

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET
POPULAIRE**
**Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche
Scientifique**

UNIVERSITÉ Djilali Bounaama-Khemis Miliana
FACULTÉ des Sciences de la technologie
Département De Mathématiques et D'Informatique



Dr F. Chita

L3 Mathématiques
ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE
Chapitre 03

Année Universitaire : 2023/2024.

Table des matières

1	Équation du 1^{ère} ordre	3
2	Équations d'ordre supérieur système d'ordre 1^{ère}	4
3	Système linéaire	5
I	L'existence d'un problème de Cauchy	7
II	Le système homogène et non homogène	7
III	Système linéaire à coefficients constants	7
1	Méthode de l'exponentielle de Matrice	7
IV	Systèmes homogènes	14
V	Système non homogène	16
VI	La résolution du système homogène (H)	23
1	Le système fondamental de (H)	24
2	La matrice fondamentale de (H)	26
3	Le Wronskien d'un système de solution de (H)	27
VII	La résolution et le système non homogène	28
VIII	Systèmes linéaires à coefficients constantes	29

Équation du 1^{ère} ordre

Équations d'ordre supérieur système d'ordre 1^{ère}

Systeme linéaire

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, pour tout $i, j = 1, \bar{n}$, a_{ij} et b_i des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

considérons le système de n équations différentielles linéaires suivant :

[illegible]

Les inconnues $y_1, y_2, \dots, y_n$ sont des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Lemme 3.1 *Le système (S) est équivalent au système :*

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t), \quad \forall t \in I \quad (S')$$

Avec

$$\begin{array}{lll} y : I \rightarrow \mathbb{R}^n & B : I \rightarrow \mathbb{R}^n & \\ t \mapsto y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, & t \mapsto B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}, & A : I \rightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ & & t \mapsto A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}, \end{array}$$

Preuve : On a :

[illegible]

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) = t^2 y_1(t) - y_2(t) + 1 \\ y_2'(t) = \cos t y_1(t) - e^t y_2(t) \end{cases}, t \in I = \mathbb{R}.$$

S'écrit sous la forme :

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t), \text{ pour tout } t \in I = \mathbb{R}, \text{ avec}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, A(t) = \begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ \cos t & -e^t \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lemme 3.2 Toutes équation d'ordre deux s'écrit sous la forme :

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t).$$

Preuve :

On considère l'équation d'ordre deux s'écrit sous la forme :

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

on pose $\begin{cases} y_1(t) = y(t) \\ y_2(t) = y'(t) \end{cases}$, on a pour tout $t \in I$

$$\begin{cases} y_1'(t) = y'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = y''(t) \end{cases} \begin{aligned} &= -a(t)y'(t) - b(t)y(t) + c(t) \\ &= -b(t)y_1(t) - a(t)y_2(t) + c(t). \end{aligned}$$

Ceci équivalent à $y'(t) = A(t)y(t) + B(t)$.

Pour tout $t \in I$, avec

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix} \text{ pour tout } t \in I.$$

Définition 3.1 Le système (S') est appelé système différentiel linéaire du première ordre à coefficients variables avec second nombre.

Remarque 3.1 Si $\forall t \in I, B(t) = 0$ alors le système

$$y'(t) = A(t)y(t) \quad (3.1)$$

est appelé système différentiel linéaire du première ordre à coefficients variables homogène (ou sans second nombre).

On dit que (3.1) est le système homogène associé à (S') .

Notation :

Pour simplifier, on écrit :

$$(S') = \begin{cases} y' = A(t)y \\ y' = A(t)y + B(t). \end{cases} \quad (3.1)$$

I L'existence d'un problème de Cauchy

Théorème 3.1 Si A et B sont continues sur l'intervalle I , alors pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ le système :

$$\begin{cases} y' = A(t)y + B(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une solution globale unique.

II Le système homogène et non homogène

Théorème 3.2 L'ensemble des solution de (3.1) noté S_H , est un espace vectoriel de dimension n .

Théorème 3.3 Soit y_p une solution de (E) , l'ensemble des solution de (E) noté S_H est donnée par :

$$S_E = S_H + S_p,$$

S_H : La solution de système homogène.

III Système linéaire à coefficients constants

1 Méthode de l'exponentielle de Matrice

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose :

$$\begin{cases} A^k = \underbrace{A \cdots A}_{k \text{ fois}}, & \text{si } k \in \mathbb{N}^* \\ A^0 = I_n \end{cases}$$

et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ C'est une matrice identité.

Considérons la série définie par :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \lim_{l \rightarrow +\infty} (I_n + \frac{A}{1!} + \cdots + \frac{A^l}{l!})$$

avec :

$$\begin{cases} k! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot k, & \text{si } k \in \mathbb{N}^* \\ 0! = 1 \end{cases}$$

Théorème 3.4 La série :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

est convergente.

Preuve : On a

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|A^k\|}{k!}$$

mais $\frac{A^k}{k!}$ représente le terme général d'une série numérique convergente alors :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

est normalement convergente. Donc elle est convergente.

Définition 3.2 L'exponentielle de la matrice A noté e^A est la quantité $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$
c-à-d :

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Exemple 2

SKILLS

Résolution le problème

Soit :

$$e \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1^2 = A_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ donc } A_1^n = A_2^n = 0, \quad \forall n \geq 2.$$

$$\begin{aligned} e^{A_1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_1^k}{k!} = \sum_{k=0}^1 \frac{A_1^k}{k!} = \frac{A_1^0}{0!} + \frac{A_1}{1!} = \frac{I_2}{0!} + \frac{A_1}{1!} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Théorème 3.5 Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

- 1 On a $e^{0_n} = I_n$, Ici 0_n représente la matrice nulle.
- 2 $e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B$ mais si A et B commutent c-à-d $AB = BA$, alors :

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B.$$

- 3 e^A est une matrice inversible et on a $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.
- 4 La fonction

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ t &\mapsto e^{tA} \end{aligned}$$

est dérivable et on a $(e^{tA})' = Ae^{tA}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

• On a :

$$e^{0_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(0_n)^k}{k!} = \frac{0_n^0}{0!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(0_n)^k}{k!} = I_n + 0_n = I_n.$$

•

$$(e^{tA})' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(tA)^k}{k!} \right)' = A \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} \cdot A^{k-1}}{(k-1)!}$$

Si on pose $p = k - 1$, on trouve :

$$(e^{tA})' = A \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p \cdot A^p}{(p)!} = A \cdot e^{tA}.$$

Remarque 3.2 Il existe des matrices : A et B tels que :

$$e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B.$$

Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ On a } A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après la définition de l'exponentielle, on a :

$$e^{A+B} = e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^A = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e^A \cdot e^B = \begin{pmatrix} e & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B$.

Lemme 3.3 Soient $A_1, \dots, A_n \in M_n(\mathbb{R})$. On a :

$$e \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

Preuve : On a

$$e \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}^k}{k!}$$

mais on peut montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Alors :

$$\begin{aligned} e \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{bmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}}{k!} = \lim_{l \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{k=l} \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1^k}{k!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{bmatrix} \\ &= \lim_{l \rightarrow +\infty} \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{k=l} \frac{\lambda_1^k}{k!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{k=l} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lim_{l \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{k=l} \frac{\lambda_1^k}{k!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lim_{l \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{k=l} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Exemple 3

SKILLS Résolution le problème

On a :

$$e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}$$

On a :

$$e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^4 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3} \end{pmatrix}$$

Théorème 3.6 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1 Soit p une matrice inversible, on a :

$$e^{p \cdot A \cdot p^{-1}} = p \cdot e^A \cdot p^{-1}.$$

2 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{\lambda I_n + A} = e^\lambda \cdot e^A.$$

Preuve :

1 On a

$$e^{p \cdot A \cdot p^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(p \cdot A \cdot p^{-1})^k}{k!}$$

 Par récurrence on peut montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $(p \cdot A \cdot p^{-1})^k = p \cdot A^k \cdot p^{-1}$ ceci implique que

$$\begin{aligned} e^{p \cdot A \cdot p^{-1}} &= \lim_{l \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{k=l} \frac{p \cdot A^k \cdot p^{-1}}{k!} = \lim_{l \rightarrow +\infty} \left[p \cdot \left(\sum_{k=0}^{k=l} \frac{A^k}{k!} \right) \cdot p^{-1} \right] \\ &= p \cdot \left[\lim_{l \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{k=l} \frac{A^k}{k!} \right] \cdot p^{-1} = p \cdot e^A \cdot p^{-1}. \end{aligned}$$

2 $e^{\lambda I_n + A} = e^\lambda \cdot e^A$

 puisque $(\lambda I_n)A = A(\lambda I_n)$, alors (λI_n) et A commutent donc $e^{\lambda I_n + A} = e^{\lambda I_n} \cdot e^A$ mais

$$e^{\lambda I_n} = e^{\lambda \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^\lambda \end{pmatrix} = e^\lambda \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = e^\lambda \cdot I_n.$$

$$\text{Ainsi } e^{\lambda I_n + A} = (e^\lambda I_n) e^A = e^\lambda (I_n e^A) = e^\lambda \cdot e^A.$$

Exemple 4

SKILLS

Résolution le problème

Calculons e^A tel que $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, on a

$$\det(A - \lambda I_2) = \left| \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - 1 = 0$$

implique $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$ sont les deux valeurs propres distinctes de A . Alors elle est matrice diagonalisable

$$A = p \cdot D \cdot p^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

et $p = (v_1, v_2)$ ici v_1 et v_2 sont les vecteurs propres de A associés respectivement à λ_1 et λ_2 . Les sous espaces propres :

$$E_{\lambda_1} = \{v_1 \in \mathbb{R}^2 / (A - \lambda_1 I)v_1 = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2} \right\}$$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \right\}$$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / y = -x \right\}$$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R} \right\}$$

On prend $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} E_{\lambda_2} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / (A - \lambda_2 I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / (A + I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

On prend $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc la matrice de passage $p = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Rappelons que si $ad - cb \neq 0$, alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$p^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{aligned} e^A &= e^{p \cdot D \cdot p^{-1}} = p \cdot e^D \cdot p^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-1} + e & e^{-1} - e \\ e^{-1} - e & e^{-1} + e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Définition 3.3 Soit $N \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que N est une matrice **nilpotente** d'indice $m \in \mathbb{N}^*$ si $N^{m-1} \neq 0_n$ et $N^m = 0_n$.

Exemple 5

SKILLS

Résolution le problème

La matrice

$N = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ est une matrice nilpotente d'indice $m = 3$. Car :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & 18 \end{pmatrix} \neq 0_3 \text{ et } N^3 = N^2 \cdot N = 0_3.$$

Remarque 3.3 Toute matrice, triangulaire supérieure dont les éléments de la diagonale sont nuls est nilpotente.

Par exemple, la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nilpotente car c'est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments de la diagonale sont nuls.

Théorème 3.7 Soit N une matrice nilpotente d'indice $m \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$e^N = I_n + \frac{N}{1!} + \cdots + \frac{N^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Preuve :

On a

$$e^N = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k}{k!} = I_n + \frac{N}{1!} + \frac{N^2}{2!} + \cdots + \frac{N^{m-1}}{(m-1)!} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{N^k}{k!}.$$

mais N est une matrice nilpotente d'indice m , alors pour tout $k \geq m$, $N^k = 0_n$. En effet, on a :

$$k \geq m \implies N^k = N^{(k-m)+m} = N^{k-m} \cdot N^m = N^{k-m} \cdot 0_n = 0_n.$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k}{k!} = 0_n.$$

Exemple 6

SKILLS

Résolution le problème

Soit la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nilpotente. Trouvons son indice m , on a :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2, \text{ alors } m = 2 \text{ donc}$$

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = I_n + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{1!} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

IV Systèmes homogènes

Soit le système :

$$y' = A(t)y.$$

Lemme 3.4 Si pour tout $t \in I$, on a :

$$R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}.$$

Preuve :

D'après la définition de la résolvante, on a :

$$R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t A(u)du} = e^{\int_{t_0}^t Adu} = e^{A \int_{t_0}^t du} = e^{(t-t_0)A}.$$

Exemple

7

SKILLS

Résolution le problème

La résolvante du système : $y' = Ay$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc :

$$\begin{aligned} R(t, t_0) &= e^{(t-t_0)A} \\ &= e^{(t-t_0)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} 2(t-t_0) & 0 \\ 0 & (t-t_0) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{2(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{(t-t_0)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lemme 3.5 La solution du système $y' = Ay$ est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R} : y(t) = e^{tA}c \text{ avec } c \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Preuve :

Puisque $I = \mathbb{R}$, alors $0 \in I$. Donc d'après la solution précédente, la solution du système homogène est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R} : y(t) = R(t, 0)c \text{ avec } c \in \mathbb{R}^n.$$

Mais d'après le lemme précédent, on a :

$$R(t, 0) = e^{(t-0)A} = e^{tA}.$$

Exemple 8

SKILLS Résolution le problème

La solution du système $y' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} y$ est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R} : y(t) = e^{tA} c \text{ avec } c \in \mathbb{R}^2.$$

On a : $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ c-à-d $y(t) = e^{tA} c$, mais

$$e^{t \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} 4t & 3t \\ 0 & 4t \end{pmatrix}} = e^{4t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = e^{4tI_2 + \begin{pmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

On peut montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est matrice nilpotente d'indice $m = 2$, alors :

$$e^{tA} = e^{4t} \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = e^{4t} \left[I_2 + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{1!} \right] = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 & 3t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4t} & 3te^{4t} \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\forall t \in \mathbb{R} : y(t) = \begin{pmatrix} e^{4t} & 3te^{4t} \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{4t} + c_2 3te^{4t} \\ 0 + c_2 e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Lemme 3.6 La solution du système suivant :

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \text{ est donnée par : } \forall t \in \mathbb{R} : y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0.$$

Exemple 9

SKILLS Résolution le problème

La solution du système :

$$\begin{cases} y' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} y \\ y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \text{ est donnée par : } \forall t \in \mathbb{R} : y(t) = e^{(t-1)A} y_0.$$

Avec $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $t_0 = 1$ et $y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ c-à-d :

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{(t-1) \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} = e^{4(t-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3(t-1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = e^{4(t-1)} \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 & 3(t-1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \\ &= e^{4(t-1)} \left(I_2 + \begin{pmatrix} 0 & 3(t-1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= e^{4(t-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3(t-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ y(t) &= \begin{pmatrix} e^{4(t-1)} & 3(t-1)e^{4(t-1)} \\ 0 & e^{4(t-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4(t-1)} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

V Système non homogène

Théorème 3.8 La solution du système :

$$\begin{cases} y' = A(t)y + B(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R} : y(t) = e^{(t-t_0)A}y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-u)A}B(u)du.$$

Exemple 10

SKILLS

Résolution le problème

Calculons e^A tel que $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

On calculons le polynôme caractéristique $P(\lambda)$:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & -1 \\ -1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

$$P(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 - 1 = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

sont les deux valeurs propres distinctes de A . Alors A est une matrice **diagonalisable**.

Donc, on peut l'écrire sous forme $A = p \cdot D \cdot p^{-1}$ tels que :

• D : Soit diagonale et les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A tel que :

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

• p : Soit inversible et les colonnes de p sont les vecteurs propres de A tel que :

$$p = [v_1 \quad v_2],$$

v_1, v_2 Sont les vecteurs propres de A associés respectivement à λ_1, λ_2 .

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Les sous espaces propres :

$$\begin{aligned}
 E_{\lambda_1} &= \left\{ v_1 \in \mathbb{R}^2; (A - \lambda_1 I_2) v_1 = 0 \right\} \\
 &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2; \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2; \begin{cases} -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2; y = -x \right\} \\
 &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R} \right\},
 \end{aligned}$$

on prend $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 E_{\lambda_2} &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2; (A - \lambda_2 I_2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \right\} \\
 &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2; (A + I_2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \right\}; \quad A + I = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2; \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \implies x = y \right\}
 \end{aligned}$$

On prend $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, alors la matrice de passage est :

$$p = [v_1 \ v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ tel que } \det(p) = 2.$$

Rappelons que soit $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ si $\det(p) = (ad - cb \neq 0)$ tel que $p \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, alors :

$$\begin{aligned}
 p^{-1} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(p)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\
 p^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 e^A &= e^{p \cdot D \cdot p^{-1}} = p \cdot e^D \cdot p^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 e^A &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e + e^{-1} & -e + e^{-1} \\ -e^1 - e^{-1} & e + e^{-1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Définition 3.4 Soit $N \in M_n(\mathbb{R})$, on dit que N est une matrice **nilpotente** d'indice $m \in \mathbb{N}^*$, Si :

$$N^{m-1} \neq 0_n \text{ et } N^m = 0_n.$$

Exemple 11

SKILLS

Résolution le problème

La matrice $N = \begin{bmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ est une matrice nilpotente d'indice $m = 3$.

Exemple 12

SKILLS

Résolution le problème

En utilisant la méthode de l'exponentielle de matrice sur le système homogène, résoudre le système :

$$y' = Ay + B \text{ avec } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

• **Solution :**

La solution générale du système :

$$y' = Ay + B \text{ est } y = y_H + y_p$$

avec :

y_H : est la solution générale du système homogène associé $y' = Ay$.

y_p : est la solution particulière du système considéré.

Calculons y_H : En utilisant la méthode d'exponentielle de matrice, on a :

$\forall t \in \mathbb{R}, y_H(t) = e^{tA}c$ avec $c \in \mathbb{R}^2$, mais

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{t \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = e^{t \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right]} \\ &= e^{tI_2 + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = e^{tI_2} \cdot e^{\begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}. \end{aligned}$$

La matrice $\begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est composée par des zéros alors elle est une matrice nilpotente, un simple calcul montre que :

$$\begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = 0_2. \text{ Donc :}$$

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = I_2 + \frac{\begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}{1!} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Alors :}$$

$$e^{tA} = e^t \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}, \text{ ainsi :}$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y_H(t) = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Calculons y_p :

On utilise la méthode de la variation de la constante, il existe une solution particulière sous la forme :

$$y_p(t) = e^{tA}c(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Avec } c'(t) = e^{-tA} \cdot B(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} : \quad c'(t) = e^{-tA}B(t).$$

Calculons e^{-tA} , puisque

$$\begin{aligned} -tA = -t \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &\Rightarrow e^{-tA} = e^{-t \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right]} \\ &= e^{-t \left[I_2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right]} \\ &= e^{-tI_2 + \begin{bmatrix} 0 & -t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \\ &= e^{-t} \cdot e^{\begin{bmatrix} 0 & -t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \\ &= e^{-t} \left[I_2 + \begin{bmatrix} 0 & -t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right] \\ e^{-(t)A} &= e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & -te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$c'(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & -te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

ceci implique que :

$$c(t) = \int c'(t)dt = \begin{bmatrix} \int e^{-t}dt \\ \int 0dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Donc : } c(t) = \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

implique que :

$$\begin{aligned} y_p(t) &= e^{tA} \cdot c(t) = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} \\ y_p(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}; \quad y(t) = y_H(t) + y_p(t) = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix} c + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Théorème 3.9 Si la matrice A admet n vecteurs propres linéairement indépendants $v_1, v_2, \dots, v_n$ associés aux valeurs propres réelles $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Alors la solution générale de (H) est donnée par :

$$y(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n v_n e^{\lambda_n t}, \quad \text{avec } v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}.$$

Exemple 13

SKILLS

Résolution le problème

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} y$$

Calculons y_H , on a :

$\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$ sont les deux valeurs propres distinctes de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont les vecteurs propres de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ associé respectivement à λ_1, λ_2 .

$$y_H(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Calculons y_p :

On utilise la méthode variation de la constante, il existe une solution particulière sous la forme :

$$y_H(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + \dots, \text{ avec } \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}' = \left(v_1 e^{\lambda_1 t} \quad v_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, v_n e^{\lambda_n t} \right)^{-1} \cdot B(t).$$

Rappelons que si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^{-1} \end{bmatrix}$$

Exemple 14

SKILLS

Résolution le problème

Résoudre le système : $y' = Ay + B$ tel que :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La solution générale du système : $y' = Ay + B$ est :

$y = y_H + y_p$, avec y_H est la solution générale du système homogène associé $y' = Ay$.
 y_p est la solution particulière du système considéré.

Calculons y_H :

On a : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 4$ sont les trois valeurs propres distinctes de A .

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ Sont les vecteurs propres de A associés respectivement à λ_1, λ_2 et λ_3 . Donc :

$$\begin{aligned} y_H(t) &= c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 v_3 e^{\lambda_3 t} \\ &= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} e^{4t} = \begin{bmatrix} c_1 e^t \\ 2c_2 e^{2t} \\ 4c_3 e^{4t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Calculons y_p :

On utilise la méthode de variation de la constantes, il existe une solution particulière sous la forme :

$$\begin{aligned} y_p(t) &= c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 v_3 e^{\lambda_3 t}, \text{ avec } \begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 e^{\lambda_1 t} & v_2 e^{\lambda_2 t} & v_3 e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}^{-1} \cdot B(t), \text{ pour} \\ \text{tout } t \in \mathbb{R}. \text{ Alors : } \begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 2e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 4e^{4t} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Rappelons que si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^{-1} \end{bmatrix}, \text{ ainsi :} \\ \begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}e^{-4t} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}e^{-2t} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ceci implique que $c'_1 = c'_3 = 0$ et $c'_2 = \frac{1}{2}e^{-2t}$.

Ainsi, on prend

$$c_1 = c_3 = 0 \text{ et } c_2 = \frac{-1}{4}e^{-2t}, \text{ ceci implique que :}$$

$$y_H(t) = \frac{1}{4}e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ainsi : } y(t) = y_H(t) + y_p(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^t \\ 2c_2 e^{2t} \\ 4c_3 e^{4t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^t \\ 2c_2 e^{2t} - \frac{1}{2} \\ 4c_3 e^{4t} \end{bmatrix}.$$

- Résoudre de

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (P_1)$$

La solution de (P_1) est donnée par :

$$y(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot y_0, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

- Résoudre de

$$\begin{cases} y' = Ay + B(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (P_2)$$

La solution de (P_2) est donnée par :

$$y(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-u)A} B(u) du, \quad \forall t \in I.$$

Exemple 15

SKILLS

Résolution le problème 01

La solution du système :

$$\begin{cases} y' = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} y \\ y(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}; y(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot y_0, \text{ avec } A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad t_0 = 1 \text{ et } y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{c-à-d}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4I_2 + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (t-1) \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4(t-1)I_2 + \begin{bmatrix} 0 & 3(t-1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$e^{A(t-t_0)} = e^A \cdot I_n \cdot e^A = e^A \cdot e^A, \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{(t-1) \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}} \\ &= e^{(t-1) \left[4I_2 + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right]} \\ &= e^{4(t-1)} \cdot e^{(t-1) \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \\ &= e^{4(t-1)} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3(t-1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

On a :

$$y' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solution générale est donnée par : $y = y_H + y_p$.

• **Calculons y_H :**

En utilisant la méthode de l'exponentielle de matrice, on trouve $\forall t \in \mathbb{R}; y_H(t) = e^{tA} \cdot c$ avec $c \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$e^{tA} = e^{t \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}} = e^{2t + I_2 + \begin{bmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = e^{2t} \cdot e^{\begin{bmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}.$$

La matrice $\begin{bmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est composée par des zéros alors elle est nilpotente.

$$e^{tA} = e^{2t} \left(I_2 + \begin{bmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 3t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 3te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Ainsi } \forall t \in \mathbb{R}; y_H(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 3te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} c \text{ avec } c \in \mathbb{R}^2.$$

• **Calculons y_p :**

On utilise la méthode variation de la constante $y_p = e^{tA} \cdot c$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Avec $c'(t) = e^{-tA} \cdot B(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Calculons

$$e^{-tA} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & -3te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Ainsi

$$c'(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & -3te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c'(t) = \begin{bmatrix} \int e^{-2t} dt \\ \int 0 dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2t} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y_p(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

VI La résolution du système homogène (H)

Lemme 3.7 Soient $t, t_0 \in I$, considérons la fonction f_{t,t_0} définie de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$ par :

$$f_{t,t_0}(y_0) = y(t, t_0, y_0).$$

L'application f_{t,t_0} est linéaire.

Définition 3.5 La matrice associée à f_{t,t_0} est appelée la matrice résolution de (H). On la note par :

$$R(t, t_0).$$

Théorème 3.10 On a

- 1 $\forall t, t_0 \in I; \quad R(t, t_0) \in M_n(\mathbb{R}).$
- 2 $\forall t, t_0 \in I; \quad R(t, t_0)y_0 = y(t, t_0, y_0).$
- 3 $\forall t_0 \in I; \quad R(t_0, t_0) = I_n.$ Ici I_n représente la matrice identité.
- 4 $\forall t, s, r \in I; \quad R(t, s)R(s, r) = R(t, r).$
- 5 $\forall t, s \in I; \quad R(t, s)$ est inversible et on a :

$$(R(t, s))^{-1} = R(s, t).$$

- 6 $\forall t, t_0 \in I; \quad \frac{d}{dt}R(t, t_0) = A(t) \cdot R(t, t_0).$
- 7 $\forall t, t_0 \in I; \quad \frac{d}{dt}R(t, t_0) = -R(t_0, t)A(t).$

1 Le système fondamental de (H)

Soient $y_1, y_2, \dots, y_n \in F(I, \mathbb{R}^n).$

Définition 3.6 On dit que $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ est un système fondamental de (H), si :

1 $y_1, y_2, \dots, y_n$ sont des solution de (H).

2 $y_1, y_2, \dots, y_n$ sont linéairement indépendants, c'est à dire :

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}; \quad (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n) = 0 \\ \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Exemple 16

SKILLS

Résolution le problème

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$y_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}, y_2(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ t \end{bmatrix} \text{ et } A(t) = \frac{1}{1+t^2} \begin{bmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{bmatrix}.$$

(1) Montrons que y_1 et y_2 sont deux solutions de $y' = A(t)y$, on a :

$$y_1'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ et } \\ A(t)y_1(t) = \frac{1}{1+t^2} \begin{bmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1+t^2} y_1(t) = \begin{bmatrix} t^2 + 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alors :

$$y_1'(t) = A(t)y_1(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Ce qui implique que y_1 est une solution de (H).

On montre que y_2 est aussi une solution de (H).

(2) Montrons que y_1 et y_2 sont linéairement indépendants :

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$, on a :

$$\begin{aligned}\alpha y_1 + \beta y_2 = 0 &\implies \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ &\implies \alpha \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ t \end{bmatrix} = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ &\implies \begin{bmatrix} \alpha t - \beta \\ \alpha + \beta t \end{bmatrix} = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \implies \begin{cases} \alpha t - \beta = 0 \\ \alpha + \beta t = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Représentes une infinité d'équations de deux inconnues α et β .

On soit que pour trouver les inconnues α et β il nous suffit deux équations non équivalentes.

Pour cela, on prend les deux équations donnée par la valeur $t = 0$, on obtient $\alpha = \beta = 0$. Par conséquent y_1 et y_2 sont linéairement indépendants.

Théorème 3.11 Soient $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ un système fondamental de (H), on a :

$$\begin{aligned}S_H &= [\{y_1, y_2, \dots, y_n\}] \\ &= \{y \in F(I, \mathbb{R}^n); \quad y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n, \quad \text{avec} \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

• **Preuve :**

$\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ est un système fondamental de (H), alors $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ un système linéairement indépendant.

Car :

$\{y_1, y_2, \dots, y_n\} = n = \dim S_H$, alors $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ est une base de S_H .

Exemple 17

SKILLS

Résolution le problème

Pour tout $\forall t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$y_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y_2(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ t \end{bmatrix} \text{ et } A(t) = \frac{1}{1+t^2} \begin{bmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{bmatrix}, \text{ puisque } \{y_1, y_2\} \text{ est un système fondamental de } y' = A(t)y. \text{ Alors :}$$

$$\begin{aligned}S_H = [\{y_1, y_2\}] &= \{y \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2); \quad y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \quad \text{avec} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2); \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}; y = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t), \quad \text{avec} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2); \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}; y = \begin{bmatrix} \alpha_1 t - \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 t \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Remarque 3.4 La solution générale de (H) est donnée par :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \quad \text{avec} \quad c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

2 La matrice fondamentale de (H)

Définition 3.7 La matrice dont ces colonnes représente un système fondamental de (H) s'appelle la matrice fondamentale de (H). En d'autre terme, on dit que M est une matrice fondamentale si :

$M = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ avec $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ est un système fondamental de (H).

Exemple 18

SKILLS

Résolution le problème

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$y_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y_2(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ t \end{bmatrix} \text{ et } A(t) = \frac{1}{1+t^2} \begin{bmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{bmatrix}, \text{ puisque } \{y_1, y_2\} \text{ est un système fondamental de } y' = A(t)y \text{ } t \in \mathbb{R}.$$

On pose que

$$M(t) = (y_1(t), y_2(t)) = \begin{bmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{bmatrix}.$$

Alors M est une matrice fondamentale du $y' = A(t)y$.

Théorème 3.12 Soit M une matrice fondamentale du système (H). Alors :

1 Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$M'(t) = A(t)M(t).$$

2 La solution générale de (H) est donnée par :

$$y = Mc, \text{ avec } c \in \mathbb{R}^n.$$

• **Preuve :**

M est une matrice fondamentale du système (H), alors :

$$M = (y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ avec } \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \text{ est un système fondamental de (H).}$$

1 On a :

$$\begin{aligned} M'(t) &= (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))' \\ &= (y_1'(t), y_2'(t), \dots, y_n'(t)) \\ &= (A(t)y_1(t), A(t)y_2(t), \dots, A(t)y_n(t)) \\ &= A(t)(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \\ &= A(t)M(t). \end{aligned}$$

2 On a :

$$\begin{aligned}
 y(t) &= c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t) \\
 &= (y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \\
 &= (y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)) c, \quad \text{avec } c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.
 \end{aligned}$$

3 Le Wronskien d'un système de solution de (H)

Soient $y_1, y_2, \cdots, y_n \in S_H$ (l'ensemble des solutions de (H)).

Définition 3.8 Le Wronskien de $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ noté W est le déterminant de la matrice dont les colonnes sont $y_1, y_2, \cdots, y_n$

$$\forall t \in I; \quad W(t) := \det[y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)].$$

Théorème 3.13 Soient $y_1, y_2, \cdots, y_n \in S_H$. les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1 $\forall t \in I; \quad W(t) \neq 0.$
- 2 $\forall t_0 \in I; \quad W(t_0) \neq 0.$
- 3 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ sont linéairement indépendants.

• Preuve :

1 (1) $\implies$ (2) Evident car :

$$\forall t; \quad P(t) \implies \exists t_0; \quad P(t_0).$$

2 (1) $\implies$ (3) :
 $W(t_0) \neq 0$ implique que $(y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t))$ sont linéairement indépendants.

3 (3) $\implies$ (1) puisque $y_1, y_2, \cdots, y_n$ sont des solutions de (H) et qui sont linéairement indépendants alors on trouve que $y_1, y_2, \cdots, y_n$ sont L.I pour tout $t \in I$, ceci implique que $W(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

VII La résolution et le système non homogène

Théorème 3.14 Soient $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. La solution du système (E) est donnée par :

$$\forall t \in I; \quad y(t) = R(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t R(t, u)B(u)du.$$

• **Preuve :**

Considérons la fonction définie sur I par :

$$Z(u) = R(t_0, u)y(u).$$

Soit $u \in I$, on a :

$$\begin{aligned} Z'(u) &= \frac{d}{du} [R(t_0, u)y(u)] \\ &= \frac{d}{du} (R(t_0, u)) \cdot y(u) + R(t_0, u)y'(u) \\ &= -R(t_0, u)A(u) \cdot y(u) + R(t_0, u)(A(u)y(u) + B(u)) \\ &= R(t_0, u)B(u). \end{aligned}$$

C'est à dire : $\forall u \in I; \quad Z'(u) = R(t_0, u)B(u)$, ce qui implique que :

$$\forall t \in I; \quad Z(t) = Z(t_0) + \int_{t_0}^t R(t_0, u)B(u)du$$

Ainsi

$$\forall t \in I; \quad R(t_0, t)y(t) = R(t_0, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t R(t_0, u)B(u)du$$

Alors

$$\begin{aligned} \forall t \in I; \quad y(t) &= R(t, t_0)I_n y(t_0) + \int_{t_0}^t R(t, t_0)R(t_0, u)B(u)du \\ y(t) &= R(t, t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^t R(t, u)B(u)du. \end{aligned}$$

D'où le résultats.

Théorème 3.15 Soient $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. La solution du système (H) est donnée par :

$$\forall t \in I; \quad y(t) = R(t, t_0)y_0.$$

• **Preuve :**

Il suffit d'appliquer le théorème précédent sur $B = 0$.

VIII Systèmes linéaires à coefficients constantes