$3^{ième}$ année licence
Module : Mesure et intégration

Série 3

Exercice 1. *Les fonctions suivantes sont-elles boréliennes (mesurables pour la tribu borélienne) ou non ?*
- $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f_1(x) = \begin{cases} 0 & : si\ x \leq 0 \\ 1/x & : si\ x > 0. \end{cases}$
- $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f_2(x) = x \exp(\cos x)$.
- $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f_3(x) = \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$.

Exercice 2. *Soit* $f : E \to \mathbb{R}$ *une fonction. Montrer que* f *est mesurable si et seulement si les ensembles* $\{x \in E \ / \ f(x) > r\}$ *le sont pour tout* $r \in \mathbb{Q}$.

Exercice 3. *Soient* $(E, \mathcal{A}), (F, \mathcal{B})$ *et* $(G, \mathcal{C})$ *trois espaces mesurables. Soient* $f : E \to F$ *mesurable et* $g : F \to G$ *mesurable, alors la fonction* $g \circ f$ *est aussi mesurable.*

Exercice 4. *Soit* $f : (X, \mathcal{F}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *une fonction mesurable.*
1) Montrer que si $\mu(X) \neq 0$, *alors il existe* $A \in \mathcal{F}$ *avec* $\mu(A) \neq 0$, *tel que* f *soit bornée sur* A.
2) Montrer que si $\mu(\{f \neq 0\}) \neq 0$, *alors il existe* $B \in \mathcal{F}$ *avec* $\mu(B) \neq 0$ *et* $m > 0$ *tel que* $|f(x)| \geq m$ *sur* B.

Exercice 5. *Soient* f *et* g :$(E, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ *deux fonction mesurables.*
1- Montrer que la fonction $h : (E, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}^2$ *définie par* $h(x) = (f(x), g(x))$ *est mesurable.*
2- En déduire que les fonctions $(f + g)$, αf, $f.g$, $\sup\{f, g\}$, $\inf\{f, g\}$ *sont mesurables.*

Exercice 6. *Soit* f :$(E, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *mesurable. Montrer que* f *est une limite d'une suite* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *croissante de fonctions mesurables étagées et positives.*
Indication *: on pose*

$$f_n(x) = \begin{cases} k2^{-n} & : \dfrac{k}{2^n} \leq f(x) < \dfrac{k}{2^{n+1}} \quad et\ k = 0, 1, \cdots, n2^n - 1 \\ n & : f(x) \geq n. \end{cases}$$

Exercice 7. *Montrer que toute fonction croissante de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est borélienne. (**Indication :** Montrer dans ce cas qu'en tout point de discontinuité les limites à gauche et à droite sont finies.)*