Chapitre 4

Produit d'espaces mesurés

4.1 Produit d'espaces mesurables

Définition 4.1.1 *(Tribu produit)*

Soient $(X, \mathcal{M})$ et $(Y, \mathcal{N})$ deux espaces mesurables. Un sous ensemble de $X \times Y$ de la forme $A \times B$ avec $A \in \mathcal{M}$ et $B \in \mathcal{N}$ sera appelé un rectangle mesurable.

On désignera par $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ la tribu sur $X \times Y$ engendrée par les rectangles mesurables, c'est-à-dire.

$$\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \sigma(\mathcal{M} \times \mathcal{N}) = \sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{M},\ B \in \mathcal{N}\})$$

Proposition 4.1.2 *La tribu $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ est la plus petite tribu sur $X \times Y$ qui rende mesurable les deux projections canoniques*

$$\pi_1 : (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \longrightarrow (X, \mathcal{M}),\ \pi_1(x, y) = x$$
$$\pi_2 : (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \longrightarrow (Y, \mathcal{N}),\ \pi_2(x, y) = y$$

Démonstration. π_1 et π_2 sont mesurable car pour tout $A \in \mathcal{M}$ et $B \in \mathcal{N}$ on a

$$\pi_1^{-1}(A) = \{(x, y) \in X \times Y : x \in A\} = A \times Y \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$$

et aussi $\pi_2^{-1}(B) = X \times B \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.

Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur $X \times Y$ qui rende

$$\pi_1 : (X \times Y, \mathcal{A}) \longrightarrow (X, \mathcal{M}),\ \pi_1(x, y) = x$$
$$\pi_2 : (X \times Y, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{N}),\ \pi_2(x, y) = y$$

mesurables. Pour tout $A \in \mathcal{M}$ et $B \in \mathcal{N}$,

$$A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) = \pi_1^{-1}(A) \cap \pi_2^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

ce qui signifier que $\mathcal{M} \times \mathcal{N} \subset \mathcal{A}$ donc $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subset \mathcal{A}$. ■

Exercice corrigé 4.1.3 *On veux montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$*

1) Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est réunion dénombrable de produits d'intervalles ouverts *de $\mathbb{R}$. En déduire que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

2) Soient A un ouvert de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_1 = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Montrer que $\mathcal{M}_1$ est une tribu sur $\mathbb{R}$ contenant les ouverts de $\mathbb{R}$. En déduire que $\mathcal{M}_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

3) Soient B un ouvert de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_2 = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Montrer que $\mathcal{M}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

4) Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (et donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$).

Démonstration. 1) Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x_1, x_2) \in O$, il existe $r > 0$ tel que

$$]x_1 - r, x_1 + r[\times]x_2 - r, x_2 + r[\subset O$$

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on peut trouver $y_1 \in \mathbb{Q}\cap]x_1 - r, x_1[$, $z_1 \in \mathbb{Q}\cap]x_1, x_1 + r[$, $y_2 \in \mathbb{Q}\cap]x_2 - r, x_2[$ et $z_2 \in \mathbb{Q}\cap]x_2, x_2 + r[$. On a donc $(x_1, x_2) \in]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[\subset O$. On note alors

$$I = \{(y_1, z_1, y_2, z_2) \in \mathbb{Q}^4 :]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[\subset O\}$$

Pour tout $(x_1, x_2) \in O$, il existe donc (y_1, z_1, y_2, z_2) tel que $(x_1, x_2) \in]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[$. On en déduit que

$$O = \bigcup_{(y_1,z_1,y_2,z_2)\in I}]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[$$

Comme I est dénombrable (car $\mathbb{Q}^4$est dénombrable), on en déduit que $O \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a ainsi montré que la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ contenant tous les ouverts de $\mathbb{R}^2$, et donc contenant la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^2$ (c'est- à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$). Donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2) $\phi \in \mathcal{M}_1$ car $\phi = A \times \phi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

On montre que $\mathcal{M}_1$ est stable par passage au complémentaire. Soit $B \in \mathcal{M}_1$, on a donc $B^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \times B^c = A \times (\mathbb{R}\backslash B) = (A \times \mathbb{R})\backslash(A \times B)$. L'ensemble $A \times \mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, car A et $\mathbb{R}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$, on a donc $A \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. D'autre part, puisque $B \in \mathcal{M}_1$ on a $(A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Donc, $A \times B^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Ce qui prouve que $B^c \in \mathcal{M}_1$.

La famille $\mathcal{M}_1$ est stable par union dénombrable. En effet, si $(B_n)_n$ une suite dans $\mathcal{M}_1$

on a $A \times \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A \times B_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ car $A \times B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $n \geq 1$. On a donc montré que $\mathcal{M}_1$ est une tribu.

Soit θ un ouvert de $\mathbb{R}$, donc $\theta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme $A \times \theta$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on a $A \times \theta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Ce qui donne $\theta \in \mathcal{M}_1$.

$\mathcal{M}_1$ est une tribu contenant les ouverts de $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_1$. En fin, $\mathcal{M}_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

3) On utilise la même méthode que pour la question précédente pour montrer que $\mathcal{M}_2$ est une tribu sur $\mathbb{R}$ contenant les ouverts de $\mathbb{R}$ et par conséquent on a $\mathcal{M}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

4) Les deux questions précédentes affirment que si $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ alors $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. On a donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. On en déduit

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\left(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})\right) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

Et donc, (avec la question 1) on a finalement $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. ■

Proposition 4.1.4 *Soient $(X, \mathcal{M})$, $(Y_1, \mathcal{N}_1)$ et $(Y_2, \mathcal{N}_2)$ trois espaces mesurables et soit l'application*

$$f = (f_1, f_2) : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (Y_1 \times Y_2, \mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2).$$

Alors f est mesurable si et seulement si $f_1, : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (Y_1, \mathcal{N}_1)$ et $f_2, : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (Y_2, \mathcal{N}_2)$ sont mesurable.

Démonstration. Si f est mesurable, alors $f_1 = \pi_1 \circ f$ et $f_2 = \pi_2 \circ f$ le sont aussi comme composition de fonctions mesurables (voir Théorème 2.3.4). Inversement, si f_1 et f_2 sont mesurables, alors pour tout $A_1 \in \mathcal{N}_1$ et $A_2 \in \mathcal{N}_2$ on a

$$f^{-1}(A_1 \times A_2) = f_1^{-1}(A_1) \cap f_2^{-1}(A_2) \in \mathcal{M}$$

Donc puisque $\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2 = \sigma(\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2)$ et d'aprés la Proposition 2.3.1, f est mesurable. ■

Définition 4.1.5 *(Les sections)*

Pour toute partie E de $X \times Y$ et tout $x \in X$, on pose

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$$

On dit que E_x est la section de E selon $x \in X$. De manière analogue, on définit la section de E selon $y \in Y$ par

$$E_y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$$

Par exemple, si $E = A \times B$ où $A \subset X$ et $B \subset Y$, pour tout $x \in X$ on a

$$E_x = \begin{cases} \phi \text{ si } x \notin A \\ B \text{ si } x \in A \end{cases}$$

Définition 4.1.6 *Soit l'application $f : X \times Y \longrightarrow Z$. Pour $x \in X$ et $y \in Y$, on définit les applications partielles $f_x : Y \longrightarrow Z$ et $f_y : X \longrightarrow Z$ par*

$$f_x(y) = f(x, y) \quad \textit{et} \quad f_y(x) = f(x, y)$$

Une propriété importante de la tribu produit $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ est d'assurer la mesurabilité des sections et les applications partielles. Plus précisément, on a

Proposition 4.1.7 *Soient $(X, \mathcal{M})$ et $(Y, \mathcal{N})$ deux espaces mesurables.*
(i) Si $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, alors pour tout $x \in X$ et $y \in Y$ on a $E_x \in \mathcal{N}$ et $E_y \in \mathcal{M}$.
(ii) Si l'application $f : (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable, alors les applications partielles $f_x : (Y, \mathcal{N}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $f_y : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sont mesurables.

Démonstration. Posons

$$\mathcal{A} = \{E \subset X \times Y : E_x \in \mathcal{N} \text{ pour tout } x \in X\}$$

Comme $(X \times Y)_x = Y \in \mathcal{N}$ pour tout $x \in X$, on a $X \times Y \in \mathcal{A}$. Si $E \in \mathcal{A}$, alors pour tout $x \in X$ on a $(E^c)_x = (E_x)^c \in \mathcal{N}$ et par conséquent $E^c \in \mathcal{A}$. En fin, soit $(E_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, pour tout $x \in X$ on a

$$\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right)_x = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (E_n)_x \in \mathcal{N},$$

et par conséquent $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \in \mathcal{A}$. On a ainsi montré que $\mathcal{A}$ est une tribu sur $X \times Y$. En outre, si $A \in \mathcal{M}$ et $B \in \mathcal{N}$, alors pour tout $x \in X$,

$$(A \times B)_x = \begin{cases} \phi \text{ si } x \notin A \\ B \text{ si } x \in A \end{cases}$$

de sorte que $A \times B \in \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ est la plus petite tribu sur $X \times Y$ contenant les rectangles mesurables, on en déduit que $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subset \mathcal{A}$, ce qui démontre (i).
(ii) Soit $a \in \mathbb{R}$. Comme $f : (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable, on a $f^{-1}(]a, +\infty[) \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Pour tout $x \in X$, on a en vertu de (i)

$$f_x^{-1}(]a, +\infty[) = \left(f^{-1}(]a, +\infty[)\right)_x \in \mathcal{N},$$

et par conséquent $f_x : (Y, \mathcal{N}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable. ■

4.2 Mesure produit

On veut maintenant construire une mesure sur l'espace produit $X \times Y$ où X et Y sont des espaces mesurés.

Théorème 4.2.1 *[7]*
Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis.
(i) Il existe une unique mesure positive, notée $\mu \otimes \nu$, sur la tribu $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ qui vérifier

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A).\nu(B) \tag{4.1}$$

quels que soient $A \in \mathcal{M}$ et $B \in \mathcal{N}$.
(ii) Pour tout $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, les fonctions

$$\begin{array}{lll} (X, \mathcal{M}) \longrightarrow [0, +\infty] & \textit{et} & (Y, \mathcal{N}) \longrightarrow [0, +\infty] \\ x \longmapsto \nu(E_x) & & y \longmapsto \mu(E_y) \end{array}$$

sont mesurables de plus on a

$$\mu \otimes \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu = \int_Y \mu(E_y) d\nu. \tag{4.2}$$

Corollaire 4.2.2 *Sous les hypothèses du théorème précédent, on a*

$$\int_X \left(\int_Y \chi_E(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \mu \otimes \nu(E) = \int_Y \left(\int_X \chi_E(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y) \tag{4.3}$$

pour tout $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.

Démonstration. Il est clair que pour tout $(x,y) \in X \times Y$ on a $\chi_{E_x} = \chi_E = \chi_{E_y}$ et par définition de l'intégrale on a

$$\nu(E_x) = \int_Y \chi_{E_x} d\nu \quad \text{et} \quad \mu(E_y) = \int_X \chi_{E_y} d\mu.$$

Alors d'aprés (4.2) on a

$$\mu \otimes \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu = \int_X \left(\int_Y \chi_E(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

et

$$\mu \otimes \nu(E) = \int_Y \mu(E_y) d\nu = \int_Y \left(\int_X \chi_E(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

■

Remarques 4.2.3 *1) L'hypothèse de σ-finitude est nécessaire. En effet, soit $(X, \mathcal{M}) = (Y, \mathcal{N}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $\mu = \lambda$ est la mesure de Lebesgue et ν la mesure de comptage (ν est non σ-finie d'après l'Exemple 1.3.8). Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Pour tout $x \in X$ et $y \in Y$ on a $\nu(E_x) = 1$ et $\lambda(E_y) = 0$. Or*

$$\infty = \int_{\mathbb{R}} \nu(E_x) d\lambda \neq \int_{\mathbb{R}} \lambda(E_y) d\nu = 0$$

2) La mesure produit $\mu \otimes \nu$ est σ-finie sur $(X, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$. En effet, comme les espaces $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ sont σ-finis, il existent $(E_n)_n \subset \mathcal{M}$ et $(G_n)_n \subset \mathcal{N}$ tels que $X =$

$\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ *et* $Y = \bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n$ *avec* $\mu(E_n) < \infty$ *et* $\nu(G_n) < \infty$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$. *Pour tout* $n, m \geq 1$, *on pose* $F_{n,m} = E_n \times G_m$, *de sorte que*

$$X \times Y = \bigcup_{n,m \geq 1}^{+\infty} F_{n,m} \quad et \quad \mu \otimes \nu(F_{n,m}) = \mu(E_n).\nu(G_m) < \infty,$$

pour tout $n, m \geq 1$. *Comme* $\mathbb{N}^2$ *est dénombrable, on en déduit que* $\mu \otimes \nu$ *est* σ*-finie.*

Exercice corrigé 4.2.4 *(Exemple de mesure produit)*
Soient μ *et* ν *deux mesures* σ*-finies, non nulles, sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *tel que* $\mu \otimes \nu(\Delta^c) = 0$ *où* $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. *Montrer qu'il existe* $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\mu = \alpha\delta_a \quad et \quad \nu = \beta\delta_a,$$

où δ_a *est la mesure de Dirac en* a.

Démonstration. On remarque d'abord que Δ^c est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ donc $\Delta^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. De plus on a $(\Delta^c)_y = (\Delta_y)^c = \{x\}^c$, alors par les hypothéses et Théorème 4.2.1 on a

$$\mu \otimes \nu(\Delta^c) = \int_{\mathbb{R}} \nu(\{x\}^c) d\mu = 0,$$

on déduit donc que $\nu(\{x\}^c) = 0$, pour μ-presque par tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $\mu(\mathbb{R}) \neq 0$, il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $\nu(\{a\}^c) = 0$. Ceci donne que $\nu = \alpha\delta_a$ avec $\alpha = \nu(\{a\})$. Comme $\nu \neq 0$ on a $\alpha > 0$.
D'autre fois, grâce à le Théorème 4.2.1 on a

$$\mu \otimes \nu(\Delta^c) = \int_{\mathbb{R}} \mu(\{x\}^c) d\nu = 0$$

Comme $\nu = \alpha\delta_a$, on a donc $\mu \otimes \nu(\Delta^c) = \alpha\mu(\{a\}^c) = 0$ on déduit donc $\mu = \beta\delta_a$ avec $\beta = \mu(\{a\})$. En fin, comme $\mu \neq 0$ on a $\beta > 0$. ■

4.3 Théorèmes de Fubini et conséquences

Ces théorèmes relient l'intégrale sur la mesure produit et les intégrales itérées.

Théorème 4.3.1 *(Fubini-Tonelli)*
Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *et* $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ *deux espaces mesurés* σ*-finis et soit* $f : (X\times Y, \mathcal{M}\otimes\mathcal{N}) \longrightarrow [0, +\infty]$ *une fonction mesurable positive. Alors*
i) Les fonctions

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{M}) \longrightarrow [0, +\infty] & et & (Y, \mathcal{N}) \longrightarrow [0, +\infty] \\ x \longmapsto \displaystyle\int_Y f(x, y) d\nu(y) & & y \longmapsto \displaystyle\int_X f(x, y) d\mu(x) \end{array}$$

sont mesurables.
ii) On a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \int_{X\times Y} f d(\mu\otimes\nu) &= \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) \in [0, +\infty] \end{aligned} \tag{4.4}$$

Démonstration. Pour $f = \chi_E$, avec $E \in \mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$, les conclusions de i) et ii) ont été établies en ii) dans le Théorème 4.2.1 et le Corollaire 4.2.2. Pour $f : X \times Y \longrightarrow [0, +\infty]$ étagée mesurable, les résultats restent vrai par linéarité. Finalement, si $f : X \times Y \longrightarrow [0, +\infty]$ mesurable, alors par la Proposition 2.3.11 il existe une suite croissante $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions étagées positives telles que

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x, y) = f(x, y), \text{ pour tout } (x, y) \in X \times Y.$$

Par le Théorème 3.2.4 de la convergence monotone on a

$$\int_X f(x, y) d\mu(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x, y) d\mu(x),$$

pour tout $y \in Y$. Donc la fonction $y \longmapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ est mesurable comme la limite simple d'une suite de fonctions mesurables (voir Proposition 2.3.10). Par le même raisonnement, on voit que la fonction $x \longmapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ est mesurable.

Les égalités (4.4) est vraie pour les fonctions f_n donc pour f par passage à la limite croissante en appliquant deux fois le Théorème 3.2.4 de la convergence monotone. ■

On passe maintenant au cas de fonctions réelles ou complexes.

Théorème 4.3.2 *[16](Fubini-Lebesgue)*
Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis et soit $f : (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction intégrable, c-à-d $f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$. Alors
1) $f_x \in \mathcal{L}^1(\nu)$ pour μ-presque partout $x \in X$ et $f_y \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pour ν-presque partout $y \in Y$.
2) La fonction $x \longmapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ est dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ et la fonction $y \longmapsto \int_X f(x,y)d\mu(x)$ est dans $\mathcal{L}^1(\nu)$.
3) On a les égalités suivantes

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x) \right) d\nu(y). \qquad (4.5)$$

Remarque 4.3.3 *Il existe des fonctions $f : (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles les intégrales superposées*

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y) \right) d\mu(x), \quad \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x) \right) d\nu(y) \qquad (4.6)$$

ont un sens, mais qui ne sont pas intégrables (c-à-d $f \notin \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$) comme le montre l'exercice suivant

Exercice corrigé 4.3.4 *Considérons, sur le produit $]0,1[\times]0,1[$ muni de la mesure produit des mesures λ de Lebesgue sur $]0,1[$, la fonction f définie par*

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Montrer que les intégrales (4.6) existent mais $f \notin \mathcal{L}^1(\lambda \otimes \lambda)$.

Démonstration. Pour $0 < x < 1$ on a

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

On vérifier de même que

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx \right) dy = -\frac{\pi}{4}.$$

En effet, $f \notin \mathcal{L}^1(\lambda \otimes \lambda)$ car

$$\int_{]0,1[^2} f_+ dydx = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2+y^2} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{1}{2x} dx = +\infty.$$

■

La forme la plus courante du Théorème de Fubini est la suivante

Théorème 4.3.5 *Soit $f : (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \longrightarrow \mathbb{C}$. Si l'un des trois nombres*

$$\int_{X\times Y} |f|\, d(\mu \otimes \nu), \quad \int_X \left(\int_Y |f|\,(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x), \quad \int_Y \left(\int_X |f|\,(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y) \tag{4.7}$$

est fini, alors il en est de même pour les deux autres. De plus on a les égalités (4.5).

Démonstration. D'aprés le Théorème 4.3.1 de Fubini-Tonelli, les trois nombres (4.7) sont égaux. Donc si l'un est fini, $f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$ et le Théorème 4.3.2 de Fubini-Lebesgue donne la conclusion. ■

4.4 Exercices du chapitre 4

Exercice 4.1

Soit l'espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$ avec $X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{M} = \{\phi, \{a\}, \{b, c\}, X\}$ et $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ est définie par

$$\mu(\phi) = \mu(\{a\}) = 0 \quad \text{et} \quad \mu(X) = \mu(\{b, c\}) = 1$$

1) Vérifier que la mesure μ complète et σ-finie

2) Dans $(X \times X, \mathcal{M} \otimes \mathcal{M}, \mu \otimes \mu)$, calculer $\mu \otimes \mu(\{a\} \times \{b, c\})$ et déterminer la section $(\{a\} \times \{b\})_x$?

Est-ce-que $\{a\} \times \{b\} \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{M}$?

3) Déduire que la mesure produit $\mu \otimes \mu$ n'est pas complète.

Exercice 4.2

Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis et $A \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ négligeable par la mesure produit $\mu \otimes \nu$. Si A_x est la section de A en $x \in X$, montrer que $\nu(A_x) = 0$ pour μ-presque par tout $x \in X$.

Exercice 4.3

Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espace mesuré σ-fini et $f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une application mesurable telle que $\inf_{x \in X} f(x) = a \in \mathbb{R}$. On pose $\Omega = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : a \leq y \leq f(x)\}$ et $\Gamma = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$ (graphe de f).

Utiliser l'application $\varphi : X \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x, y) = f(x) - y$ pour montrer que :

1) $\Omega, \Gamma \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$

2) $\mu \otimes \lambda(\Omega) = \int_X (f - a) d\mu$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

3) $\mu \otimes \lambda(\Gamma) = 0$

Exercice 4.4

1) On considère l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ où μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.

a) Montrer que si $g : (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu) \longrightarrow (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ est une fonction mesurable, alors

$$\int_{\mathbb{N}} g d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} g(n)$$

b) On définit la fonction $f : (\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu\otimes\mu) \longrightarrow (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ par

$$f(m,n) = \begin{cases} 1, \text{ si } m = n \\ -1, \text{ si } m = n+1 \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

Calculer

$$\int \left(\int f(m,n) d\mu(m) \right) d\mu(n) \quad \text{et} \quad \int \left(\int f(m,n) d\mu(n) \right) d\mu(m)$$

Déduire que la fonction f n'est pas intégrable sur $\mathbb{N}^2$.

Exercice 4.5

Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini et $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow ([0, +\infty[, \mathcal{B}([0, +\infty[), \lambda)$ une fonction mesurable positive (λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$). Montrer que

$$\int_X f d\mu = (\mu \otimes \lambda)(A) = \int_0^{+\infty} \mu(\{x \in X : f(x) > y\}) \, dy.$$

avec $A = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq y < f(x)\}$.