جامعة الجيلالي بونعامة - خميس مليانة
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية
وعلوم التسيير

السداسي الأول

المجموعات: 2 و 3 و 4

السنة الأولى جذع مشترك LMD

# رياضيات 01

## من مطبوعة :

## الرياضيات للتخصصات الاقتصادية

ملخص درس : **مفاهيم عامة حول المتتاليات العددية**

1. تعريف المتتالية العددية
2. متتاليات رتيبة
3. الحواد
4. نهاية متتالية
5. متتاليات مستخرجة
6. متتاليات متجاورة
7. متتالية تدريجية
8. تمارين محلولة

السنة الجامعية 2023 -2024

## 1. تعريف المتتالية العددية

نسمي متتالية منتهية بـ $p$ حد، كل دالة عددية معرفة على الأعداد الطبيعية الأولى $n=1,2,...,p$ ، وإذا كانت هذه الدالة معرفة على كل الأعداد الطبيعية، نقول عن المتتالية المرفقة بأنها غير منتهية.

نستخدم الرمز $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ لتمثيل المتتالية (غير المنتهية) $u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$ أو $(u_n)$.

$u_n$: قيمة الحد من الرتبة $n$.

## 2. متتاليات رتيبة

- $(u_n)$ متزايدة $\Leftrightarrow$ $\forall n\ ,\ u_{n+1}\geq u_n$
- $(u_n)$ متزايدة تماما $\Leftrightarrow$ $\forall n\ ,\ u_{n+1}> u_n$
- $(u_n)$ ثابتة $\Leftrightarrow$ $\forall n\ ,\ u_{n+1}= u_n$
- $(u_n)$ رتيبة $\Leftrightarrow$ $(u_n)$ متناقصة أو متزايدة.

### 1.2 متتاليات حسابية وهندسية

**متتالية حسابية:** $(u_n)$ متتالية حسابية إذا تحقق $\forall n\in\mathbb{N},\ \ u_{n+1}=u_n+r$ .

الحد العام: $u_n=u_0+r\cdot n$

مجموع الحدود الأولى: $S_n=(n+1)\cdot\dfrac{u_0+u_n}{2}$

**متتالية هندسية:** $(u_n)$ متتالية هندسية إذا تحقق $\forall n\in\mathbb{N},\ \ u_{n+1}=q\cdot u_n$

الحد العام: $u_n=u_0\times q^n$

إذا كان $q=0$، فإن $u_n$ يكون معدوما؛ ربما ليس كذلك من أجل $n=0$ .

إذا كان $q=1$ . تكون كل الحدود متساوية .

مجموع الحدود الأولى: $S_n=u_0\cdot\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ .

## 3. الحواد

### 1.3 تعاريف

لتكن $A$ جزء من $\mathbb{R}$ . نقول عن $M\in\mathbb{R}$ أنه حاد من الأعلى لـ $A$ ( $A$ محدودة من الأعلى)، إذا تحقق

$$\forall x\in A\ ,\quad x\leq M$$

ونقول عن $m\in\mathbb{R}$ أنه حاد من الأدنى لـ $A$ ( $A$ محدودة من الأدنى)، إذا تحقق: $\forall x\in A\ ,\quad x\geq m$

وإذا كان $M$ حاد من الأعلى لـ $A$ بحيث $M\in A$ فإن $M$ يسمى العنصر الأعظمي لـ $A$ . نرمز $\max(A)$

وإذا كان $m$ حاد من الأدنى لـ $A$ بحيث $m \in A$ فإن $m$ يسمى العنصر الأصغري لـ $A$.

ونرمز له بالرمز $\min(A)$

**ملاحظة :** العنصر الأعظمي (أو الأصغري) إن وجد فهو وحيد.

مثلا المجموعة $A = ]1, 2[ \cup \{3\}$ محدودة.

### 2.3 الحد الأعلى والحد الأدنى

لتكن $A$ جزء من $\mathbb{R}$.

نقول عن $\mu$ أنه حد أعلى لـ $A$، ونكتب $\mu = \sup(A)$، إذا تحقق

$$\forall x \in A\,,\quad x \le \mu\,,\ \forall \varepsilon > 0\,, \exists a \in A\,,\ \mu - \varepsilon < a$$

بمعنى أن $\mu$ هو حاد من الأعلى لـ $A$، وكل عدد حقيقي أصغر تماما من $\mu$ بالشكل $\mu - \varepsilon$، مع $\varepsilon > 0$ لن يكون حادا من الأعلى لـ $A$.

تعريف مشابه للحد الأدنى.

**خواص**

إذا وجد $\max(A)$، فإن $\sup(A) = \max(A)$

إذا كان $\sup(A) \in A$، فإن $\max(A)$ موجود و $\sup(A) = \max(A)$

**نقبل النتيجة :** كل مجموعة محدودة وغير خالية من $\mathbb{R}$ تقبل حدا أعلى.

### 3.3 متتاليات محدودة

يكون العدد $M$ **حاد من الأعلى** للمتتالية $(u_n)$، عندما يتحقق $u_n \le M$ من أجل كل $u$، ويسمى **أصغر** الحواد العليا **بالحد الأعلى** للمتتالية. وعندئذ نقول عن المتتالية $(u_n)$ بأنها محدودة من الأعلى.

وإذا وجدت أكبر قيمة لـ $u_n$ تساوي $a$ (الحد الأعلى)، فإن هذه القيمة هي ذروة المتتالية.

تعريف مشابه يخص المحدودية من الأدنى.

**ملاحظة**

تكون المتتالية $(u_n)$ **محدودة،** إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأدنى. أي إذا وجد عدد $C$ حيث

$$\forall n\,,\quad |u_n| \le C$$

**أمثلة**

- $\left(\frac{1}{n}\right)$: محدودة بـ 0 و 1 .
- $u_n = 2 - n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$: حدها الأعلى 1، لكنها ليست محدودة من الأدنى.

## 4. نهاية متتالية

يكون العدد $\ell$ نهاية للمتتالية $(u_n)$، ونكتب $\lim u_n = \ell$ أو $u_n \to \ell$؛ عندما يكون، من أجل كل عدد $\varepsilon > 0$، يوجد $n$، بحيث يكون لدينا ابتداء من هذه المرتبة: $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$.

أو بعبارة أخرى إذا كان من أجل كل عدد $\varepsilon > 0$، تكون كل حدود المتتالية $(u_n)$ باستثناء عدد منته منها تحقق المتراجحتين $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$، أو تحقق $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

– عندما تقبل متتالية نهاية نقول عنها بأنها **متقاربة**، وتكون **متباعدة** بخلاف ذلك.

– مثلا في المتتالية $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \to 0$، إذا رمزنا بـ $n$ للمرتبة الأولى الأكبر من $\frac{1}{\varepsilon^2}$، فإنه يكون لدينا ابتداء من هذه المرتبة $\frac{1}{n} < \varepsilon^2$ وبالتالي $-\varepsilon < u_n < +\varepsilon$ والمتتالية متقاربة نحو الصفر.

### 1.4 متتاليات متقاربة

- كل متتالية تقبل نهاية واحدة على الأكثر.
- كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى تكون متقاربة.
- إذا كانت $(u_n)$ و $(v_n)$ متقاربتين، وكان $v_n < u_n$ من أجل كل $n$، فإن $\lim v_n < \lim u_n$.
- إذا كانت $(u_n)$ و $(v_n)$ متقاربتين، فإن $\lim(u_n - v_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim u_n = \lim v_n$
- كل متتالية متقاربة تكون محدودة.
- كل متتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى تكون متباعدة نحو $+\infty$.
- إذا كانت متتالية $(u_n)$ محدودة و $(v_n)$ متقاربة نحو 0، فإن المتتالية $(u_n \cdot v_n)$ تكون متقاربة نحو 0
- إذا حققت متتالية $(u_n)$ الشرط الآتي :

$$\forall h > 0,\ \exists k \in \mathbb{N},\ p > k \ \wedge\ q > k \quad \Rightarrow \quad |u_p - u_q| < h$$

تكون متقاربة.

- إذا لم تنعدم متتاليتان $(u_n)$ و $(v_n)$، فإنهما تكونان متكافئتين إذا تحقق $\lim \frac{v_n}{u_n} = 1$ ، وعندئذ يكون لهما نفس النهاية.

### 2.4 عمليات على المتتاليات المتقاربة

إذا تقاربت متتاليتان $(u_n)$ و $(u'_n)$ نحو $\ell$ و $\ell'$ على الترتيب، فإنه يكون لدينا:

$$u_n \pm v_n \to \ell \pm \ell'$$

$$u_n \cdot v_n \to \ell . \ell'$$

$$\frac{u_n}{v_n} \to \frac{\ell}{\ell'} \qquad (\ell' \neq 0)$$

**ملاحظة** تؤول المتتالية $(u_n)$ نحو النهاية $+\infty$ إذا تحقق: $\forall h>0,\ \exists k\in\mathbb{N},\ n>k \Rightarrow u_n>h$

## 3.4 تمرين محلول

نعتبر المتتالية ذات الحد العام: $v_n=\dfrac{1}{n!}$ $(n\in\mathbb{N})$.

1. أحسب $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ وأثبت أن المتتالية $(v_n)$ متناقصة مهما كان $n\in\mathbb{N}$.
2. أثبت أنه من أجل كل $n\geq 1$ يكون $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\leq\dfrac{1}{2}$.
3. استنتج أن $v_n\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ ، $\forall\ n\geq 1$ . ماذا نقول عن المتتالية $(v_n)$ والسلسلة $\sum v_n$ ؟

**الحل**

1. حساب $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ والمتتالية $(v_n)$

لدينا : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\dfrac{1}{n+1}\leq 1$ $\forall\ n\in\mathbb{N}$ . ومنه المتتالية ذات الحدود الموجبة $(v_n)$، متناقصة .

2. نثبت أنه من أجل كل $n\geq 1$ يكون $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\leq\dfrac{1}{2}$.

إذا كان $n\geq 1$ فإن $n+1\geq 2$ ، وبما أن $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\dfrac{1}{n+1}$ ، فإن $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\leq\dfrac{1}{2}$ مهما كان $n\geq 1$ .

3. المتتالية $(v_n)$ والسلسلة $\sum v_n$

لنثبت صحة الخاصية $P_n$ : $0\leq v_n\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ من أجل كل $n\geq 1$ .

لدينا $P_1$ صحيحة. إذا انتقلنا إلى القيمة $n\geq 1$ ، فسيكون لدينا $0\leq v_{n+1}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ ، أي أن $P_n$ مهما كان $n\geq 1$ .

إذن لدينا $\forall n\geq 1,\quad 0\leq v_n\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

بالمرور على النهاية لما $n\to\infty$ ، نستنتج أن $\lim\limits_{n\nearrow+\infty} v_n=0$

## 5. متتاليات مستخرجة

نعتبر المتتالية $u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$. لنستخرج الحد $u_{n_1}$ ذي الرتبة $n_1$، ثم الحد الثاني $u_{n_2}$ الذي مرتبته $n_1<n_2$، وهكذا مع بقية الحدود؛ وبذلك نحصل على المتتالية المستخرجة (غير المنتهية):

$$v_1=u_{n_1},\ v_2=u_{n_2},\dots,\ v_n=u_n,\dots$$

**مثلا:** المتتالية $1,3,5,...$ مستخرجة من المتتالية $1,2,3,...$

- في كل متتالية محدودة، يمكن استخراج متتالية جزئية متقاربة.
- في كل متتالية عددية، توجد متتالية مستخرجة تكون إما متزايدة، وإما متناقصة، وإما ثابتة.
- إذا آلت متتالية إلى نهاية معلومة، فإن أية متتالية مستخرجة منها ستؤول إلى نفس النهاية.

**مثلا:** تؤول المتتاليات $\left(\frac{1}{n}\right)$ و $\left(\frac{1}{2n}\right)$ و $\left(\frac{1}{3n}\right)$ إلى نفس النهاية، وهي الصفر.

## 6. متتاليات متجاورة

تكون المتتاليتان $(u_n)$ و $(v_n)$ متجاورتين إذا تحقق ما يلي:

- $(u_n)$ متزايدة و $(v_n)$ متناقصة؛ أو بالعكس،
- $\forall n \quad u_n \le v_n \Rightarrow u_n \le u_{n+1} \le v_{n+1} \le v_n$ ،
- $\lim(u_n - v_n) = 0$ .

وعندئذ تتقارب المتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$ نحو نفس النهاية.

## 7. متتاليات تدريجية

$f$ دالة عددية، نستطيع تعريف المتتالية $(u_n)$ بإعطاء حدها الأول $u_0$ وعلاقة التدريج $u_n = f(u_{n-1})$

لدراسة هذا النمط من المتتاليات، ندرس تغيرات $f$ ، ونحدد المجال $I$ الذي يحوي جميع حدود المتتالية $(u_n)$.

- إذا كانت الدالة $f$ متزايدة على مجال $I$، فإن المتتالية $(u_n)$ تكون رتيبة. مقارنة بين قيمتي الحدين الأولين منها تدلنا على تناقص أو تزايد المتتالية $(u_n)$.

بالفعل، إذا ما اعتبرنا $I = [a;b]$، وكانت $u_0 \le u_1$، فإن $f(u_0) \le f(u_1)$. بالتراجع يمكن إثبات أن $(u_n)$ المحدودة من الأعلى بـ $b$، تكون متزايدة. فهي إذن متقاربة.

وكذلك إذا كانت $u_0 \ge u_1$، فإن $f(u_0) \ge f(u_1)$. ونثبت أيضا بالتراجع إثبات أن $(u_n)$ المحدودة من الأدنى بـ $a$، تكون متناقصة. إذن فهي متقاربة.

إذا كانت $\ell$ هي نهاية $(u_n)$، ولكون $f$ مستمرة على $I$ ، فإن $(f(u_n))$ ستتقارب نحو $f(\ell)$.

إذن لدينا $u_n \longrightarrow \ell$، ومن العلاقة $u_n = f(u_{n-1})$ والمرور على النهاية، نحصل على المساواة $f(\ell) = \ell$.

- إذا كانت الدالة $f$ متناقصة على $I$، فإن المتتاليتين المستخرجتين $(u_{2n})$ و $(u_{2n+1})$ تكونان رتيبتين، وبجهتين متعاكستين.

بالفعل، إذا كانت $f$ متناقصة، فإن $f \circ f$ تكون متزايدة. ومنه يكون لدينا:

$$\forall x, y \in I : x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \Rightarrow f \circ f(x) \leq f \circ f(y)$$

بتطبيق النظرية السابقة على الدالة $f \circ f$، تكون

المتتالية $(u_0; u_2 = f \circ f(u_0); u_4 = f \circ f(u_2); \dots)$ رتيبة ومتقاربة، وكذلك المتتالية $(u_1; u_3 = f \circ f(u_1); u_5 = f \circ f(u_3); \dots)$، تكون رتيبة ومتقاربة.

- لتكن $f$ دالة عددية مستمرة. إذا كانت المتتالية التدريجية $u_n = f(u_{n-1})$ متقاربة، فإن نهايتها $\ell$ هي حل للمعادلة $f(x) = x$.

وهذا ما يدفع بيانيا للاستعانة بمنحنى $y = f(x)$ و $y = x$.

- إذا كانت $(u_n)$ متقاربة وتقبل النهاية $\ell$، فإن المتتالية $f(u_n)$ تكون متقاربة وتقبل النهاية $f(\ell)$، حيث $f$ دالة عددية مستمرة.

- لتكن $f$ دالة تقبل الاشتقاق، إذا كان $|f'(x)| \leq \omega < 1$ على مجال $I$ مركزه $\ell$: حل للمعادلة $f(\ell) = \ell$، فإنه توجد متتالية تدريجية $u_n = f(u_{n-1})$ تتقارب نحو $\ell$.

## 8 تمارين محلولة

**تمرين رقم 1**

**نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ حيث:**

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n - 1}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

أ) **نضع** $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n}$.

**بين أن $(v_n)$ متتالية هندسية؛ جد أساسها واكتب حدها العام.**

**أكتب $u_n$ بدلالة $n$، ثم احسب** $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$

ب) **ادرس $u_n$ في الحالتين $u_1 = 0$، $u_1 = -1$.**

**الحل**

- $v_{n+1}$ بدلالة $v_n$:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1}} = 1 - \frac{3}{u_{n+1}} = 1 - \frac{3}{\frac{2u_n}{u_n - 1}} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2u_n} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{u_n}\right) = -\frac{1}{2} v_n$$

والمتتالية $(v_n)$ هندسية؛ أساسها $-\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_1=\frac{u_1-3}{u_1}=-2$.

عبارة $v_n$ بدلالة $n$:

$$v_n=(-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ومنه عبارة $u_n$:

$$v_n=\frac{u_n-3}{u_n}\Leftrightarrow u_n=\frac{3}{1-v_n}$$

$$u_n=\frac{3}{1-v_n}=\frac{3}{1-4(-1/2)^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{1-4(-1/2)^n}=3$$

- الحالة $u_1=0$:

المتتالية $(v_n)$ ليس لها معنى. لكن $(u_n)$ ثابتة، ومساوية للصفر $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=0$.

- الحالة $u_1=-1$:

المتتالية $(v_n)$ هندسية، حدها الأول 4 وأساسها $-\frac{1}{2}$؛ وحدها العام:

مهما يكون $n$: $v_n=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-8\left(-\frac{1}{2}\right)^n$، ومنه $u_n=\frac{3}{1-8(-1/2)^n}$

وفي هذه الحالة تكون أيضا $(u_n)$ متقاربة (نحو 3).

**تمرين رقم 2**

**نعتبر المتتالية التدريجية $(u_n)$، المعرفة كما يلي:**

$$\begin{cases}u_0=\sqrt{2}\\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}\ ,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$$

- **بين باستخدام بيان الدالة $y=f(x)=\sqrt{2+x}$ بأن $u_{n+1}=f(u_n)$**
- **برهن بأن هذه المتتالية محدودة من الأعلى بـ 2. وبين أنها متزايدة، واستنتج تقاربها.**

**الحل**

- إن قيمة $f(x)$ من أجل $x=u_n$، هي $f(u_n)=u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$

$f(x)$ متزايدة على المجال $]-2,+\infty[$.

بيانيا، تقترب النقط $M(x_0,f(x_0))$، $M(x_1,f(x_1))$، ...، $M(x_n,f(x_n))$ من النقطة $L(\ell,f(\ell))$: نقطة تقاطع منحنى $f$ مع المستقيم $y=x$.

وبالتالي $\ell$ تحقق $\ell=\sqrt{2+\ell}>0$ ومنه $\ell=2$.

– بالتراجع، من أجل $n=0$، $u_0=\sqrt{2}<2$.

بفرض أن $u_n<2$، يكون $u_n<2 \Rightarrow u_n+2<2+2=4 \Rightarrow \sqrt{u_n+2}<\sqrt{4}=2$

ومنه المتتالية $(u_n)$ محدودة من الأعلى بـ 2.

– لدينا: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n=\sqrt{2+u_n}-u_n=\dfrac{2+u_n-u_n^2}{\sqrt{2+u_n}+u_n}=\dfrac{(1+u_n)(2-u_n)}{\sqrt{2+u_n}+u_n}>0$

إذن $(u_n)$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ 2؛ فهي متقاربة. لتكن $\ell$ نهايتها.

بما أن $(u_n)$ و $(u_{n+1})$ لهما نفس النهاية $\ell$، فإن $\ell$ تحقق $\ell=\sqrt{2+\ell}$ ومنه $\ell=2$.

## تمرين رقم 3

أ ) نعرف المتتالية التدريجية $(u_n)$، بالشكل:
$$\begin{cases} u_0\in\mathbb{R}_+ \\ u_{n+1}=\dfrac{1+u_n^2}{2} \quad ,n\geq 0\end{cases}$$

1. ما هي النهايات الممكنة لـ$(u_n)$ ؟
2. بين أن المتتالية $(u_n)$ متزايدة مهما كان $n\in\mathbb{N}$ .
3. من أجل $u_0\in[0,+1]$، أثبت أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون لدينا $0\leq u_n<1$.
   واستنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة. ما هي نهايتها في هذه الحالة ؟
4. من أجل $1<u_0$، أثبت أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون لدينا $1<u_n$، استنتج أن $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$ .

ب ) نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة بالشكل: $u_{n+1}=0{,}5\,u_n+1$ مع $u_0=0{,}5$ .

1. أحسب الحدود $u_1$ و $u_2$ و $u_3$ و $u_4$ .
2. ليكن $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$، برهن أن:
   $\forall n\in\mathbb{N};\ 2-\varepsilon<u_n<2+\varepsilon \Rightarrow 2-\varepsilon<u_{n+1}<2+\varepsilon$ واستنتج أن $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=2$

الحل

أ ) المتتالية التدريجية $u_{n+1}=\dfrac{1+u_n^2}{2}$ مع $u_0\in\mathbb{R}_+$ :

1. النهايات الممكنة لـ$(u_n)$ :

إذا تقاربت المتتالية $(u_n)$ نحو $\ell$، فإن $\ell$ يحقق: $\ell=\dfrac{1+\ell^2}{2}$، ومنه $\ell^2-2\ell+1=0$ .

وبالتالي إذا تقاربت $(u_n)$ فإن نهايتها ستكون هي: $\ell=1$ .

2. تزايد المتتالية $(u_n)$ :

نضع: $u_n = x$ ، $u_{n+1} = f(x)$ ، فيكون $f(x) = \dfrac{1+x^2}{2}$ .

لدينا $f(x) - x = \dfrac{1+x^2}{2} - x = \dfrac{1}{2}(x-1)^2$

إذن $f(x) - x \geq 0$

ومنه نستنتج أن المتتالية $(u_n)$ تحقق : $\forall n \in \mathbb{N};\quad u_{n+1} - u_n \geq 0$

أي أن $(u_n)$ متزايدة مهما كان $n \in \mathbb{N}$ .

3. **من أجل $u_0 \in [0,+1]$، نثبت بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون لدينا** $0 \leq u_n < 1$ :

الدالة $f(x) = \dfrac{1+x^2}{2}$ معرفة ومستمرة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$، حيث: $f'(x) = x$

إذن $f'(x) \geq 0, \quad \forall x \geq 0$

لدينا: $\sup_{[0,+1]} f = 1$ و $\inf_{[0,+1]} f = \dfrac{1}{2}$

ومنه $f\big([0,+1]\big) \subseteq \left[\tfrac{1}{2},+1\right] \subseteq [0,+1]$

وأخيرا $\forall n \in \mathbb{N};\quad 0 \leq u_n < 1$ .

**نتيجة:** بما أن $(u_n)$ متزايدة ومحدودة من الأعلى، فهي متقاربة. $(u_n)$ تتقارب نحو النهاية $\ell = 1$ .

4. **من أجل $1 < u_0$، نثبت من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، يكون** $1 < u_n$ :

بوضع: $u_n = x$ و $u_{n+1} = f(x)$ ، وبما أن $f(x)$ متزايدة ، فإنه إذا كان $1 < u_0$، يكون:

$\forall n \in \mathbb{N};\quad u_n > 1$ ،

وتكون المتتالية $(u_n)$ أيضا متزايدة، لكنها لن تكون متقاربة في هذه الحالة، لأننا لو فرضنا أن $(u_n)$ محدودة،

فستصبح $(u_n)$ متقاربة نحو $\ell$ . $(\ell = 1)$، وعندئذ :

$$\forall n \in \mathbb{N};\quad u_n > u_0$$

بالمرور على النهاية لما $n \to \infty$، يكون : $\ell > u_0$ . لكن $1 < u_0$ ، ومنه $1 < \ell$ .

وهذا يناقض الفرض. إذن المتتالية المتزايدة $(u_n)$ فهي ليست متقاربة.

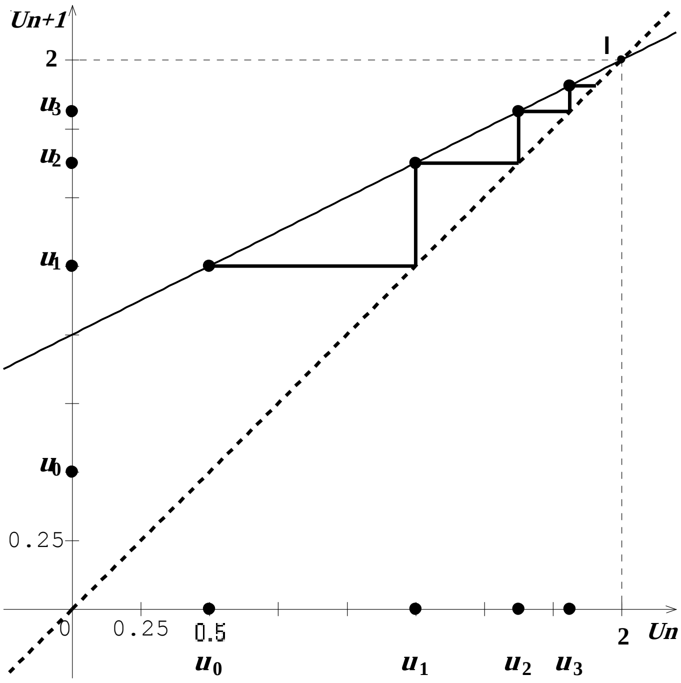
إذن $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

ب ) المتتالية $u_{n+1}=0,5\,u_n+1$ مع $u_0=0,5$ :

1. حساب الحدود $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$ ، $u_4$ :

لدينا: $u_0=0,5$ ، $u_1=1,25$ ، $u_2=1,625$ ، $u_3=1,8125$ ، $u_4=1,95313$ .

وهذا تمثيل بياني لهذه الحدود: (الشكل **1**).




**شكل 1**

2. من أجل $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ ، نبرهن: $2-\varepsilon < u_{n+1} < 2+\varepsilon \quad \Rightarrow \quad 2-\varepsilon < u_n < 2+\varepsilon \;;\; \forall n \in \mathbb{N}$

ليكن $0<\varepsilon$ ، نفرض أن: $2-\varepsilon < u_n < 2+\varepsilon$

فيكون $1-0.5\,\varepsilon < 0.5\,u_n < 1+0.5\,\varepsilon$

وأيضا $2-0.5\,\varepsilon < 1+0.5\,u_n < 2+0.5\,\varepsilon$

وبما أن $0<\varepsilon$ فإن $0.5\,\varepsilon < \varepsilon$ و $-\varepsilon < -0.5\,\varepsilon$

فإنه يكون لدينا $2-\varepsilon < u_{n+1} < 2+\varepsilon$

وهذا يعني من أجل $0<\varepsilon$ ، ولو وضعنا $n=\mathrm{N}_0$ ، يمكن في ضوء ما سبق أن نصوغ التعريف:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* ,\exists \mathrm{N}_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq \mathrm{N}_0 \,;\ \left|u_n-2\right| < \varepsilon$$

وهو يعني أيضا : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$

**تمرين رقم 4**

لتكن $(u_n)$ المتتالية المعرفة بالشكل:

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} \end{cases}$$

1. أحسب $u_1$ و $u_2$. ما هي النهايات الممكنة للمتتالية $(u_n)$ ؟
2. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، يكون لدينا: $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
واستنتج أن المتتالية $(u_n)$ تكون متقاربة.
3. أثبت أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، يكون لدينا: $\left|u_{n+1} - 1\right| \leq \dfrac{1}{2}\left|u_n - 1\right|$.
واستنتج من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، يكون لدينا: $\left|u_n - 1\right| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.

**الحل**

1. الحدان $u_1$ و $u_2$ ، وتقارب المتتالية $(u_n)$ .

الدالة $x \mapsto f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$ مستمرة ومتزايدة على $[-1, +\infty[$، ولدينا $f([-1, +\infty[) = \mathbb{R}_+$

لدينا $u_1 = f(u_0) = \sqrt{\dfrac{1+u_0}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+1/2}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$

$$u_2 = f(u_1) = \sqrt{\dfrac{1+u_1}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{3}/2}{2}} = \dfrac{1}{4}\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3}) \approx 0.966$$

النهايات الممكنة للمتتالية $(u_n)$ :

المتتالية $(u_n)$ ذات حدود موجبة، إذا تقاربت $(u_n)$ نحو $\ell$ ، فإن $\ell$ يحقق: $\ell = \sqrt{\dfrac{1+\ell}{2}}$ ، أي $\ell$ هو الحل الوحيد للمعادلة $2\ell^2 - \ell - 1 = 0$ . وهذه النهاية هي: $\ell = 1$ .

2. إثبات $0 < u_n < u_{n+1} < 1 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

بالتدريج : بدء التدريج $(n=0)$ : لدينا $u_0 = 0.5$ و $u_1 \approx 0.866$ , ومنه $0 < u_0 < u_1 < 1$ .

نفرض من أجل $n$ من $\mathbb{N}$ : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$، بما أن الدالة $f$ متزايدة على $[0,1]$ (لأنها متزايدة على $[-1, +\infty[$)، يكون لدينا : $f(0) < f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(1)$ ، أي

$\dfrac{\sqrt{2}}{2} < f(u_n) < f(u_{n+1}) < 1$ .

ومنه صحة المتراجحات : $0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$.

وأخيرا $0 < u_n < u_{n+1} < 1 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

إذن المتتالية $(u_n)$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ$(1)$ ، فهي متقاربة .

3. إثبات من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ : $|u_{n+1}-1| \le \frac{1}{2}|u_n-1|$ .

لدينا :
$$u_{n+1}-1=\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}-1=\frac{\frac{1+u_n}{2}-1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+1}=\frac{1}{2}\,\frac{u_n-1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+1}$$

وبملاحظة $0 \le \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \Leftarrow 1 \le \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+1$ ، ينتج $\frac{1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+1} \le 1$

وبالتالي يكون $|u_{n+1}-1| \le \frac{1}{2}|u_n-1|$

- استنتاج $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad |u_n-1| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

بالتدريج : لدينا $|u_0-1| = \left(\frac{1}{2}\right)^{0+1}$ صحيحة . $(u_0=0.5)$ .

نفرض من أجل $n \in \mathbb{N}$ أن $|u_n-1| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ . وقد برهنا أن : $|u_{n+1}-1| \le \frac{1}{2}|u_n-1|$ .

إذن $|u_{n+1}-1| \le \frac{1}{2}|u_n-1| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad |u_n-1|$

ومنه $|u_{n+1}-1| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad |u_n-1|$ صحيحة .

إذن $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad |u_n-1| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

وبما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ ، يكون $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-1|=0$ ، أي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

- **ندرس المتتالية بـ $u_0=0,4$ وبعلاقة التدريج $u_{n+1}=u_n^2+0,25 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$**

يتعلق الأمر بدراسة متتالية من النمط $u_{n+1}=f(u_n)$ ، $f(x)=x^2+0,5$

بما أن كل الحدود $u_n$ موجبة يكفي دراسة تغيرات الدالة $f$ على المجال $[0,+\infty[$ .

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad f'(x)=2x$$

الدالة $f$ متزايدة على المجال $[0,+\infty[$ ، وبالتالي، حسب النظرية، المتتالية $(u_n)$ رتيبة.

لدينا $u_1=0,66$ ، وبالتالي $u_0<u_1$ ، والمتتالية $(u_n)$ متزايدة.

وبما أنها محدودة من الأعلى بـ $0,5$ على سبيل المثال، فإنها متقاربة.

لتكن $\ell$ نهايتها، بما أن الدالة $f$ مستمرة فإن $\ell$ تحقق المعادلة $\ell = f(\ell)$، التي تكافئ $\ell^2 - \ell + 0,25 = 0$.

ومنه $\ell = 0,5$.

**تمرين رقم 5**

أ) نعتبر الدالة $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - x + 3$

1. أدرس تغيرات $f(x)$، واستنتج أنه إذا كان $x \in [0;3]$ فإن $f(x) \in [0;3]$.
2. بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ أن $f(x) \geq x$.

ب) نعرف المتتالية التدريجية $(u_n)$، بالشكل:

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^+ \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n^2 - u_n + 3 \quad , n \geq 0 \end{cases}$$

1. باستخدام السؤال (أ-2)، استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متزايدة.
2. من أجل $u_0 \in [0;3]$ وباستخدام السؤال (أ-1)، أثبت من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ أن $0 \leq u_n \leq 3$. واستنتج أن $(u_n)$ متقاربة، ما هي نهايتها في هذه الحالة ؟
3. من أجل $3 < u_0$، أثبت من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ أن $3 < u_n$. ثم استنتج أن $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

**الحل**

أ) 1. الدالة $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - x + 3$ معرفة ومستمرة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$، حيث:

$$f'(x) = \frac{2}{3}x - 1$$

جدول تغيرات $f(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | $2/3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $0$ | $-\;+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↘ | $9/4$ | ↗ $+\infty$ |

تغيرات $f(x)$، والاستلزام $x \in [0;3] \Rightarrow f(x) \in [0;3]$.

لدينا: $\inf_{[0,3]} f = f(3/2) = 9/4$ و $\sup_{[0,3]} f = f(0) = f(3) = 3$

ومنه $f\left([0,+3]\right)\subseteq[9/4,3]\ \subseteq[0,+3]$

2. نبين أنه من أجل كل $x$ و $\mathbb{R}$ يكون $f(x)\geq x$ .

نضع $g(x)=f(x)-x$ فيكون: $g(x)=\frac{1}{3}x^2-x+3-x=\frac{1}{3}(x-3)^2$

ومنه المطلوب $\forall x\in\mathbb{R}\quad g(x)\geq 0$

ب)

$$\begin{cases}u_0\in\mathbb{R}\\ u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n^2-u_n+3\ ;\ n\geq 0\end{cases}$$

1. من (أ-2)، استنتاج أن $(u_n)$ متزايدة.

من (أ-2) وبأخذ $x$ للقيمة $u_n$ نحصل على:

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=f(u_n)-u_n\\ &=\frac{1}{3}(u_n-3)^2\geq 0\end{aligned}$$

ومنه $(u_n)$ متزايدة.

2. دراسة تقارب المتتالية $(u_n)$

من أجل $u_0$ و $[0;3]$ وبوضع $x=u_n$، يكون لدينا :

$$u_n\in[0,3]\Rightarrow u_{n+1}\in[0,3]$$

أو استخدام برهان التراجع.

المتتالية $(u_n)$ متزايدة ومحدودة من الأعلى (بـ 3) فهي متقاربة.

وهي تتقارب نحو العدد الحقيقي $\ell$ الذي يحقق: $f(\ell)=\ell$ $\ell$ و $[0,3]$

لدينا $f(\ell)=\ell\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{3}(\ell-3)^2=0$ . ومنه $\lim\limits_{+\infty}u_n=\ell=3$ ,

3. من أجل $3<u_0$، نثبت من أجل كل $n$ و $\mathbb{N}$ أن $3<u_n$ . واستنتاج النهاية $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ .

من أجل $3<u_0$؛ نحسب نهاية $(u_n)$ على $]3,+\infty[$ بوضع $x=u_n$

$$u_{n+1}=f(u_n)=\frac{1}{3}u_n^2-u_n+3$$

$$f(x)=\frac{1}{3}x^2-x+3$$

$$f'(x)=\frac{2}{3}x-1>0\ ,\ \forall x>3$$

إذن من أجل $3<u_0$ يكون $u_n>3\quad\forall n\in\mathbb{N}$

ومن السؤال (أ-2) نستنتج أن المتتالية في هذه الحالة متزايدة.

ولنفرض أن $(u_n)$ محدودة. فتصبح المتتالية في هذه الحالة متزايدة ومحدودة فهي إذن متقاربة، لتكن $\ell$ نهايتها. التي تحقق $\ell=\frac{\ell^2}{3}-\ell+3 \Leftrightarrow \ell=3$

لكن $(u_n)$ متزايدة إذن: $\forall n\geq 0 \quad u_n\geq u_0$

بالمرور على النهاية نجد: $\ell\geq u_0$

لكن نعلم بأن $u_0>3$ إذن $3<\ell$.

وهذا يناقض الفرض بأن: $(u_n)$ محدودة.

وبما أن $(u_n)$ متزايدة، فهذا يؤدي إلى أن $(u_n)$ تؤول إلى $+\infty$. ي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

**تمرين رقم 6**

نعرف المتتالية التدريجية $(u_n)$، حيث :
$$\begin{cases} u_0=\frac{1}{2} \\ u_{n+1}=u_n^2+\frac{3}{16} \quad ; \ n\geq 1 \end{cases}$$

1. برهن أن : $\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{1}{4}\leq u_n\leq\frac{3}{4}$
2. بين أن $(u_n)$ متناقصة تماما، واستنتج أنها متقاربة نحو عدد حقيقي $\ell$ يطلب تعيينه.

**الحل**

1. **نثبت بالتراجع** $\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{1}{4}\leq u_n\leq\frac{3}{4}$

بدء التدريج متحقق $\frac{1}{4}<u_0<\frac{3}{4}$.

نفرض من أجل $n$ من $\mathbb{N}$ أن : $\frac{1}{4}\leq u_n\leq\frac{3}{4}$ فيكون $\frac{1}{4^2}\leq u_n^2\leq\frac{3^2}{4^2}$ ومنه

$\frac{1}{4^2}+\frac{3}{16}\leq u_n^2+\frac{3}{16}\leq\frac{3^2}{4^2}+\frac{3}{16}$ أي $\frac{1}{4}\leq u_{n+1}\leq\frac{3}{4}$ وهو المطلوب.

والمتتالية $(u_n)$ محدودة (من الأعلى والأسفل).

2. **بين أن** $(u_n)$ **متناقصة تماما**

$$u_{n+1}-u_n=u_n^2+\frac{3}{16}-u_n$$
$$=\frac{1}{16}\left(16u_n^2-\frac{1}{16}u_n+3\right)=\frac{1}{16}\left(4u_n-1\right)\left(4u_n-3\right)$$
$$\forall u_n\in\left]\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right[,\quad u_{n+1}-u_n<0$$

المتتالية $(u_n)$ محدودة من الأسفل ومتناقصة، فهي متقاربة. لتكن $\ell$ نهايتها. $\ell$ تحقق $\ell=\ell^2+\frac{3}{16}$

التي تكافئ $\frac{1}{16}\left(16\ell^2-\frac{1}{16}\ell+3\right)=\frac{1}{16}(4\ell-1)(4\ell-3)=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\ell=\frac{1}{4}$

## تمرين رقم 7

أ ) نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بالشكل: $f(x)=3-\dfrac{2}{x+1}$

1. أدرس تغيرات $f$ على المجال $[0,+\infty[$.
2. برهن بأنه إذا كان $x\in\left[0\,;\,1+\sqrt{2}\right]$ فإن $f(x)\in\left[0\,;\,1+\sqrt{2}\right]$.

ب ) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$، بالشكل:

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=3-\dfrac{2}{u_n+1} \quad , n\geq 0 \end{cases}$$

1. أحسب $u_1$ و $u_2$ و $u_3$. ما هي النهايات الممكنة لـ $(u_n)$ ؟
2. مثل بيانيا المنحنيين اللذين معادلتيهما $y=f(x)$ و $y=x$ في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، ثم استخدمهما لإنشاء النقط $A_0$ و $A_1$ و $A_2$ ذات الفواصل $u_0$ و $u_1$ و $u_2$. على الترتيب. (الوحدة 4 سم).
3. أثبت باستخدام البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون $0\leq u_n\leq u_{n+1}\leq 1+\sqrt{2}$. ماذا تستنتج ؟

جـ ) نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة بحدها الأول $v_0=3$ والعلاقة $v_{n+1}=3-\dfrac{2}{v_n+1}$ مهما كان $n\in\mathbb{N}$

1. أثبت، من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، أن المتتالية $(v_n)$ متناقصة.
2. بين من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، أن $v_n-u_n\leq 2\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$. واستنتج بأن $(u_n)$ و $(v_n)$ متجاورتان.
ما هي $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$ ؟

### الحل

أ ) 1. **تغيرات** $f$

الدالة $f(x)=3-\dfrac{2}{x+1}$ مستمرة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ حيث $f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$

والدالة $f(x)$ متزايدة على $\mathbb{R}^+$.

2. **الاستلزام** $x\in\left[0\,;\,1+\sqrt{2}\right] \Leftarrow f(x)\in\left[0\,;\,1+\sqrt{2}\right]$

ليكن $x\in\left[0\,,1+\sqrt{2}\right]$. بما أن $0\leq x\leq 1+\sqrt{2}$ و $f$ متزايدة على $[0,+\infty[$، فإن

$f(0) \leq f(x) \leq f(1+\sqrt{2})$ ومنه $1 \leq f(x) \leq 1+\sqrt{2}$

**ب) 1. الحدود** $u_1$ **و** $u_2$ **و** $u_3$**، والنهايات الممكنة لـ**$(u_n)$

• بالحساب نجد: $u_1 = 2$ ، $u_2 = \frac{7}{3} \approx 2.33$ ، $u_3 = \frac{12}{5} = 2.4$

• إذا تقاربت المتتالية ذات الحدود الموجبة $(u_n)$ نحو النهاية $\ell$، فإن هذه النهاية تحقق:

$\ell = 3 - \frac{2}{\ell+1}$،

أي: $\ell^2 - 2\ell - 1 = 0$ . وبالتالي إذا تقاربت $(u_n)$ فإن نهايتها ستكون هي:

$\ell = 1+\sqrt{2} \approx 2.41$ .

**3. أثبات باستخدام البرهان بالتراجع : من أجل كل** $n \in \mathbb{N}$ :

$$(*) \ldots 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1+\sqrt{2}$$

بما أن: $u_0 = 1$ و $u_1 = f(u_0) = 2$ ، فإن المتراجحات $(*)$ تتحقق من أجل $n = 0$ .

من أجل $n \geq 0$، نفرض أن $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1+\sqrt{2}$ .

بما أن $f$ متزايدة على $[0, +\infty[$، يكون $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1+\sqrt{2})$

أي $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1+\sqrt{2}$ ، ومنه : $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1+\sqrt{2}$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1+\sqrt{2}$

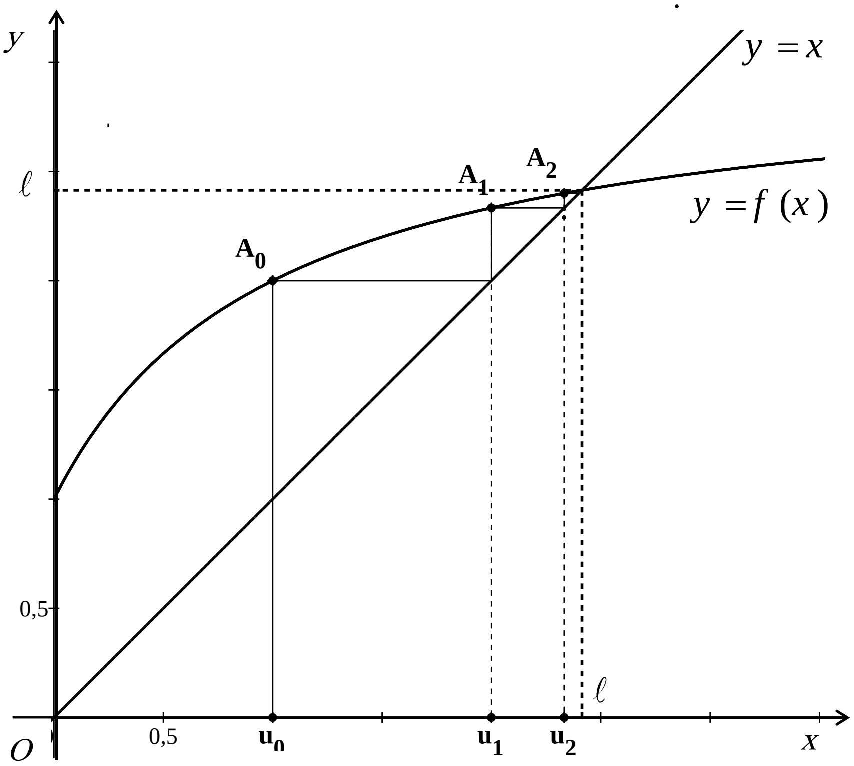
نستنتج بأن $(u_n)$ متزايدة ومحدودة من الأعلى، فهي متقاربة، وحسب **ب)** 1. فإن هذه النهاية ما هي إلا $\ell = 1+\sqrt{2} \approx 1.41$ . (الشكل 3)

**جـ) 1. نثبت، من أجل كل** $n \in \mathbb{N}$ **، أن المتتالية** $(v_n)$ **متناقصة**

نثبت بالتراجع أن: $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} \leq v_n \ \ldots (**)$

$(v_n)$ ذات حدود موجبة. لدينا $v_0 = 3$ و $v_1 = f(u_0) = 2.5$ ، ومنه المتراجحة $(**)$ متحققة من أجل $n = 0$ . ومن أجل $n \geq 0$، نفرض أن $v_{n+1} \leq v_n$، بما أن الدالة $f$ متزايدة على $[0, +\infty[$، يكون لدينا أيضا $f(v_{n+1}) \leq f(v_n)$ ، أي $v_{n+2} \leq v_{n+1}$

وحسب مبدأ التراجع نحصل على : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} \leq v_n$




شكل 3

2. نثبت أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ أن $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \leq 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$ .

ليكن $n$ عدد طبيعي.

لدينا : $$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{v_n + 1} - \frac{3u_n + 1}{u_n + 1} = \frac{2}{(u_n + 1)(v_n + 1)}(v_n - u_n)$$

وبما أن الجداء $(u_n + 1)(v_n + 1)$ موجب تماما، فإن إشارة $v_{n+1} - u_{n+1}$ هي من نفس إشارة $v_n - u_n$، التي هي من إشارة $v_0 - u_0 = 3 - 1 = 2$ (الموجبة تماما). ومن جهة أخرى، ولكون $1 \leq u_n$ و $3 \leq v_n$، فإن $2 \leq u_n + 1$ و $4 \leq v_n + 1$ ، ينتج من ذلك أن $8 \leq (u_n + 1)(v_n + 1)$ . وبالتالي $\frac{1}{(u_n + 1)(v_n + 1)} \leq \frac{1}{8}$ .

وبالتالي يكون $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$$

لنستخدم الآن البرهان بالتراجع لإثبات الخاصية $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \leq 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

لدينا $v_0 - u_0 = 2$ و $2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 2$ ومنه $v_0 - u_0 \leq 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0$. ومنه المتراجحة متحققة.

ومن أجل $0\le n$، وبفرض $v_n - u_n \le 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، يكون لدينا :

$$v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{4}\left(v_n-u_n\right)\le\frac{1}{4}\cdot2\left(\frac{1}{4}\right)^n=2\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

وأخير نحصل على $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n-u_n\le2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$

إذن، من أجل كل عدد طبيعي $n$، يكون لدينا $0\le v_n-u_n\le2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$

بأخذ نهاية أطراف هذه المتراجحة عندما $n\to+\infty$، نجد $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n-v_n)=0$ . وهذا يدل على أن المتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$ متجاورتان. لهما نفس النهاية، أي $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\ell=1+\sqrt{2}$ .

**تمرين رقم 8**

> **أدرس المتتالية:**
>
> $$\begin{cases}u_0=0\\ u_{n+1}=\dfrac{1}{1+u_n}\quad,\quad\forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$$

**الحل**

كل حدود $u_n$ موجبة وتنتمي إلى المجال $[0,1]$:

لننظر في تغيرات الدالة المستمرة $f$ على المجال $[0,1]$:

$$\forall x\in[0,1],\quad f'(x)<0$$

و $f$ متناقصة على المجال $[0,1]$.

حسب النظرية فإن المتتاليتين المستخرجتين $\left(u_{2n}\right)$ و $\left(u_{2n+1}\right)$ رتيبتان وفي اتجاه معاكس:

نلاحظ بأن $u_0=0$ ، $u_1=1$، $u_2=\frac{1}{2}$، ومنه $\left(u_{2n}\right)$ متزايدة و $\left(u_{2n+1}\right)$ متناقصة.

ولكون $(u_n)$ متقاربة ولتكن $\ell$ نهايتها، فإن $\left(u_{2n}\right)$ و $\left(u_{2n+1}\right)$ متقاربتان أيضا نحو نفس النهاية $\ell$: $\ell=(f\circ f)(\ell)$ (لأن $u_{2(n+1)}=(f\circ f)\left(u_{2n}\right)$ و $f\circ f$ مستمرة).

لدينا إذن $\ell=\frac{1+\ell}{2-\ell}$ التي تعطي القيمة $\ell=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx1.618$ .

## تمرين رقم 9

لتكن $(u_n)$ و $(v_n)$ و $(w_n)$ ثلاثة متتاليات معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(u_n + 2v_n\right) \end{cases} \text{ ، } \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}\left(u_n + 3v_n\right) \end{cases} \text{ ، } w_n = u_n - v_n$$

1. بين أن $(w_n)$ متتالية هندسية، يطلب تحديد أساسها وحدها الأول. ثم أحسب $\lim_{n\to\infty} w_n$ .
2. بين أن $(u_n)$ و $(v_n)$ متجاورتان، ولهما نفس النهاية $\ell$ (لا يطلب حساب $\ell$ في هذا السؤال).
3. نعتبر المتتالية $(C_n)$ المعرفة بالشكل : $\forall n \in \mathbb{N},\ C_n = 3u_n + 8v_n$

أثبت أن $(C_n)$ متتالية ثابتة، واستنتج النهاية $\ell$.

**الحل:**

1. **نبين أن $(w_n)$ هندسية**

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{3}\left(u_n + 2v_n\right) - \frac{1}{4}\left(u_n + 3v_n\right)$$
$$= \frac{1}{12}u_n - \frac{1}{12}v_n = \frac{1}{12}\left(u_n - v_n\right) = \frac{1}{12}w_n$$

ومنه $(w_n)$ هي متتالية هندسة أساسها $\frac{1}{12}$، وحدها الأول $w_0 = u_0 - v_0 = 2 - 1 = 1$،
حدها العام هو $w_n = \frac{1}{12^n}$ ولدينا النهاية $\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{12^n} = 0$

2. **بين أن $(u_n)$ و $(v_n)$ متجاورتان**

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}\left(u_n + 2v_n\right) - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n = -\frac{2}{3}\left(u_n - v_n\right) = -\frac{2}{3}w_n < 0$$
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4}\left(u_n + 3v_n\right) - v_n = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{4}v_n = \frac{1}{4}\left(u_n - v_n\right) = \frac{1}{4}w_n > 0$$

ولدينا أيضا $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq v_n \quad \Rightarrow \quad v_n \leq v_{n+1} \leq u_{n+1} \leq u_n$

إذن $(u_n)$ و $(v_n)$ متجاورتان، فسيكون لهما نفس النهاية $\ell$.

3. **نبين أن المتتالية $(c_n)$ ثابتة**

$$c_{n+1} - c_n = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} - 3u_n - 8v_n$$
$$= 3(u_{n+1} - u_n) + 8(v_{n+1} - v_n) = 3(-\tfrac{2}{3})w_n + 8(\tfrac{1}{4})w_n = 0$$

ومنه $(c_n)$ ثاب:
$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = c_0$$
$$= 3u_0 + 8v_0 = 3(2) + 8(1) = 14$$

وبما أن $(u_n)$ و $(v_n)$ لهما نفس النهاية $\ell$: $\lim c_n = 3\lim u_n + 8\lim v_n = 3\ell + 8\ell$

أي $14 = 11\ell$ ومنه $\ell = \frac{14}{11}$

# المراجع:


- K. Abdelkarim, *Exercices résolus d'analyse* (*avec rappel de cours*), Alger, OPU, 1993.
- E. Azoulay, *Mathématiques*: *cours et exercices*, tome 1, Paris, Mc Graw-Hill, 1983.
- S. Benachour, *Exercices d'analyse avec solutions*, tome 1, Alger, Khawarysm, 1991.
- J.-J. Colin, *Fonctions usuelles*: *exercices corrigés avec rappels de cours*, Paris, Cépaduès, 2007.
- Y. Dodge, *Mathématiques de base pour économistes*, Paris, Springer, 2002.
- G. Patrik, *Mathématiques pour l'économie*: *méthodes et exercices corrigés*, Belgique : de boeck, 2005.
- F. Pham, *Fonctions d'une ou deux variables*: des fonctions variables, Paris, Dunod, 2003.