل للاشتقاق عند النقطة a فإن AM ينتهي إلى المماس (Δ) لـ(Γ) عند a الذي معادلته : $y-f(a)=(x-a)f'(a)$ وغير الموازي لمحور التراتيب (الشكل **3**).

3.4 الاشتقاق عن اليمين

f دالة معرفة على D. $x_0 \in D$.

f تقبل الاشتقاق عن يمين x_0 $\Leftrightarrow$ وجدت النهاية $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

أي إذا وجد **العدد المشتق عن اليمين** $f'(x_0^+)=f'(x_0+0)$

منحنى f يقبل نصف مماس غير عمودي عند $M(x_0, f(x_0))$

في هذه الحالة، معادلة المماس عند x_0 تعطى بالعلاقة : $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

نقول إن f تقبل للاشتقاق عن يمين x_0 إذا كانت النهاية الآتية موجودة (العدد المشتق عن يمين x_0):

$$f_d'(x_0)=\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

نقول إن f تقبل للاشتقاق عن يسار x_0 إذا وجدت النهاية $f_g'(x_0)=\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

4.4 تمرينان محلولان

نعتبر الدالة g حيث:

$$g(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \quad x\neq 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$$

عين مجموعة تعريف g، وندرس استمرار وقابلية اشتقاقها عند $x_0=0$.

الحل

بالإمكان دراسة تغيرات الدالة الزوجية $g(x)$ على نصف المجال $[0,+\infty[$.

نلاحظ بأن $g(x)$ مستمرة عند الصفر لأن: $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x^2}}=0$

من المساواة: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(x)}{x-0}=0$ نستنتج أن $g(x)$ تقبل الاشتقاق عند الصفر.

ولدينا

$$g'(x)=\begin{cases} \dfrac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}, & x\neq 0 \\ 0 \quad , & x=0 \end{cases}$$

والدالة g مستمرة ومشتقتها g' موجودة ولدينا أيضا $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}=g'(0)=0$

ومنه $g'(x)$ مستمرة عند $x_0=0$.

نعتبر الدالة $f(x)$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} \ , & x\neq 0 \\ 0 \ , & x=0 \end{cases}$$

أحسب $f'(0)$ ، وعين $f'(x)$ من أجل $x\neq 0$، وادرس استمرارية $f'(x)$ عند $x_0=0$.

الحل

لدينا باستخدام التعريف : $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

والدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$.

ونلاحظ من أجل $x\neq 0$، الدالة $f(x)$ تقبل الاشتقاق ، حيث :

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

وبما أن $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ موجودة و $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ غير موجودة فإن $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ غير موجودة .

والدالة f مستمرة ومشتقتها f' موجودة لكنها غير مستمرة عند $x_0=0$.

5.4 استمرار دالة مشتقة

إذا كانت الدالة f تقبل للاشتقاق عند النقطة a، فإنها مستمرة عند a.

لدينا $$f(x)-f(a)=\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\cdot(x-a)$$

بأخذ نهاية الطرفين عندما يؤول x إلى a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x)-f(a) &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\cdot(x-a)\\ &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\cdot\lim_{x\to a}(x-a)=f'(a)\cdot 0=0\end{aligned}$$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$، مما يعني أن f مستمرة عند a.

ملاحظة عكس هذه النظرية غير صحيح.

5. الدوال القابلة للاشتقاق

تذكير

إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق على مجال من الشكل $[a-\alpha\,;a+\alpha]$ فإن الشرطان الآتيان متكافئين :

- f تقبل الاشتقاق عند a .
- f تقبل الاشتقاق عن يمين النقطة a وعن يسار النقطة a و $f'(a)=f_d'(a)=f_g'(a)$

1.5 تعريف الدالة المشتقة

f دالة عددية لمتغير حقيقي x من $D\subset\mathbb{R}$.

f تقبل الاشتقاق على D $\Leftrightarrow$ f تقبل الاشتقاق عند أية قيمة x_0 من D

2.5 عمليات على الدوال القابلة للاشتقاق

إذا كانت f و g دالتين تقبلان الاشتقاق على مجال I، فإن

- $f+g$ تقبل الاشتقاق على مجال I، ولدينا : $\forall x\in I \quad (f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$
- $f\cdot g$ تقبل الاشتقاق على مجال I، ولدينا : $\forall x\in I \quad (f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x).g'(x)$
- من أجل كل λ من $\mathbb{R}$، λf تقبل الاشتقاق على مجال I، ولدينا : $\forall x\in I \quad (\lambda f)'(x)=\lambda f'(x)$
- إذا كان $g(x)$ لا ينعدم على I فإن $\frac{f}{g}$ تقبل الاشتقاق على مجال I، ولدينا :

$$\forall x \in I \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

مثلا الدالة $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x-\ln x}$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$: $f'(x)=\dfrac{-1-x+x\ln x}{x(1+x-\ln x)^2}$

3.5 الاشتقاق والرتابة

- f دالة تقبل الاشتقاق على المجال I.

  إذا كان من أجل كل x من I $0\le f'(x)$، فإن f تكون متزايدة على I.

  إذا كان من أجل كل x من I $0<f'(x)$، فإن f تكون متزايدة تماما على I.

  إذا كان من أجل كل x من I $0=f'(x)$، فإن f تكون ثابتة على I.

- إذا كانت الدالة f تقبل الاشتقاق عند x_0، وتبلغ أحد حديها عند x_0 فإن $f'(x_0)=0$.

إذا افترضنا أن $f(x_0)=\inf\limits_{x\in I} f(x)$ فسيكون لدينا $\forall x\in I \quad f(x)-f(x_0)\ge 0$

وبما أن f تقبل الاشتقاق عند x_0، وبفرض $x-x_0<0$ فإن $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$.

أما إذا كان $x-x_0>0$ فإن $f'(x_0)\ge 0$ وينتج في الأخير $f'(x_0)=0$.

- إذا كان $f'(x_0)=0$ و f' تغير إشارتها على جانبي x_0، فإن f تقبل قيمة حدية عند النقطة x_0.
- إذا كان $f''(x_0)=0$ و f'' تغير إشارتها على جانبي x_0، فإن f يقبل نقطة انعطاف عند النقطة x_0.

4.5 مشتق تركيب دالتين

إذا كانت f و g دالتين عدديتين معرفتين على المجالين المفتوحين I و J من $\mathbb{R}$: $f:I\to\mathbb{R}$ و $g:J\to\mathbb{R}$، بحيث:

$f(I)\subset J$

$a\in I$ و f تقبل الاشتقاق عند a.

g تقبل الاشتقاق عند $b=f(a)$.

فإن الدالة $g\circ f$ تقبل الاشتقاق عند a و $(g\circ f)'(a)=g'(f(a))\times f'(a)$

نتيجة

إذا كانت f تقبل الاشتقاق عند كل نقط المجال I و g تقبل الاشتقاق عند كل نقط المجال $f(I)$ فإن $g\circ f$ تقبل الاشتقاق عند كل نقط المجال I. ولدينا:

$$\forall x\in I \quad (g\circ f)'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$$

5.5 أمثلة

- نحسب مشتق الدالة $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$. بوضع $g(x) = \cos x$ و $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$

يكون لدينا : $(g \circ f)(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$

ومنه $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = -\sin(x - \frac{\pi}{2}) \times 1 = -\sin(x - \frac{\pi}{2}) = \cos x$

ومنه العلاقة $\forall x \in \mathbb{R} \quad (\sin x)' = \cos x$

- مشتق دالة وحيد الحد $f(x) = x^n$ هو $f'(x) = n x^{n-1}$ وهذا من أجل كل عدد صحيح n.

- مشتق الدالة $f(x) = |x|$

من أجل $0 \neq x$: $f'(x) = \begin{cases} 1 & : x > 0 \\ -1 & : x < 0 \end{cases}$

عند النقطة $a = 0$ الدالة لا تقبل الاشتقاق لأن $f_d'(0) \neq f_g'(0)$.

- مشتق الدالة $f(x) = \cos x$. لدينا :

$$\lim_{x \to a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{-2\sin\left(\frac{x+a}{2}\right).\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x - a}$$

$$= -\lim_{x \to a} \sin\left(\frac{x+a}{2}\right) \lim_{x \to a} \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} = -\sin a \times 1 = -\sin a$$

ومنه العلاقة $\forall x \in \mathbb{R} \quad (\cos x)' = -\sin x$.

- مشتق الدالة $f(x) = e^x$. لدينا :

$\lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a \cdot \lim_{x \to a} \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} = e^a . \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = e^a \cdot 1 = e^a$. ومنه $\forall x \in \mathbb{R} \quad (e^x)' = e^x$

- **ننظر فيما إذا كانت الدالة الآتية تقبل الاشتقاق أم لا عند** $0 = x$:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\frac{1}{x} & ; \ x \neq 0 \\ 0 & ; \ x = 0 \end{cases}$$

لدينا : $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$

إذا اخترنا $x = \frac{1}{n\pi}$ $\left(\mathbb{N}^* \ni n\right)$ ، تكون النهاية: $\lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x} = \lim_{n \to +\infty} \sin n\pi = 0$

أما إذا اخترنا $x = \frac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}}$ $(\mathbb{N} \ni n)$ ، فيكون $\lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x} = \lim_{n \to +\infty} \sin(4n+1)\frac{\pi}{2} = 1$.

بما أن النهايتين مختلفتين، فإن f لا يقبل الاشتقاق عند 0. وبالتالي f لا تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

- **نعتبر الدالة**

$$f(x)=\begin{cases} x^2.\sin\dfrac{1}{x} & : x\neq 0, \\ 0 & : x=0. \end{cases}$$

هل يقبل f الاشتقاق عند نقطة $x\neq 0$ ؟

لدينا :
$$\lim_{n\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{n\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0=f'(0)$$

$$0\leq \lim_{n\to 0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leq \lim_{n\to 0}|x|=0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0 .$$

ومنه $f(x)$ تقبل الاشتقاق عند كل $x\ni\mathbb{R}$.

6.5 تمارين محلولة

تمرين رقم 1

f و g دالتان مستمرتان على $[a,b]$ وتقبلان الاشتقاق $]a,b[$
بفرض أن $f(a)\leq g(a)$ ومن أجل كل x من $]a,b[$: $f'(x)\leq g'(x)$
نثبت أن $f(x)\leq g(x)$ $\forall x\in]a,b[,$

الحل

لدينا
$$f(a)\leq g(a) \Leftrightarrow f(a)-g(a)\leq 0 \Leftrightarrow (f-g)(a)\leq 0$$
$$\forall x\in]a,b[,\quad f'(x)\leq g'(x) \Leftrightarrow f'(x)-g'(x)\leq 0 \Leftrightarrow (f'-g')(x)\leq 0$$

أي أن الدالة $f-g$ على المجال $]a,b[$ متناقصة. ومنه

$$\forall x\in]a,b[,\quad x>a \Rightarrow (f-g)(x)\leq (f-g)(a)\leq 0$$

تمرين رقم 2

لتكن f دالة مستمرة على $[a,b]$ بحيث $a<f(a)$ و $f(b)<b$
بفرض أن $f(a)\leq g(a)$ ومن أجل كل x من $]a,b[$: $f'(x)\leq g'(x)$
نثبت أنه يوجد c من $]a,b[$ بحيث $f(c)=c$

الحل

من أجل ذلك نعتبر الدالة $g(x)=f(x)-x$. g مستمرة على $[a,b]$، ولدينا :

$$a<f(a) \Leftrightarrow f(a)-a>0 \Leftrightarrow g(a)>0$$
$$f(b)<b \Leftrightarrow f(b)-b<0 \Leftrightarrow g(b)<0$$

ومنه يوجد c من $]a,b[$ بحيث $g(c)=0$ أي $f(c)=c$

تمرين رقم 3

نعتبر الدالة $f(x)$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2(\pi x)}{x-3}, & x\neq 3\\ 0 \quad , & x=3\end{cases}$$

ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة 3، ثم فسر النتيجة هندسيا .

الحل

نلاحظ بأن الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}-\{3\}$ (لكونها مركبة من دوال قابلة للاشتقاق) .

ندرس الاشتقاق عند $x_0=3$، يمكن ملاحظة أن الدالة f مستمرة عند $x_0=3$.

ندرس الاشتقاق عن يمين $x_0=3$: بوضع $x=3+h$ حيث $0<h$ ، يكون $h=x-3$، وبالتالي :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2(\pi(3+h))}{h(h+3-3)}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2(\pi(3+h))}{h\cdot h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\pi\sin(\pi h)}{\pi h}\right)^2=\pi^2$$

وكذلك في الاشتقاق عن يسار $x_0=3$: نضع $x=3-h$ حيث $0<h$، فسيكون $h=3-x$ ونحصل أيضا على:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2(\pi(3-h))}{h(3-h+3)}=\lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2(\pi h)}{h(-h)}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\pi\sin(\pi h)}{\pi h}\right)^2=\pi^2$$

منحنى f يقبل مماس عند $x_0=3$ معادلته $y=\pi^2(x-3)$، وهو متناظرا بالنسبة إلى $M(3,0)$.

تمرين رقم 4

لتكن الدالة $g(x)$ المعرفة بالشكل:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1}\ , & x\neq 0\\ 1\ , & x=0\end{cases}$$

1. بين أن $g(x)$ مستمرة وتقبل الاشتقاق عند $x_0=0$. أحسب $g'(0)$.
2. ادرس تغيرات $g(x)$ على مجموعة تعريفها، وأثبت أن منحناها (Γ) يقبل خطا مقاربا مائلا.
3. هات معادلة المماس للمنحنى البياني الممثل للدالة g عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$.

الحل

1. دراسة الاستمرار والاشتقاق لـ $g(x)$ عند $x_0=0$.

- $g(x)$ مستمرة عند الصفر لأن: $g(0)=\lim_{x\to 0^-}g(x)=\lim_{x\to 0^+}g(x)=+1$
- ومن العلاقة: $g'(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{e^x-1}-1}{x-0}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x-e^x+1}{x(e^x-1)}=-\dfrac{1}{2}$

ومنه $g(x)$ تقبل الاشتقاق عند الصفر.

$g(x)$ مستمرة وتقبل الاشتقاق على المجال $]-\infty,+\infty[$: حيث: $f'(x)=\dfrac{-xe^{x}+e^{x}-1}{(e^{x}-1)^{2}}$

ولدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{g(x)}{x}=-1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(g(x)-x\right)=0$

المنحنى (Γ) يقبل خطا مقاربا مائلا معادلته : $y=-x$ (الشكل **4**).

جدول تغيرات $g(x)$:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty$ ↘ 0

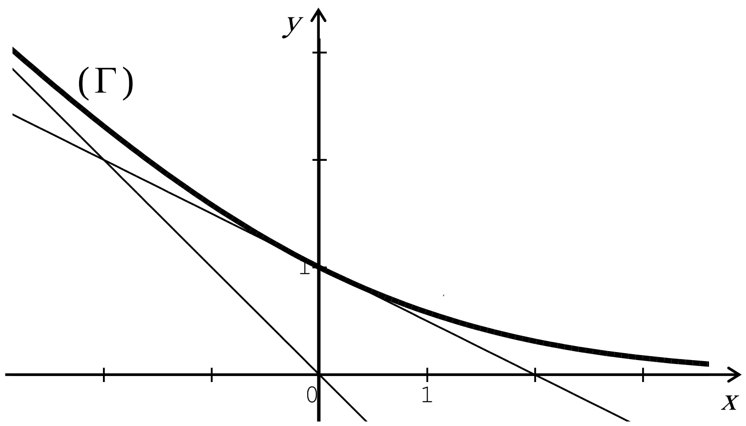
2. معادلة المماس للمنحنى البياني الممثل للدالة g عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$.

من النشر المحدود من الرتبة الأولى بجوار الصفر للدالة $g(x)$:

$$g(x)=g(0)+g'(0)\cdot x+o(x)$$

$$g(x)=1-\tfrac{1}{2}x+o(x)$$

تنتج معادلة المماس لمنحنى $y=g(x)$ عند نقطة المبدأ : $y=1-\frac{1}{2}x$.



شكل 4

6. الدالة العكسية

1.6 شرط وجود الدالة العكسية

إذا كانت الدالة العددية f رتيبة تماما على المجال I ومستمرة على I فإن:

- $f(I)$ هو مجال.
- واقتصار f على I تقابل.

الدالة f، تقبل دالة عكسية f^{-1}، وهي أيضا رتيبة (بنفس تغير f على I) ، ومستمرة على I .

2.6 ملاحظة

- إذا أعطيت f بتمثيلها البياني في معلم متجانس، فإنه تمثيل f^{-1} (في نفس المعلم) يكون بالتناظر الذي محوره المستقيم $y=x$.
- وإذا قبلت f الاشتقاق على I ، وكانت هذه المشتقة غير معدومة، فإن f^{-1} تقبل أيضا الاشتقاق على $f(I)$، ولدينا:

$$\forall x \in I\ ,\quad f \circ f^{-1}(x)=x$$

$$\forall x \in I\ ,\quad f'\left(f^{-1}(x)\right)\cdot\left(f^{-1}\right)'(x)=1$$

ومنه

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \qquad f'\neq 0$$

3.6 تمرين محلول

لتكن f دالة عددية حيث :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{-1+2x}-1}{x-1} & ,\ x\neq 1\\ +1 & ,\ x=1\end{cases}$$

1. **عين D_f مجموعة تعريف f . وادرس استمرار الدالة $f(x)$ على D_f .**
2. **ادرس قابلية اشتقاق f على D_f، ثم عين $f'(x)$.**
3. **ادرس تغيرات f ، ثم بين أن f هي تطبيق تقابلي من D_f في مجموعة قيمها.**
4. **هل تقبل f^{-1} الاشتقاق عند $y_0=f(1)$ ؟ في حالة نعم، أحسب $f^{-1}\left(f(1)\right)$.**

الحل

1. تعيين D_f واستمرارية $f(x)$.

مجموعة تعريف f : $D_f=\left[1/2,\ +\infty\right[$.

الدالة f مستمرة على $D_f=[1/2,\ 1[\cup]1,\ +\infty[$ وعند $x_0=1$، لدينا :

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{-1+2x}-1}{x-1}=f(1)=1$$

ومنه f مستمرة على D_f .

2. قابلية اشتقاق f عند $x_0=1$,

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]1/2,\ 1[\cup]1,\ +\infty[$ (مركبة من دوال قابلة لاشتقاق) :

$$f'(x)=\frac{\sqrt{2x-1}-x}{\sqrt{2x-1}(x-1)^2}$$

الاشتقاق عند $x_0=1$، لدينا :

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{\sqrt{-1+2x}-1}{x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{-1+2x}-x}{(x-1)^2}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{-1+2x}-x\right)\left(\sqrt{-1+2x}+x\right)}{\left(\sqrt{-1+2x}+x\right)(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{-\cancel{(x-1)^2}}{\left(\sqrt{-1+2x}+x\right)\cancel{(x-1)^2}}=-\frac{1}{2}$$

والدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0=1$: $f'(1)=-\frac{1}{2}$

الاشتقاق عن يمين $x_0=1/2$، لدينا :

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{f(x)-f(1/2)}{x-1/2}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{\frac{\sqrt{-1+2x}-1}{x-1}-0}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}2\frac{\sqrt{-1+2x}-1}{(x-1)(2x-1)}=$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{\left(\sqrt{-1+2x}-1\right)\left(\sqrt{-1+2x}+1\right)}{(x-1)(2x-1)\left(\sqrt{-1+2x}+1\right)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{2\cancel{(2x-1)}}{\left(\sqrt{-1+2x}+1\right)(x-1)\cancel{(2x-1)}}=+\infty$$

والدالة f لا تقبل الاشتقاق عن يمين $x_0=1/2$.

خلاصة : الدالة f تقبل الاشتقاق على $]1/2,\ +\infty[$: ومشتقتها على هذا المجال هي:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{2x-1}-x}{\sqrt{2x-1}(x-1)^2}$$

3. لدينا من أجل كل x من $]1/2,\ +\infty[$: $f'(x)=\frac{\sqrt{2x-1}-x}{\sqrt{2x-1}(x-1)^2}=\frac{-1}{\sqrt{2x-1}(\sqrt{2x-1}+x)}$

كذلك لدينا $f(1/2)=2$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ ، ($y=0$ خط مقارب)، والدالة f متناقصة على D_f .

- نلاحظ بأن الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على D_f.

إذن f تطبيق تقابلي من $D_f=[1/2,\ +\infty[$ في المجال $]0,2]$ ، والتطبيق العكسي f^{-1} موجود.

(كذلك f^{-1} مستمرة ومتناقصة تماما على $]0,2[$).

لدينا : $f'(1)=-\frac{1}{2}\ (\neq 0)$ ، $f^{-1}(f(1))=f^{-1}(1)=f(1)=1$

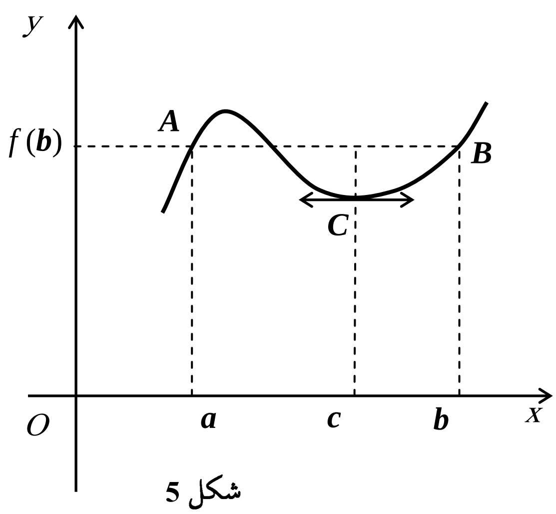
f^{-1} تقبل الاشتقاق عند $y_0=f(1)$ ولدينا $(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{-1/2}=-2$

7. تطبيقات المشتقات

1.7 نظرية رول

إذا كانت الدالة f $\left\{ \begin{array}{l} \text{مستمرة على } [a,b] \text{ ،} \\ \text{قابلة للاشتقاق على }]a,b[\text{ ،} \\ \text{بحيث } f(a)=f(b) \text{ .} \end{array} \right.$

فإنه توجد على الأقل قيمة c من $]a,b[$ بحيث $f'(c)=0$



شكل 5

يدل التمثيل الهندسي على وجود نقطة واحدة c على الأقل من القوس AB (A تختلف عن B) بحيث يكون المماس عندها يوازي Ox، وقد لا تكون هذه النقطة وحيدة . (الشكل **5**).

2.7 الحساب على المشتقات

لتكن f و g دالتين معرفتين ومستمرتين على $[a,b]$ وقابلتين للاشتقاق على $]a,b[$. بفرض أن الدالة المشتقة g' لا تنعدم على $]a,b[$، عندئذ يوجد عدد α من المجال $]a,b[$ بحيث :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

البرهان

على $[a,b]$ تعتبر الدالة h : $h(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$. h تحقق نظرية رول .

ومنه يوجد α من $]a,b[$ بحيث $h'(\alpha)=0$. ولدينا $h'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$

فإن $h'(\alpha)=f'(\alpha)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\alpha)=0$ ، وبالتالي $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$

3.7 قاعدة L'Hôpital

لتكن $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ و $g:]a,b[\to\mathbb{R}$ دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال $]a,b[$ ، وليكن α من المجال $]a,b[$. إذا كانت النهاية $\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة ، فإن النهاية $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}$ موجودة، بحيث :

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ملاحظة

عندما يكون $f(\alpha)=g(\alpha)=0$ ، فأن $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

4.7 أمثلة

- **شروط نظرية رول تتحقق على الدالة** $f(x)=x\cdot(x-2)\cdot(x+2)$

$$f(-2)=f(0)=f(2)\ ,\quad f'(x)=3x^2-4$$

حسب رول فإن $f'(x)$ سينعدم عند x_0 من $]-2,0[$ وينعدم أيضا عند x_1 من $]0,2[$ وهذا ما تحققه المعادلة $f'(x)=3x^2-4$ على المجالين $]-2,0[$ و $]0,2[$، حيث نجد $x_0=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

سؤال : هل يمكن تطبيق نظرية رول على الدالة $f(x)=\frac{x^2-4x}{x-2}$ على $[0;2]$ ؟

- **المعادلة** $e^{-x}=x$ **تقبل حلا وحيدا** x_0 **من المجال** $I=]0,1[$.

بوضع $f(x)=x-e^{-x}$ ، يكون لدينا: f مستمرة على I و $f(0)=-1<0$ و $f(1)=1-\frac{1}{e}>0$.

وحسب النتيجة السابقة، توجد قيمة x_0 من المجال المفتوح $]0,1[$ بحيث $f(x_0)=0$,

x_0 وحيد. لأنه لو كان معه x_1 من $]0,1[$ بحيث $f(x_1)=0$, لكان $f(x_0)=f(x_1)=0$ الأمر الذي يتطلب، حسب رول، وجود x'_0 من $]x_0,x_1[$ بحيث $f'(x'_0)=0$. وهذا محال لأن $f'(x'_0)\neq 0$.

5.7 صيغة التزايدات المنتهية

إذا كانت دالة f مستمرة على $[a,b]$ وتقبل الاشتقاق على $]a,b[$، فإنه توجد على الأقل قيمة c من $]a,b[$ بحيث $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.

أي يوجد على الأقل θ من $]0;1[$، بحيث $f(b)-f(a)=(b-a)f'(a+\theta(b-a))$ (2)

وبوضع $b=a+h$ تأخذ العلاقة (2) الشكل: $f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)$

أمثلة

- الدالة $f(x)=\ln x$ تحقق شروط تطبيق نظرية التزايدات المنتهية على $[0;x]$، $0<x$ ومنه

$$\exists c\in]x;x+1[\quad \ln(x+1)-\ln(x)=\frac{1}{c}$$

أو

$$\exists \theta\in]0;1[\quad \ln(x+1)-\ln(x)=\frac{1}{x+\theta}$$

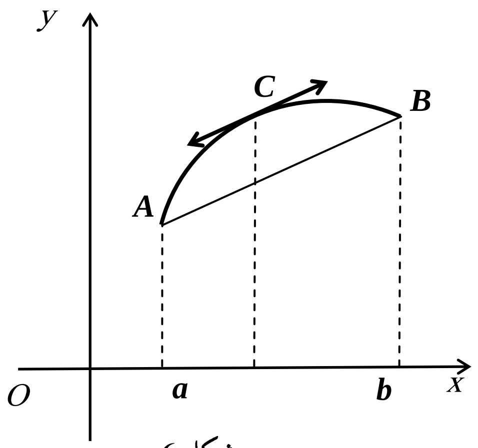
- طبق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x)=e^{x}$، على $[0;x]$، $0<x$، بعد التحقق من شروطها .

مجموعة التعريف f هي $D_f=[0;+\infty[$، و f تقبل الاشتقاق على $D=]0;+\infty[$،

(f لا تقبل الاشتقاق عند 0 لأن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}=+\infty$)

لدينا من أجل $0<x$ $f'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

التمثيل الهندسي :



شكل 6

يدل التمثيل الهندسي على وجود نقطة أو أكثر من القوس AB بحيث يكون المماس للمنحنى يوازي الوتر AB.

(معامل توجيه المستقيم AB هو $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$) (الشكل **6**).

6.7 نتيجة

لتكن f دالة معرفة ومستمرة على المجال $[a,b]$، وقابلة للاشتقاق على المفتوح $]a,b[$. نفرض وجود ثابتين موجبين m و M بحيث يكون

$$\forall x\in]a,b[:\quad m\le f'(x)\le M .$$

عندئذ يكون :

$$m \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le M \,.$$

تمرين

- حقق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x)=e^x$ من أجل $a=0$ و $b=e$.
- هل شروط نظرية التزايدات المنتهية متحققة على المجال $[-1,+1]$ بالنسبة للدالتين : $\sqrt{|x|}$ و $\sqrt[3]{x}$ ؟

7.7 أمثلة

- **إثبات من أجل كل x و y من $\mathbb{R}$:** $\quad |\sin y - \sin x| \le |y - x|$

عندما $x<y$ ، الدالة $\sin$ معرفة ومستمرة على المجال $[x,y]$ وتقبل الاشتقاق على $]x,y[$، فحسب نظرية التزايدت المنتهية توجد على الأقل قيمة c من $]a,b[$ بحيث $\sin y - \sin x = (y-x)\cos c$

وبما أن $\forall t \in \mathbb{R} \quad |\cos t| \le 1$، نستنتج $|\sin y - \sin x| \le |y-x|$.

- **إثبات من أجل كل $0<x$:** $\quad \frac{1}{x+1} \le \ln(x+1) - \ln(x) \le \frac{1}{x}$

نعتبر الدالة $f(x)=\ln(x)$ المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$. لدينا $f'(x)=\frac{1}{x}$

حسب نظرية التزايدات المنتهية $\quad \exists c \in]x,x+1[,\ f(x+1)-f(x)=(x+1-x)f'(c)=\frac{1}{c}$

وبما أن $0<x<c<x+1$ فإن $\frac{1}{x+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{x}$ أي $\frac{1}{x+1} \le \ln(x+1)-\ln(x) \le \frac{1}{x}$.

تمرين

- **f و g دالتان تقبلان الاشتقاق على $[a,b]$ بحيث :** $\quad \forall x \in [a,b],\quad |f'(x)| \le g'(x)$

برهن أن $\quad |f(b)-f(a)| \le g(b)-g(a)$

- **نعتبر الدالة $f(x)$ المعرفة والمستمرة على $[0,2]$.**

لنبين بأنه يوجد α من $[0,2]$: $\quad 7f(0)+10f(2)=23f(\alpha)$

بما أن $f(x)$ مستمرة على $[0,5]$ فإنها تدرك حضيضها m وذروتها M ويكون لدينا :

$$f([0,2])=[m,M]$$

إذن

$$m \le \frac{7f(0)+10f(2)}{23} \le M$$

ومنه يوجد α من $[0,2]$:

$$f(\alpha)=\frac{7f(0)+10f(2)}{23}$$

8.7 مخطط دراسة دالة عددية

في دراسة دالة عددية نتبع ما يلي:

- مجموعة التعريف.
- محاولة إرجاع مجموعة التعريف (الدورية، الفردية، ...).
- المشتقة ودراسة إشارتها.
- جدول التغيرات.
- حساب قيم النهايات التي تساعد في إنهاء جدول التغيرات.
- تعيين الخطوط المقاربة المستقيمة والمائلة.
- تحديد النقاط الخاصة: التقاطع مع المحورين، نقطة الانعطاف، ...
- رسم المنحنى.

9.7 تمرين محلول

نعتبر الدالة العددية $f(x)=-(x^2+x-1)e^x$

1. **أدرس تغيرات** f **وفروعها اللانهائية ؟**
2. **بين أن** (Γ)**: منحنى** f **يقبل نقطتي انعطاف، يطلب تعيين إحداثياتها.**
3. **ارسم المنحنى** (Γ) **والمستقيمين المماسين عند نقطتي الانعطاف في نفس المعلم.**
4. **أثبت أن** (Γ) **يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها** x_0 **تحقق:** $-1,62>x_0>+1,60$
5. **جد دالة أصلية للدالة** f **على** $\mathbb{R}$ **, ثم احسب المساحة** $\mathcal{S}$ **للحيز المحدد بالمنحنى** (Γ) **والمستقيمات** $y=0$ **و** $x=-\frac{1}{2}$ **و** $x=-2.5$.

الحل:

1. جدول تغيرات f

x	2		-1		$-\infty$		$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$			
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	0.67	$\nearrow$	e		

2. الدالة المشتقة الأولى: $f'(x)=-(x^2-x-2)e^{-x}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

الفروع اللانهائية: في جوار $(-\infty)$ يوجد فرع لانهائي باتجاه المحور الأفقي.

3. الدالة المشتقة الثانية ونقاط الانعطاف:

لدينا: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x)=(-x^2+3x+1)e^{-x}$

المشتقة الثانية تنعدم عند كل من $x_1=-\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\approx -0.303$ و $x_2=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\approx 3.303$، وتغير إشارتها عندهما . إذن للمنحنى (Γ) نقطتي انعطاف فاصلتاهما: x_1 و x_2 : $f(x_1)\approx 1.639$ و $f(x_2)\approx -0.485$ (الشكل **7**).

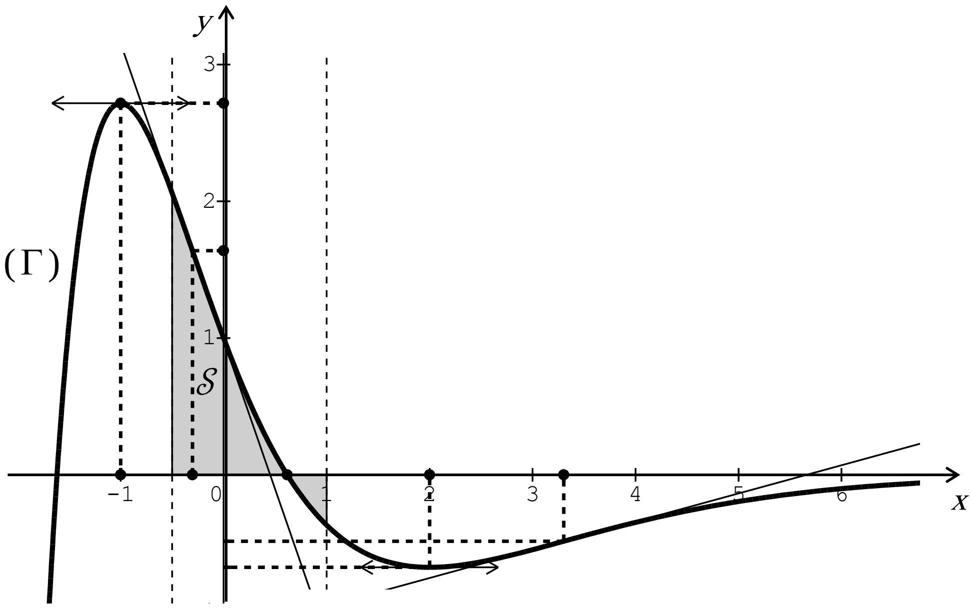
الدالة الأصلية لـ f على $\mathbb{R}$:

$F(x)=\int f(x)\,dx = x(x^2+3x+2)e^{x}+c$ حيث c ثابت اختياري

وتكون المساحة بالوحدات المربعة : $\mathcal{S}=\left|\int_{-0.5}^{1} f(x)\,dx\right|=0.322$

1) تقاطع (Γ) مع محور الفواصل :

الدالة $x\mapsto f(x)$ مستمرة ومتناقصة تماما على $[0.61, 0.62]$ حيث $f(0.61)\times f(0.62)<0$



شكل 7

حسب نظرية القيم المتوسطة، فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد x_0 من $]0.61, 0.62[$ بحيث $f(x_0)=0$.

هندسيا: المنحنى (Γ) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $x_0\approx 0.618$.

8. الدوال اللوغاريتمية والأسية

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

نسمي الدالة اللوغاريتمية النيبيرية، الدالة الأصلية على المجال $]0,+\infty[$ للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ والتي تنعدم من أجل القيمة 1 للمتغير x . ورمزها كما هو معلوم $\ln$ أو $\log$.

مجموعة تعريفها هي $\mathbb{R}_+^*$ ، ولدينا إذن بالتعريف: $\forall x>0,\quad \ln x=\int_1^x \frac{dt}{t}$

النهايات

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty,\quad \lim_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0^+,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

خواص

- على المجال $]0,+\infty[$: $f(x)=\ln|ax| \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$ حيث $a\in\mathbb{R}^*$
- إذا كانت الدالة $u(x)$ تقبل الاشتقاق وتحافظ على إشارتها في مجال I، فإن الدالة $f:x\mapsto \ln|u(x)|$ تقبل الاشتقاق على I، ويكون : $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$
- إذا كانت الدالتان $u(x)$ و $v(x)$ تقبلان الاشتقاق ولا تنعدمان على المجال I فإن

$$\forall x\in I,\quad f(x)=u(x)\cdot v(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{u'(x)}{u(x)}+\frac{v'(x)}{v(x)}$$

$$\forall x\in I,\quad f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{u'(x)}{u(x)}-\frac{v'(x)}{v(x)}$$

$$\forall x\in I,\quad f(x)=u^n(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=n\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\qquad (n\in\mathbb{Z})$$

خواص

$$\ln(u\cdot v)=\ln u+\ln v$$

$$\ln\frac{u}{v}=\ln u-\ln v$$

$$x>0,\ n\in\mathbb{Q}\quad \ln x^n=n\ln x$$

العدد e

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية، تنعدم من أجل $x=1$، وهي مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}_+^*$.

توجد قيمة لـ x : $\ln x=1$، وهي العدد e الذي نسميه **الأساس النيبيري**، يحقق هذه المعادلة ، $2,718...$ قيمة تقريبية له .

ملاحظة

قد تستخدم في الحسابات أسس للوغاريتمات أخرى، مثل الأساس العشري أو الثنائي.

الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس a، هي الدالة $x \mapsto \log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

لها نفس تغيرات الدالة اللوغاريتمية النيبيرية). منحناهما موضح في (الشكل **8**).

جدول تغيرات $x \mapsto \ln x$

x	0		1		e		$+\infty$
$(\ln x)'$		$+$	0	$+$	0	$+$	
$\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

الدالة الأسية النيبيرية

الدالة الأسية ذات الأساس النيبيري e، التي نرمز لها بـ $x \mapsto e^x$، هي الدالة العكسية للدالة $\ln$، فهي مستمرة ومتزايدة تماما من $\mathbb{R}_+^*$ في $\mathbb{R}$. ولدينا : $y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln x \ , \ x > 0$

خواص ونهايات

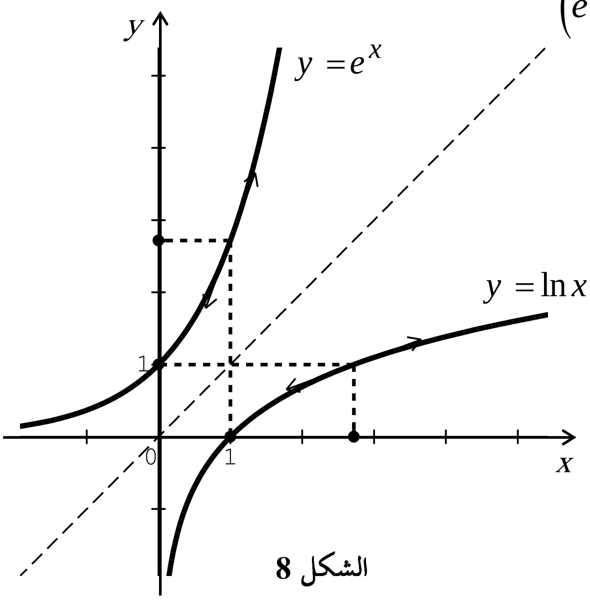
$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \ , \ e^x \cdot e^y = e^{x+y} \ , \ \left(e^x\right)^y = e^{x \cdot y}$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty , \ \lim_{x \to 0} x \cdot e^x = 0 , \ \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty , \ \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

الاشتقاق

- إذا كانت الدالة $u(x)$ تقبل على مجال I، فإن الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ تقبل الاشتقاق على I:

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$



الشكل **8**

9. تمارين محلولة

تمرين رقم 1

نعتبر الدالة f حيث:

$$f(x)=\begin{cases} x^3\cdot\ln(x^2) , & x\neq 0 \\ 0 , & x=0 \end{cases}$$

أ. عين D_f مجموعة تعريف f. ثم أدرس استمرار وقابلية اشتقاق f على D_f.

ب. ادرس تغيرات f، وأنشئ منحناها (Γ) في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.
حدد وضعية المماس عند النقطة O.

ج. بالاستعانة بالمنحنى (Γ)، أنشئ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ منحنى الدالة g حيث:

$$g:x\mapsto\left|f\left(|x|\right)\right|$$

الحل

أ) مجموعة التعريف $D_f=\left]-\infty,+\infty\right[$

f مستمرة على $\mathbb{R}^*$، ومستمرة عند $x=0$ لأن $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=0$

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$: $f'(x)=x^2\left(3\ln x^2+2\right)$، وكذلك تقبل الاشتقاق عند $x=0$ لأن

$$\lim_{x\to 0^\pm}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^\pm}x^2\ln x^2=0$$

ب) تغيرات f

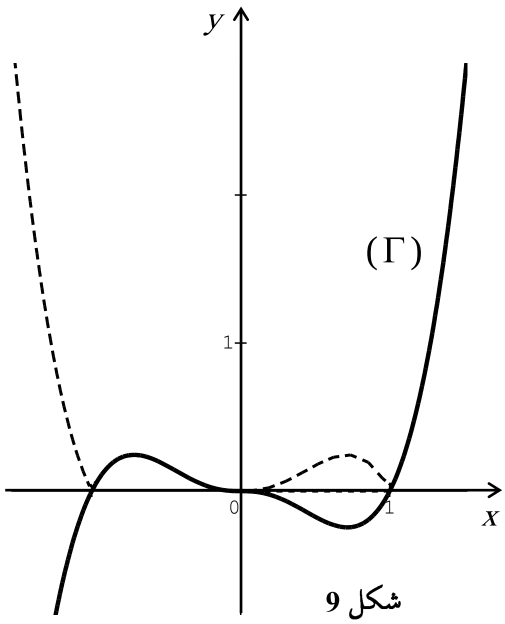
نلاحظ أن f فردية $f(-x)=-f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$، والمنحنى (Γ) يكون متناظرا بالنسبة لنقطة المبدأ.

ندرس f على $\left[0,+\infty\right[$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ ومنه (Γ) يقبل فرعا لا نهائيا باتجاه محور التراتيب. (الشكل **9**).

$f'(x)$ ينعدم من أجل $x=0$ و $x=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\approx 0,71$ ولدينا $f(0)=0$ ، $f\left(1/\sqrt[3]{e}\right)=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{e}\approx -0,25$

x	0		$1/\sqrt[3]{e}$		$+\infty$
$f'(x)$			0	$-$ $+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f\left(1/\sqrt[3]{e}\right)$	$\nearrow$	0



شكل 9

المنحنى (Γ) يقبل نقطة انعطاف عند نقطة المبدأ، وعندها يكون المماس محمولا على محور الفواصل.

ج) نلاحظ بأن:

$$f(|x|)=\begin{cases} f(x), & x\geq 0 \\ f(-x), & x<0 \end{cases}$$

ومنحنى $f(|x|)$ على $[0,+\infty[$ ينطبق على (Γ)، وعلى $]-\infty,0]$ يتناظر مع (Γ) بالنسبة لمحور التراتيب.

أما منحنى $\left|f(|x|)\right|$ فهو ينطبق على منحنى $f(|x|)$ في نصف المستوى العلوي، ويتناظر معه بالنسبة لمحور التراتيب بالنسبة لنصف المستوى السفلي.

تمرين رقم 2

$f(x)$ دالة مستمرة على $\mathbb{R}_+^*$ حيث :

$$f(x)=\begin{cases} (\ln x)^2-\ln x, & 1\geq x>0 \\ (\ln x)^2, & x>1 \end{cases}$$

1. عين الصور $f(\frac{1}{5})$، $f(\frac{1}{e})$، $f(\frac{1}{2})$، $f(1)$، $f(2)$، $f(e)$، $f(5)$.
2. أدرس قابلية اشتقاق f عند $x_0=1$.
3. ادرس تغيرات f على $\mathbb{R}_+^*$، واستنتج بأن اقتصار f على $[1,+\infty[$ هو تطبيق تقابلي.
عين التطبيق العكسي f^{-1}
4. أنشئ منحنيي الدالتين f و f^{-1} في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (2 سم على المحورين).

هل يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x)$ في المجال $[0.5\ ;\ 2]$ ؟

الحل

1. حساب الصور $f(\frac{1}{5})$ ،$f(\frac{1}{e})$ ،$f(\frac{1}{2})$ ، $f(1)$ ، $f(2)$ ، $f(e)$ ، $f(5)$.

$f(\frac{1}{5})\approx 4.20$ ، $f(\frac{1}{e})=2$ ، $f(\frac{1}{2})\approx 1.17$ ، $f(1)=0$ ،

$f(2)\approx 0.48$ ، $f(e)=1$ ، $f(5)\approx 2.60$

2. دراسة اشتقاق الدالة f

• نلاحظ بأن الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2\ln x - 1}{x}, & 1 > x > 0 \\ \dfrac{2\ln x}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

• دراسة الاشتقاق عند $x_0 = 1$ بحساب النهايتين:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(\ln x)^2 - \ln x - 1}{x-1} = -1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(\ln x)^2 - 1}{x-1} = 0$$

ينتج أن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 1$. ومنحنى f يقبل نصفي مماسين عند $x_0 = 1$.

3. • تغيرات f على $\mathbb{R}_+^*$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$ ومنه منحنى f يقبل فرعا لا نهائيا باتجاه محور الفواصل.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. ومنه منحنى f يقبل محور التراتيب كخط مقارب. (الشكل **10.2**).

نلاحظ بأن منحنى f يقبل نقطة انعطاف عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = e$. (لأن الدالة المشتقة الثانية f'' تنعدم عند $x_0 = e$ وتغير إشارتها على جانبيها).

جدول تغيرات f

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-1 \Vert 0$	$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

• **اقتصار** f **على** $[1, +\infty[$ **وتعيين** $f^{-1}(x)$:

الدالة $f(x)$ مستمرة ومتزايدة تماما على $[1, +\infty[$، وتأخذ قيمها في $[0, +\infty[$ فهي تقابل.

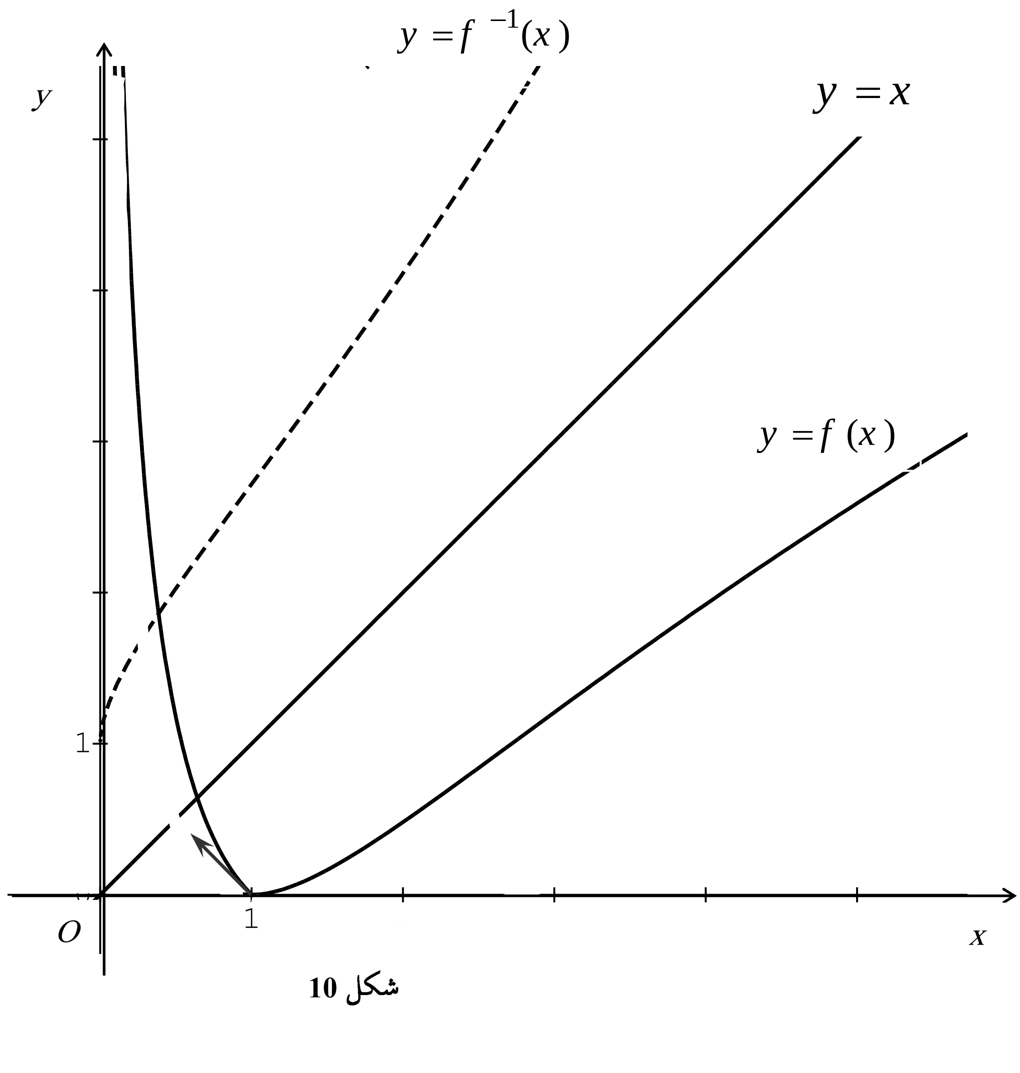
تكون أيضا الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0, +\infty[$ في $[1, +\infty[$.

منحنيا f و f^{-1} يكونان في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ متناظرين بالنسبة للمستقيم $y = x$ (الشكل 2).

• بوضع : $y = f(x) = (\ln x)^2$, $x \geq 1$ نحصل على $x = e^{\sqrt{y}}$, $y \geq 0$

ومنه $f^{-1}(x) = e^{\sqrt{x}}$ $(x \geq 0)$

4. **منحنيا الدالتين** f **و** f^{-1} **في المعلم المتعامد والمتجانس** $(O; \vec{i}, \vec{j})$ يوضحه (الشكل 10).



شكل 10

5. **اختبار شروط نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x)$ في المجال $[0\,,\,2]$**

صحيح إن الدالة f مستمرة على $[0\,,\,2]$ ، لكنها لا تقبل الاشتقاق على $]0\,,\,2[$. لأنها لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 1$ وبالتالي لا يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية في هذه الحالة.

تمرين رقم 3

ليكن (Γ) المنحنى البياني للدالة $f(x)$ حيث :

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x<0 \\ 0\,, & x\geq 0 \end{cases}$$

1. عين D_f مجموعة تعريف f . وادرس استمرار الدالة $f(x)$ على D_f .
2. بين أن $f(x)$ تقبل الاشتقاق مرتين عند $x_0 = 0$ ، عين الدالتين المشتقتين $f'(x)$ و $f''(x)$.
3. ادرس تغيرات $f(x)$ وأنشئ منحناها (Γ) في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ (4 سم على المحورين) .
4. بين أن $f(x)$ هي تطبيق تقابلي من $]-\infty,0]$ في $[0,+1[$.
عين دالتها العكسية f^{-1} ، ثم أنشئ منحناها (Φ) في نفس المعلم السابق .
5. عين معادلة المستقيم المماس (Δ) للمنحنى (Γ) عند $x_0 = -1$.

الحل

1. **مجموعة تعريف f ، ودراسة الاستمرار :**

مجموعة تعريف $f(x)$ هي $D_f =]-\infty,+\infty[$. f مستمرة على $\mathbb{R}^*$ ، لأنها مركبة من دوال مستمرة، وهي أيضا مستمرة عند الصفر لأن $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$. إذن الدالة $f(x)$ مستمرة على $D_f = \mathbb{R}$.

2. **دراسة الاشتقاق للدالة $f(x)$:**

- على $]0\,,\,+\infty[$ ، تكون الدالة $f(x)$ معدومة، ومنه: $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\,,\; f'(x)=f''(x)=0$
- على $]-\infty\,,\,0[$ ، الدالة $f(x)$ تقبل الاشتقاق مرتين، حيث :

$$\forall x\in\mathbb{R}_-^*\,,\; f'(x)=\frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\;;\quad f''(x)=\frac{(2x+1)\,e^{\frac{1}{x}}}{x^4}$$

- عند $x_0 = 0$ ، يكون لدينا $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-0}{x-0}==\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}=0$

ومنه $f(x)$ تقبل الاشتقاق عند الصفر لأن: $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=f'(0)=0$

ولدينا

$$\forall x\in\mathbb{R}\,,\; f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,, & x<0 \\ 0\,, & x\geq 0 \end{cases}$$

❑ وكذلك $f'(x)$ تقبل الاشتقاق عند الصفر، لأن : $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=0$ ،

ومنه $f(x)$ تقبل الاشتقاق مرتين عند الصفر. ويكون لدينا:

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ f''(x)=\begin{cases}\dfrac{(2x+1)\,e^{\frac{1}{x}}}{x^4}\ , & x<0\\ 0\ , & x\geq 0\end{cases}$$

3. **دراسة تغيرات** $f(x)$ **، وإنشاء المنحنى** (Γ) **في المعلم المتعامد والمتجانس** $(O,\vec{i},\vec{j})$.

❑ على $]0\ ,+\infty[$ ، الدالة $f(x)$ معدومة، ولدينا: $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ ,\ f(x)=f(0)=0$

❑ على $]-\infty\ ,0[$ ، يكون لدينا $f'(x)=\dfrac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\leq 0$. ومنه الدالة $f(x)$ متناقصة على هذا المجال.

ولدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$

والجدول الآتي يلخص تغيرات $f(x)$ على نصف المجال $]-\infty\ ,0]$:

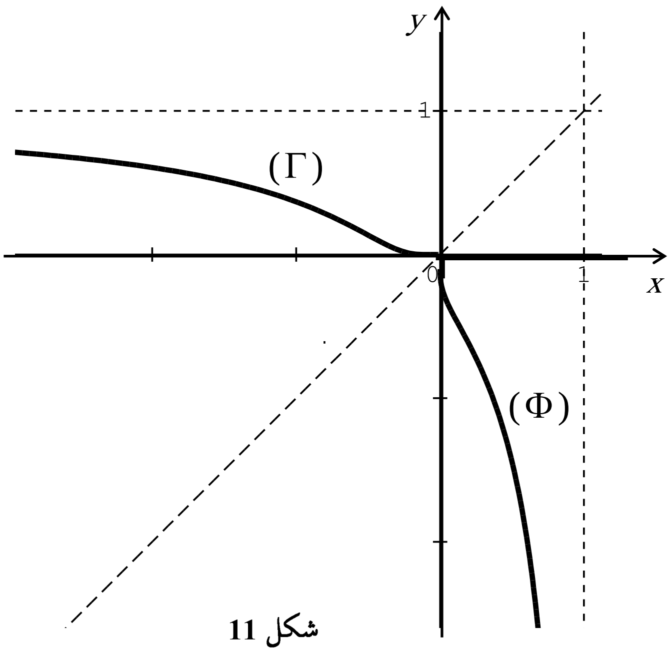
x	$-\infty$ 0
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow 0$

والمنحنى (Γ) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$، يوضحه (الشكل **11**).

4. **نبين أن** $f(x)$ **هي تطبيق تقابلي من** $]-\infty,0]$ **في** $[0,+1[$:

الدالة $f(x)$ مستمرة ومتناقصة تماما على $]-\infty,0]$، وتأخذ قيمها في المجال $[0,+1[$، فهي تقابل.

الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ تكون مستمرة ومتناقصة تمام على المجال $[0,+1[$ في $]-\infty,0]$. ويكون منحناها (Φ) مناظرا لـ (Γ) بالنسبة للمستقيم $y=x$ في المعلم السابق.



شكل 11

❑ تعيين $f^{-1}(x)$: نضع $y = f(x) = e^{\frac{1}{x}}\ ,\ x<0$

لدينا $y = \frac{1}{\ln x}\ ,\ 0<x<1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = \frac{1}{x}\ ,\ x<0$

ومنه
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln x}, & 0<x<1 \\ 0\ , & x=0 \end{cases}$$

المماس عند نقطة المبدأ O للمنحنى (Φ) يوازي المحور العمودي.

5. **معادلة المماس (Δ) للمنحنى (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=-1$:**

لدينا $f(-1)=\frac{1}{e}\ ,\quad f'(-1)=-\frac{1}{e}\ ;\quad y-\frac{1}{e}=\frac{1}{e}(x+1)$

فتكون معادلة المماس لمنحنى $y=f(x)$ عند النقطة $\mathrm{A}\left(-1\ ,\ \frac{1}{e}\right)$ ، هي: $y=-\frac{1}{e}x$.

تمرين رقم 4

نعتبر الدالة العددية $f(x)$ حيث :

$$f(x)=\frac{1}{3}e^{x^2}\left(1-e^{-\frac{3}{2}x^2}\right)$$

أدرس تغيرات $f(x)$ على مجموعة تعريفها، ثم أحسب $f(0,7)$ ، $f(1)$ ، $f(1,5)$ ، $f(1,7)$

ثم أنشئ المنحنى (Γ) الممثل للدالة $f(x)$ في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الحل

$f(x)$ معرفة ومستمرة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$، وهي زوجية. لدينا على $[0,+\infty[$:

$$f(0)=0\,,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\,,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty\,,\quad f'(x)=\frac{1}{3}e^{x^2}\left(2+e^{-\frac{3}{2}x^2}\right)$$

والمنحنى (Γ) يقبل فرع لا نهائي باتجاه محور التراتيب .

$$f'(x)=\frac{1}{3}e^{x^2}\left(2+e^{-\frac{3}{2}x^2}\right)$$

جدول التغيرات $f(x)$ على $[0,+\infty[$:

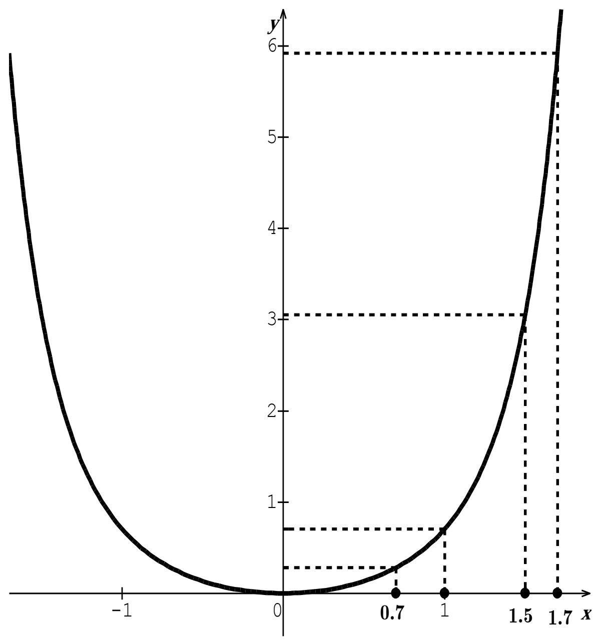
x	$+\infty$ 0
$f'(x)$	+
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$

حساب الصور $f(x_i)$:

$f(0,7)\approx 0.28$ ، $f(1)\approx 0.70$ ،

$f(1,5)\approx 3.05$ ، $f(1,7)\approx 5.92$

المنحنى (Γ) الممثل للدالة $f(x)$، يوضحه (الشكل **12**).



شكل 12

تمرين رقم 5

$f(x)$ دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+1 & , \quad x\geq 1 \\ x\,e^{x-1}+1 & , \quad x<1 \end{cases}$$

1. عين الصور $f(-2)$ ،$f(-1)$ ،$f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(1.5)$ ، $f(2)$.
2. أدرس قابلية اشتقاق f عند $x_0 = 1$.
3. ادرس تغيرات f على $\mathbb{R}$، واستنتج بأن اقتصار f على $]1,+\infty[$ هو تطبيق تقابلي. عين التطبيق العكسي f^{-1}
4. أنشئ منحنيي الدالتين f و f^{-1} في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (2 سم على المحورين).
5. هل يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x)$ في المجال $[0\,,\,2]$ ؟
6. استخدم التكامل بالتجزئة لحساب $I=\int_0^2 f(x)\,dx$. لوّن بقلم الرصاص مساحة الحيز من المستوي التي تمثل قيمة هذا التكامل (المحدد بالمستقيمات: $x=0$ و $y=0$ و $x=2$ ومنحنى $y=f(x)$).

الحل

1. حساب الصور $f(-2)$ ،$f(-1)$ ،$f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(1.5)$ ، $f(2)$.

بالحساب المباشر: $f(-2)=-\frac{2}{e^3}+1\simeq 0.90$ ، $f(-1)=-\frac{1}{e^2}+1\simeq 0.86$ ،$f(0)=1$ ،

$f(1)=2$ ،$f(1.5)=\sqrt{e}+1\simeq 2.65$ ، $f(2)=e+1\simeq 3.72$

2. دراسة اشتقاق الدالة f

- الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$:

$$f'(x)=\begin{cases} e^{x-1} & , \quad x>1 \\ (x+1)\,e^{x-1} & , \quad x<1 \end{cases}$$

- دراسة الاشتقاق عند $x_0 = 1$ بحساب النهايتين:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x\,e^{x-1}+1-2}{x-1}=2$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+1-2}{x-1}=1$$

ينتج أن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 1$. ومنحنى f يقبل نصفي مماسين عند $x_0 = 1$.

3. **تغيرات f على $\mathbb{R}$**

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ومنحنى f يقبل فرعا لا نهائيا باتجاه محور التراتيب.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$. ومنحنى f يقبل خط مقارب معادلته $y = 1$. (الشكل **13**).

جدول تغيرات f

x	$+\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$2+$	0	$-$	‖ 1	$+$	
$f(x)$	1	↘	$1-e^{-3}$	↗	2	↗	$+\infty$

نلاحظ بأن منحنى f يقبل نقطة انعطاف عند النقطة التي فاصلتها $x = -2$. (لأن الدالة المشتقة الثانية f'' تنعدم عند $x_0 = 1$ وتغير إشارتها على جانبيها).

- **اقتصار f على $[1, +\infty[$ وتعيين $f^{-1}(x)$:**

الدالة $f(x)$ مستمرة ومتزايدة تماما على $]1, +\infty[$، وتأخذ قيمها في $]1, +\infty[$ فهي تقابل. تكون أيضا الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1, +\infty[$ في $]1, +\infty[$.

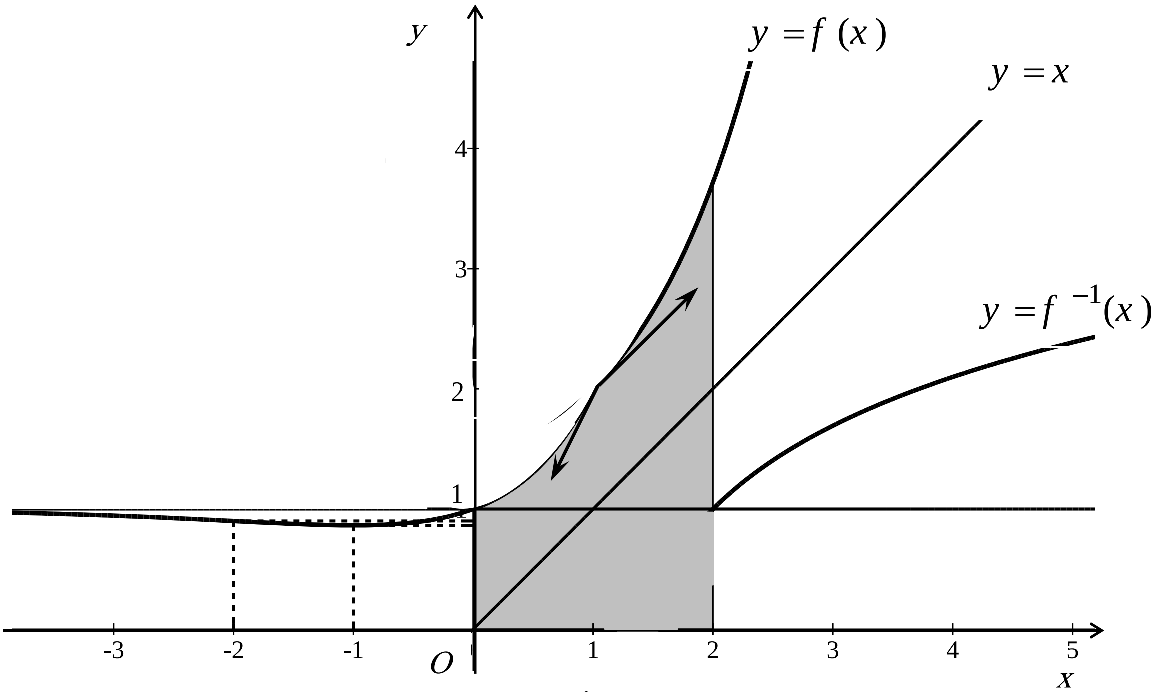
منحنيا f و f^{-1} يكونان في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ متناظرين بالنسبة للمستقيم $y = x$.

- بوضع : $y = f(x) = e^{x-1} + 1,\ x \geq 1$ نحصل على

$$x = \ln(y-1) + 1,\ y \geq 2$$

ومنه $\boxed{(x \geq 2) \qquad f^{-1}(x) = \ln(x-1) + 1}$

4. **منحنيا الدالتين f و f^{-1} في المعلم المتعامد والمتجانس** $(O; \vec{i}, \vec{j})$ يوضحه (الشكل **13**).



شكل 13

5. **اختبار شروط نظرية التزايدات المنتهية على الدالة** $f(x)$ **في المجال** $[0\,,2]$

صحيح إن الدالة f مستمرة على $[0\,,2]$ ، لكنها لا تقبل الاشتقاق على $]0\,,2[$. لأنها لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 1$. وبالتالي لا يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية في هذه الحالة.

6. **استخدام التكامل بالتجزئة لحساب** $I = \int_0^2 f(x)\,dx$

لدينا
$$I = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 (x\,e^{x-1}+1)\,dx + \int_1^2 e^{x-1}dx$$

لنحسب (بالتجزئة) التكامل J : $J = \int x\,e^{x-1}dx$

نضع $u = x$ يكون $du = dx$ ، وبوضع $dv = e^{x-1}dx$ يكون $v = e^{x-1}$

ومنه
$$J = x\,e^{x-1} - \int e^{x-1}dx = x\,e^{x-1} - e^{x-1}$$

إذن
$$I = \int_0^2 f(x)\,dx = \left[x\,e^{x-1} - e^{x-1} + x\right]_0^1 + \left[e^{x-1}\right]_1^2$$

ومنه قيمة I بالوحدات المربعة :
$$\boxed{I = (e^{-1}+1)+(e-1) = e + e^{-1} \approx 3.08}$$

المراجع:

- K. Abdelkarim, *Exercices résolus d'analyse* (*avec rappel de cours*), Alger, OPU, 1993.
- E. Azoulay, *Mathématiques*: *cours et exercices*, tome 1, Paris, Mc Graw-Hill, 1983.
- S. Benachour, *Exercices d'analyse avec solutions*, tome 1, Alger, Khawarysm, 1991.
- J.-J. Colin, *Fonctions usuelles*: *exercices corrigés avec rappels de cours*, Paris, Cépaduès, 2007.
- Y. Dodge, *Mathématiques de base pour économistes*, Paris, Springer, 2002.
- G. Patrik, *Mathématiques pour l'économie*: *méthodes et exercices corrigés*, Belgique : de boeck, 2005.
- F. Pham, *Fonctions d'une ou deux variables*: des fonctions variables, Paris, Dunod, 2003.