CORRIGÉ DU CONTRÔLE CONTINU 2

Exercice 1.

1) Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (attention il y a des points négatifs pour réponses fausses, les points négatifs sont comptabilisés pour tout l'exercice 1, pas de justification attendue).

Affirmation	**Vrai**	**Faux**
$\mathbb{N}^{234}$ est dénombrable.	$\times$	
$\lambda_2(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}) = 0$ où λ_2 désigne la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$.	$\times$	
Une limite simple de fonctions étagées est étagée.		$\times$

2) Énoncer et démontrer les formules de Hausdorff pour l'image réciproque.

Solution. Voir Proposition 2 du cours. □

3) Soit X et Y deux ensembles non-vides, $f : X \to Y$ une fonction et $\mathcal{T}$ une tribu de X. Définir ce qu'est la tribu image de $\mathcal{T}$ par f et montrer que c'est une tribu.

Solution. Voir Définition 6 et Proposition 13 du cours. □

4) Après avoir justifié que $f : x \mapsto x^2$ était mesurable, donner une suite croissante de fonctions étagées (f_n) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que (f_n) converge simplement vers f.

Solution. Il faut bien sûr remarquer que f est continue donc mesurable. Ensuite, on peut prendre par exemple la suite de fonctions étagées suivantes :

$$f_n(x) := \frac{1}{n^2}\lfloor x^2n^2\rfloor 1_{[-n,n]}(x)$$

Ces fonctions sont clairement étagées (nombre fini de valeurs et mesurable). Si $n \geq x$ alors $f_n(x) = \frac{1}{n^2}\lfloor x^2n^2\rfloor$ et donc

$$\frac{1}{n^2}(x^2n^2-1) < f_n(x) \leq \frac{1}{n^2}x^2n^2$$

ou encore $-\frac{1}{n^2} < f_n(x) - x^2 \leq 0$ d'où $(f_n(x))$ converge vers $x^2 = f(x)$ quand n tend vers $+\infty$. □

Exercice 2.

On rappelle que si X est un ensemble et $A \subseteq X$, on note 1_A la fonction qui à $x \in X$ associe 1 si $x \in A$ et 0 sinon. Pour la suite de l'exercice, on admettra les formules suivantes, si $A, B \subseteq X$,

$$1_{A\cap B} = 1_A 1_B \text{ et } 1_{A^c} = 1 - 1_A.$$

1) Exprimer $1_{A\cup B}$ à l'aide de 1_A et 1_B. Justifier votre réponse.

Solution. On a $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$ par les lois de Morgan, ainsi

$$1_{A\cup B} = 1 - 1_{A^c\cap B^c} = 1 - (1-1_A)(1-1_B) = 1 - 1 + 1_A + 1_B - 1_A1_B = 1_A + 1_B - 1_A1_B.$$

□

2) On définit $A\Delta B := (A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$. Calculer $1_{A\Delta B}$ en fonction de 1_A et 1_B.

Solution. On a

$$1_{A\Delta B} = 1_{A\cap B^c} + 1_{A^c\cap B} + 1_{A\cap B^c}1_{A^c\cap B} = 1_A(1-1_B) + (1-1_A)1_B + \underbrace{1_A(1-1_B)(1-1_A)1_B}_{=0} = 1_A + 1_B - 21_A1_B.$$

$\square$

3) Montrer que la loi Δ est associative sur $\mathcal{P}(E)$. Justifier rapidement que pour toute partie A de E, $\emptyset\Delta A = A = A\Delta\emptyset$. Si $B\Delta A = \emptyset$, exprimer B en fonction de A.

Solution. D'une part,

$$1_{A\Delta(B\Delta C)} = 1_A + 1_{B\Delta C} - 21_A1_{B\Delta C} = 1_A + 1_B + 1_C - 21_B1_C - 21_A1_B - 21_A1_C + 41_A1_B1_C$$

d'autre part,

$$1_{(A\Delta B)\Delta C} = 1_{A\Delta B} + 1_C - 21_{A\Delta B} + 1_C = 1_A + 1_B - 21_A1_B + 1_C - 21_A1_C - 21_B1_C + 41_A1_B1_C$$

d'où $1_{A\Delta(B\Delta C)} = [1_{(A\Delta B)\Delta C}$ et donc $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$. Puisque $1_\emptyset = 0$, la formule de 2) nous permet d'affirmer que $1_{\emptyset\Delta A} = 1_A = 1_{A\Delta\emptyset}$ d'où $\emptyset\Delta A = A = A\Delta\emptyset$. Finalement, on remarque que $A\Delta A = \emptyset\cup\emptyset = \emptyset$. D'où $B\Delta A = \emptyset$ si et seulement si $B\Delta(A\Delta A) = A$ si et seulement si $B\Delta\emptyset = A$ si et seulement si $B = A$. $\square$

4) Soit $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$, montrer que $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

Solution. On a :

$$1_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)} = 1_A1_B + 1_A1_C - 2\underbrace{1_A^2}_{=1_A}1_B1_C = 1_A(1_B + 1_C - 21_B1_C) = 1_A1_{B\Delta C} = 1_{A\cap(B\Delta C)}$$

$\square$

Exercice 3.

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable.

1) Rappeler la définition de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$ et donner, sans démonstration, un ensemble générateur dénombrable de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Solution. Par définition, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}))$, c'est à dire $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$.
Par le cours, il est engendré par les intervalles $]a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{Q}$ qui est dénombrable car $\mathbb{Q}$ l'est. $\square$

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Justifier que f est mesurable.

Solution. Si f est continue alors pour tout U ouvert de $\mathbb{R}$, on a $f^{-1}(U)$ ouvert de $\mathbb{R}$ également. Par conséquent $f^{-1}(\mathcal{O}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{R})$ puis, en passant aux tribus engendrées, $\sigma(f^{-1}(\mathcal{O}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Enfin, le lemme de transport assure que $\sigma(f^{-1}(\mathcal{O}(\mathbb{R})) = f^{-1}(\underbrace{\sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R})}_{=\mathcal{B}(\mathbb{R})})$. D'où $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc f mesurable. $\square$

3) En déduire que si f^3 est mesurable alors f est mesurable.

Solution. La fonction $\sqrt[3]{\cdot}$ est continue donc mesurable. Il est clair que $f = \sqrt[3]{f^3}$ et donc, puisque f^3 et $\sqrt[3]{\cdot}$ sont mesurables (l'un par hypothèse et l'autre par ce qui précède), f est composée de fonctions mesurables, elle est donc mesurable. $\square$

4) Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\{x \in \mathbb{R} \mid (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\}$ est un borélien.

Solution. Puisque les f_n sont continues et donc mesurables, $\liminf f_n$ et $\limsup f_n$ sont mesurables (c'est le cours). Par conséquent, si l'on note $\psi := \limsup f_n - \liminf f_n$ alors ψ est mesurable.

Remarquons que si $x \in \mathbb{R}$ alors $\psi(x) = 0$ si et seulement si $\limsup f_n(x) = \liminf f_n(x)$ si et seulement si $(f_n(x))$ converge. Autrement dit $\psi^{-1}(\{0\})$ est l'ensemble des points où $(f_n(x))$ converge. Or $\{0\}$ est fermé donc borélien, et ψ mesurable, on en déduit que $\psi^{-1}(\{0\})$ est un borélien. D'où la conclusion. □

Exercice 4.

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $f : X \to X$ une fonction mesurable.

1) On note $\mathcal{I}_f := \{A \in \mathcal{T} \mid f^{-1}(A) = A\}$. Montrer que $\mathcal{I}_f$ est une tribu.

Solution. Il est clair que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ donc $\emptyset \in \mathcal{I}_f$. Soit $A \in \mathcal{I}_f$. Alors

$$\begin{aligned} f^{-1}(A^c) &= \left(f^{-1}(A)\right)^c \text{ par les formules d'Hausdorff} \\ &= A^c \text{ car } A \in \mathcal{I}_f \end{aligned}$$

d'où $A^c \in \mathcal{I}_f$. Soit (A_n) une suite d'éléments de $\mathcal{I}_f$ alors :

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\bigcup A_n\right) &= \bigcup f^{-1}(A_n) \text{ par les formules d'Hausdorff} \\ &= \bigcup A_n \text{ car } A_n \in \mathcal{I}_f \text{ pour tout } n \end{aligned}$$

d'où $\bigcup A_n \in \mathcal{I}_f$. Par conséquent, $\mathcal{I}_f$ est une tribu. □

2) On dit que $x \in X$ est un **point fixe** de f si $f(x) = x$. Est-ce que la tribu engendrée par les $\{x\}$ où x est point fixe de f est incluse dans $\mathcal{I}_f$? Trouver un exemple où il y a inclusion stricte.

Solution. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction constante égale à 1 alors $f^{-1}(A) = \emptyset$ ou $\mathbb{R}$ selon que $1 \notin A$ ou $1 \in A$. Dans tout les cas, on voit bien que $\{1\}$ n'est pas dans $\mathcal{I}_f$.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction identité alors, on vérifie immédiatement que $f^{-1}(\{x\}) = \{x\}$. Or la tribu engendrée par les $\{x\}$ est la tribu des dénombrables ou complémentaires dénombrables qui est différente de $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{I}_f$. D'où l'inclusion stricte.

□

3) On note $\mathcal{S}_f := \{A \in \mathcal{T} \mid A \subseteq f^{-1}(A)\}$. Justifier que $\mathcal{I}_f$ est inclus dans $\mathcal{S}_f$. Justifier, à l'aide d'un contre-exemple, que $\mathcal{S}_f$ n'est pas toujours une tribu.

Solution. Si A vérifie $f^{-1}(A) = A$ alors, en particulier $A \subseteq f^{-1}(A)$. D'où $\mathcal{I}_f$ est contenu dans $\mathcal{S}_f$.

Prenons f la fonction constante égale à 1. Alors $\{1\} \in \mathcal{S}_f$ (car $f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{R}$ mais $\{1\}^c \notin \mathcal{S}_f$ car $f^{-1}(\{1\}^c) = \emptyset$. Ainsi $\mathcal{S}_f$ n'est pas stable par passage à l'opposé et donc $\mathcal{S}_f$ n'est pas une tribu. □