Chapitre 2

Fonctions mesurables.

2.1 Fonctions étagées.

Définition 2.1.1 *Soit* $(X, \mathcal{M})$ *un espace mesurable. Une fonction numérique* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite étagée si* f *est une combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques c'est-à-dire s'il existe une famille finie* $(A_i)_{1 \leq i \leq n} \subset \mathcal{M}$ *et un sous-ensemble fini* $\{a_1, ..., a_n\}$ *de* $\mathbb{R}$ *tels que*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i . \chi_{A_i} \tag{2.1}$$

Autrement dit si l'image $f(X)$ *de* f *est un sous-ensemble fini* $\{a_1, ..., a_n\}$ *de* $\mathbb{R}$.

Remarque 2.1.2 *Si on pose* $A_i = f^{-1}(\{a_i\})$ *pour tout* $i = 1, ..., n$ *on a* $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ *avec* $A_i \cap A_j = \phi$ *pour tout* $i \neq j$. *Alors toute fonction étagée* f *s'écrit canoniquement par (2.1) avec* $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ *une partition de* X.

Proposition 2.1.3 *Si* $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *sont deux fonctions étagées et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Alors* $f + \lambda g$, $f.g$, $\sup(f, g)$ *et* $\inf(f, g)$ *sont des fonctions étagées.*

Démonstration. On écrit f et g sous la forme

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i . \chi_{A_i} \quad \text{et} \quad g = \sum_{j=1}^{m} b_j . \chi_{B_j}.$$

Où $n, m \in \mathbb{N}$. Comme les familles $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(B_j)_{1 \leq j \leq m}$ forment des partitions de X on peut écrire

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \chi_{A_i \cap B_j} \quad \text{et} \quad g = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_j \chi_{A_i \cap B_j},$$

Alors on a

$$f + g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i + b_j) \chi_{A_i \cap B_j} \quad \text{et} \quad f.g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i b_j) \chi_{A_i \cap B_j},$$

et aussi

$$\sup(f, g) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sup(a_i, b_j) \chi_{A_i \cap B_j} \quad \text{et} \quad \inf(f, g) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \inf(a_i, b_j) \chi_{A_i \cap B_j}$$

■

2.2 Fonctions mesurables.

Définition 2.2.1 *Soit* $(X,\mathcal{M})$ *et* $(Y,\mathcal{N})$ *deux espaces mesurables. L'application* $f:X\longrightarrow Y$ *est dite mesurable si, pour tout* $B\in\mathcal{N}$*, l'image réciproque*

$$f^{-1}(B)=\{x\in X:f(x)\in B\}$$

appartient à $\mathcal{M}$*.*

Définition 2.2.2 *Soit* $(X,\mathcal{M})$ *un espace probabilisable, on appelle variable aléatoire toute fonction mesurable de* $(X,\mathcal{M})$ *dans* $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$*.*

Exemples 2.2.3 *(1) Toute application* $f:(X,\mathcal{P}(X))\longrightarrow(Y,\mathcal{P}(Y))$ *est mesurable.*
(2) Si $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{M}'$ *sont deux tribus sur* X *alors l'identité sur* X

$$id:(X,\mathcal{M})\longrightarrow(X,\mathcal{M}'),\ id(x)=x$$

est mesurable si et seulement si $\mathcal{M}'\subset\mathcal{M}$*.*
(3) Si $(X,\mathcal{M})$ *et* $(Y,\mathcal{N})$ *sont deux espaces mesurables et* $f:X\longrightarrow Y$ *une application constante (c-à-d. il existe* $y_0\in Y$ *tel que pour tout* $x\in X$ *on a* $f(x)=y_0$*) alors* f *est mesurable.*
(4) Une fonction étagée f *est toujours mesurable.*
(5) Soit $(X,\mathcal{M})$ *un espace mesurable et* $A\in\mathcal{M}$*. La fonction idicatrice* χ_A *de l'ensemble* A *est une application de* X *dans* $\mathbb{R}$ *muni de la tribi borélienne* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *est mesurable si et seulement si* $A\in\mathcal{M}$*. Pour cette raison, les éléments de* $\mathcal{M}$ *sont dits ensembles mesurables.*

Démonstration. On démontre seulement (4) et (5). Pour (4), en effet f est une fonction de $(X,\mathcal{M})$ dans $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, alors il existe $(A_i)_{1\le i\le n}$ une patition de X et $\{a_1,...,a_n\}\subset\mathbb{R}$ tels que $f=\sum_{i=1}^{n}a_i.\chi_{A_i}$. Pour tout $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a donc

$$f^{-1}(B)=\left(\bigcup_{i;a_i\in B}A_i\right)\in\mathcal{M}.$$

Ce qui prouve que f est mesurable.

Maitenant montrons (5), d'aprés (4) si $A \in \mathcal{M}$ la fonction étagée χ_A est mesurable. Inversement, si χ_A est mesurable, alors

$$A = (\chi_A)^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{M}$$

car $\{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ comme un fermé dans $\mathbb{R}$. ■

Remarque 2.2.4 *Une application peut être mesurable par rapport à une tribu et ne pas être pour d'autres tribus. En effet, soit la tribu*

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{A \subset \mathbb{R} : A \textit{ dénombrable ou } A^c \textit{ dénombrable}\}$$

l'application identique

$$id : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

est evidement mesurable. Cependant

$$id : (\mathbb{R}, \mathcal{D}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

n'est pas mesurable d'aprés (2) dans l'exemple précédent car $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \nsubseteq \mathcal{D}(\mathbb{R})$ comme $[a, b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mais $[a, b] \notin \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Proposition 2.2.5 *(Tribu image)*
Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable. Si Y est un ensemble quelconque. Alors on peut toujours munir Y d'une plus grande tribu $\mathcal{N}$ sur Y qui rende la fonction $f : X \longrightarrow Y$ mesurable.

Démonstration. On pose

$$\mathcal{N} = \left\{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{M}\right\}. \tag{2.2}$$

On a directement, $\phi \in \mathcal{N}$ car $f^{-1}(\phi) = \phi \in \mathcal{M}$ et pour tout $B \in \mathcal{N}$ on a $f^{-1}(B)$ appartient à la tribu $\mathcal{M}$ ce qui donne

$$f^{-1}(B^c) = \left[f^{-1}(B)\right]^c \in \mathcal{M}.$$

Alors on a bien que $B^c \in \mathcal{N}$. Soit maintenant $(B_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{N}$ une suite de parties mesurables dans $(Y, \mathcal{N})$. Comme $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{M}$, pour tout $n \geq 1$, on en déduit que

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{M}.$$

Ceci signifier que $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \in \mathcal{N}$ et on conclut que $\mathcal{N}$ est une tribu sur Y.
Il est clair, par construction de la tribu $\mathcal{N}$, que la fonction $f : X \longrightarrow Y$ est mesurable. Donc il reste à montrer que $\mathcal{N}$ est la plus grande tribu qui rend f mesurable. Si $\mathcal{B}$ est une tribu sur Y telle que $f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$ est mesurable, alors $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}$ car pour tout $B \in \mathcal{B}$ on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ et donc $B \in \mathcal{N}$. ■

2.3 Caractérisation de la mesurabilité et stabilité de $\mathcal{L}^0(X)$.

Proposition 2.3.1 *(Critère de mesurabilité)*
Soit f une fonction entre deux espaces mesurables $(X, \mathcal{M})$ et $(Y, \mathcal{N})$. On suppose que $\mathcal{N}$ est engendrée par une famille $\mathcal{F}$ de parties de Y c'est-à-dire $\mathcal{N} = \sigma(\mathcal{F})$. Alors f est mesurable si et seulement si

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{M}, \text{ pour tout } B \in \mathcal{F} \tag{2.3}$$

Démonstration. Si la fonction f est mesurable, alors la condition (2.3) est évidente. Inversement, supposons que $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$, pour tout $B \in \mathcal{F}$ et soit $\widetilde{\mathcal{N}}$ la tribu image de $\mathcal{M}$ par f définie par (2.2). Alors $\mathcal{F} \subset \widetilde{\mathcal{N}}$ et puisque $\mathcal{N} = \sigma(\mathcal{F})$ on a $\mathcal{N} \subset \widetilde{\mathcal{N}}$, et en particulier, f est mesurable. ■

Corollaire 2.3.2 *Soient X et Y deux espaces topologiques munis de leurs tribus boréliennes. Si $f : (X, \mathcal{B}(X)) \longrightarrow (Y, \mathcal{B}((Y))$ est continue, alors elle est mesurable.*

Remarques 2.3.3 ***(Mesurabilité d'une fonction numérique)***

1) Puisque la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par la famille des intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $]a, +\infty[$ (voir Théorème 1.2.13), alors la fonction $f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable si et seulement si

$$f^{-1}(]a, +\infty[) \in \mathcal{M}, \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

On note $\mathcal{L}^0(X)$ l'ensemble des fonctions $f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ numériques mesurables.

Théorème 2.3.4 *Soit $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{N})$ et $(Z, \mathcal{P})$ trois espaces mesurables. Si $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ sont mesurables alors $g \circ f$ est mesurable.*

Démonstration. Pour tout $B \in \mathcal{P}$, $g^{-1}(B) \in \mathcal{N}$ car g est mesurable, et donc $f^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathcal{M}$ puisque f est également mesurable, donc

$$(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}\left(g^{-1}(B)\right) \in \mathcal{M}.$$

ce qui prouve que $g \circ f$ est mesurable. ■

Proposition 2.3.5 *Soient $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable, $(Y, \mathcal{T})$ un espace topologique, $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^0(X)$ deux applications numériques mesurables et $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow (Y, \mathcal{T})$ une application continue. Alors l'application $h : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T})$ définie par*

$$h(x) = \Phi(f_1(x), f_2(x)), \text{ pour tout } x \in X,$$

est mesurable. Autrement dit, une combinaison continue de deux applications mesurables est mesurable.

Démonstration. On peut écrire $h = \Phi \circ F$ avec $F : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ est définie par $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Comme Φ est mesurable (car continue), il suffit de montrer que F est mesurable. Si I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ on a

$$F^{-1}(I \times J) = f_1^{-1}(I) \cap f_1^{-1}(J) \in \mathcal{M}.$$

Par la Proposition 2.3.1 et comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est engendrée par les rectangles de la forme $I \times J$, l'application F est mesurable. ■

Partie positive et partie négative d'une fonction numérique

A toute fonction réelle f, on peut associer deux fonctions positives, sa partie positive f_+ et sa partie négative f_-, définies respectivement par

$$f_+(x) = \sup(f(x), 0) \quad \text{et} \quad f_-(x) = \sup(-f(x), 0)\,.$$

Les parties positive et négative sont liées à la fonction initiale par les deux relations suivantes

$$f = f_+ - f_- \quad \text{et} \quad |f| = f_+ + f_-.$$

Proposition 2.3.6 *Si f et g sont des applications numériques mesurables sur $(X, \mathcal{M})$, alors*

$$f + g, \quad fg, \quad \sup(f, g), \quad \inf(f, g), \quad f_+, \quad f_- \text{ et } \ |f|$$

sont des applications mesurables. Autrement dit, $\mathcal{L}^0(X)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Si f ne s'annule pas sur X, alors $\frac{1}{f}$ est mesurable.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la Proposition 2.3.5 avec $(Y, \mathcal{T})$ =$(\mathbb{R}, |.|)$, la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$, et $\Phi(x, y) = x + y$, xy, $\sup(x, y)$ et $\inf(x, y)$

Pour l'application $g = \frac{1}{f}$, posons $Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\varphi : Y \longrightarrow Y$ définie par $\varphi(y) = \frac{1}{y}$. Comme f est mesurable et φ est continue alors $g = \varphi \circ f : X \longrightarrow Y$ (ou $\mathbb{R}$) est mesurable. ■

Remarque 2.3.7 *$|f|$ peut être mesurable sans que f le soit.*

Exemple 2.3.8 *Soit $A \notin \mathcal{M}$ et $f = \chi_A - \chi_{A^c}$ c'est-à-dire que*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ -1 & si\ x \in A^c \end{cases}$$

Alors $|f| = 1$ est mesurable, mais f ne l'est pas car par exemple

$$\{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad et \quad f^{-1}(\{1\}) = A \notin \mathcal{M}.$$

Exercice corrigé 2.3.9 *Soit la fonction* $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & si\ x > 0\ \ et\ x < y \leq 2x \\ -\frac{1}{(1+x)^2} & si\ x > 0\ \ et\ 2x < y \leq 3x \\ 0 & si\ x > 0\ \ et\ y \notin]x, 3x[\\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $A_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, x < y < 2x + \frac{1}{n}\right\}$ *et*
$B_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } 2x < y < 3x + \frac{1}{n}\right\}$.
Déterminer $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ *et* $B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$. *En déduire que la fonction* f *est mesurable.*

Démonstration. 1) On a $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, x < y \leq 2x\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } 2x < y \leq 3x\}$. On pose maintenant $g(x,y) = \frac{1}{(1+|x|)^2}$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. La fonction $g : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable car elle est continue. On remarque maintenant que $f = g\chi_A - g\chi_B$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les ensembles A_n et B_n sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ ils appartiennent donc à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. On en déduit que $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et alors les fonctions χ_A et χ_B sont mesurables (voir (5) dans l'Exemples 2.2.3). En fin la fonction f est mesurable comme somme de produits de fonctions mesurables. ■

Rappelons que la tribu de Borel $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ sur $\overline{\mathbb{R}}$ est engendrée par les intervalles $]a, +\infty]$, $a \in \mathbb{R}$

Proposition 2.3.10 *Soit* $(f_n)_n$ *une suite d'applications mesurables de* $(X, \mathcal{M})$ *dans* $\big(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\big)$. *Alors les applications*

$$\sup_n f_n,\ \inf_n f_n,\ \limsup_{n \longrightarrow +\infty} f_n,\ \liminf_{n \longrightarrow +\infty} f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

sont mesurables. De plus si la suite $(f_n)_n$ *converge simplement vers* f, *alors* f *est mesurable.*
Plus généralement, l'ensemble $\left\{x \in X : \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) \text{ existe}\right\}$ *est mesurable.*

Démonstration. Soit $g = \sup\limits_n f_n$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, si $x \in g^{-1}(]a, +\infty])$ alors il existe $m \geq 1$ tel que $f_m(x) \geq a$, donc $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} f_n^{-1}(]a, +\infty])$. Inversement, si $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} f_n^{-1}(]a, +\infty])$, il est clair que $g(x) = \sup\limits_n f_n(x) \geq a$, d'où

$$g^{-1}(]a, +\infty]) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} f_n^{-1}(]a, +\infty]) \in \mathcal{M}$$

Ainsi, g est mesurable. Il en va de même de $\inf\limits_n f_n = -\sup\limits_n (-f_n)$.

Par définition on a

$$\limsup_{n \longrightarrow +\infty} f_n = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} f_k$$

$$\liminf_{n \longrightarrow +\infty} f_n = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} f_k$$

On est donc ramené aux résultats précédents. De plus si $(f_n)_n$ converge simplement vers f, alors

$$f = \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n = \limsup_{n \longrightarrow +\infty} f_n = \liminf_{n \longrightarrow +\infty} f_n,$$

D'où le résultat. Finalement pour montrer la dernière affirmation, on définit l'application

$$F : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow \left(\overline{\mathbb{R}}^2, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^2)\right), \; F(x) = (\liminf_{n \longrightarrow +\infty} f_n, \limsup_{n \longrightarrow +\infty} f_n)$$

et on remarque que

$$\left\{x \in X : \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) \text{ existe}\right\} = F^{-1}(\Delta)$$

où $\Delta = \left\{(x, x) : x \in \overline{\mathbb{R}}\right\}$. L'ensemble Δ est fermé alors il appartient à $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^2)$ et donc $F^{-1}(\Delta) \in \mathcal{M}$ puisque F est mesurable. ∎

Proposition 2.3.11 *Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable. Toute application numérique mesurable positive $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ est limite simple d'une suite croissante de fonctions $(f_n)_n$ (mesurables) étagées.*

On donne la preuve de cette proposition se forme d'un exercice corrigé.

Exercice corrigé 2.3.12 *Pour tout $n \geq 1$, on définit la fonction étagée $\varphi_n : [0, +\infty] \longrightarrow [0, +\infty[$ par*

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 2^{-n}E(2^n t) & si\ 0 \leq t < n \\ n & si\ t \geq n \end{cases}$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.

1) Démontrer que $0 \leq \varphi_n(t) \leq \varphi_{n+1}(t)$ pour tout $t \in [0, +\infty]$ et $n \geq 1$.

2) On pose $f_n = \varphi_n \circ f$. Vérifier que f_n est étagée et montrer que la suite $(f_n)_n$ est croissante.

3) Démontrer que si $f(x) < \infty$ alors pour n suffisament grand on a

$$f(x) - 2^{-n} \leq f_n(x) \leq f(x).$$

Conclure.

Démonstration. 1) On a trois cas

i) Pour $t \geq n+1$ (ou aussi $t = +\infty$). Alors $\varphi_{n+1}(t) = n+1 > n = \varphi_n(t)$.

ii) Pour $n \leq t < n+1$. D'aprés la croissance de la fonction partie entière on a

$$E(2^{n+1}t) \geq E(2^{n+1}n) = 2^{n+1}n$$

ce qui implique que

$$\varphi_{n+1}(t) = \frac{1}{2^{n+1}}E(2^{n+1}t) \geq n = \varphi_n(t).$$

iii) Pour $0 \leq t < n$. Puisque $2^{n+1}t \geq 2E(2^n t) \in \mathbb{N}$, On a $E(2^{n+1}t) \geq 2E(2^n t)$, alors

$$\varphi_{n+1}(t) = \frac{1}{2^{n+1}}E(2^{n+1}t) \geq \frac{1}{2^n}E(2^n t) = \varphi_n(t).$$

Donc dans tout les cas, pour tout $t \in [0, +\infty]$ et tout $n \geq 1$ on a

$$\varphi_n(t) \leq \varphi_{n+1}(t).$$

2) Il est clair que les applications φ_n sont étagées car pour tout $n \geq 1$, alors les f_n sont aussi étagées car

$$f_n(X) = \varphi_n\left(f(X)\right) = \varphi_n\left([0, +\infty]\right) \text{ est finie.}$$

D'autre part par la croissance de la suite $(\varphi_n)_n$ on peut écrire

$$f_n(x) = \varphi_n(f(x)) \leq \varphi_{n+1}(f(x)) = f_{n+1}(x)$$

pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in X$.

3) Pour n suffisament grand choisissons $n > f(x)$, dans ce cas nous avons

$$f_n(x) = \frac{1}{2^n} E(2^n f(x)).$$

Par les propriétés de la partie entière,

$$2^n f(x) - 1 \leq E(2^n f(x)) \leq 2^n f(x),$$

donc

$$f(x) - \frac{1}{2^n} \leq f_n(x) \leq f(x).$$

Finalement, par le passage à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$ nous concluons que $f_n \longrightarrow f$ simplement. ■

La proposition suivante généralise la proposition precedente au cas d'une application mesurable de signe quelconque.

Proposition 2.3.13 *Soient $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. Il existe alors une suite de fonctions $(f_n)_n$ (mesurables) étagées convergente simplement vers f.*

Démonstration. Les applications f^+ et f^- sont mesurables donc la Proposition 2.3.11 donne l'existence de deux suites croissantes $(h_n)_n$ et $(g_n)_n$ des applications (mesurables) étagées telles que $h_n \longrightarrow f^+$ et $g_n \longrightarrow f^-$ simplement quand $n \longrightarrow +\infty$. On pose $f_n = h_n - g_n$, de sorte que $f_n(x) \longrightarrow f^+(x) - f^-(x) = f(x)$, quand $n \longrightarrow +\infty$, pour tout $x \in X$. D'autre part, $(f_n)_n$ est étagée (voir la Proposition 2.1.3). ■

2.4 Quelques propriétés des applications mesurables.

Proposition 2.4.1 *Soient* $f, g : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *deux applications mesurables et* $a \in \mathbb{R}$. *Alors les parties suivantes*

$$\begin{aligned}
(f = a) &:= \{x \in X : f(x) = a\} \\
(f = g) &:= \{x \in X : f(x) = g(x)\} \\
(f \neq g) &:= \{x \in X : f(x) \neq g(x)\} \\
(f > g) &:= \{x \in X : f(x) > g(x)\}
\end{aligned}$$

sont mesurables, c-à-d appartiennent à $\mathcal{M}$.

Démonstration. On a directement

$$\begin{aligned}
(f = a) &= f^{-1}(\{a\}) \in \mathcal{M} \\
(f = g) &= (f - g)^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{M} \\
(f \neq g) &= (f = g)^c \in \mathcal{M} \\
(f > g) &= (f - g)^{-1}(]0, +\infty[) \in \mathcal{M}
\end{aligned}$$

■

Propriétés vraies presque partout

Définition 2.4.2 *Soit* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré. Une propriétés* $p(x)$ *concernant* $x \in X$ *est dite vraie persque par tout si l'ensemble* $\{x \in X : p(x) \text{ n'est pas vraie}\}$ *est négligeable.*

Exemple 2.4.3 ***(Egalité presque partout)***
Si les fonctions $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *sont égaux presque partout, alors il existe* $A \in \mathcal{M}$ *tel que*

$$(f \neq g) \subset A \quad et \quad \mu(A) = 0$$

donc $f(x) = g(x)$ *pour tout* $x \in A^c$ *et* $\mu(A) = 0$. *On peut remarquer que si* f *et* g *sont mesurables, alors* $(f \neq g) \in \mathcal{M}$ *et donc* $f = g$ *presque partout si et seulement si* $\mu(f \neq g) = 0$.

Théorème 2.4.4 *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré complet et $f, g : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ deux applications telle que f est mesurable et $f = g$ presque par tout. Alors g est mesurable.*

Démonstration. Il existe $A \in \mathcal{M}$ telle que $\mu(A) = 0$ et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A^c$. Soit $a \in \mathbb{R}$, si on pose $(g > a) = g^{-1}(]a, +\infty[)$ on a

$$\begin{aligned}(g > a) &= (g > a) \cap (A \cup A^c) \\ &= [(g > a) \cap A] \cup [(g > a) \cap A^c] \\ &= [(g > a) \cap A] \cup [(f > a) \cap A^c] .\end{aligned}$$

D'une part, puisque f est mesurable on a $(f > a) \cap A^c \in \mathcal{M}$ et d'autre part l'ensemble $(g > a) \cap A$ est négligeable car $(g > a) \cap A \subset A$ et $\mu(A) = 0$. Donc $(g > a) \cap A \in \mathcal{M}$ puisque la mesure μ est complète. On a alors $(g > a) \in \mathcal{M}$, d'où la mesurabilité de g. ■

Exercice corrigé 2.4.5 *Soient $f, g, h : (\Omega, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions quelconques. Montrer que si $f = g$ presque partout et $g = h$ presque partout alors, $f = h$ presque partout.*

Démonstration. Il existe $A, B \in \mathcal{M}$ tels que

$$(f \neq g) \subset A, \ (g \neq h) \subset B \quad \text{et} \quad \mu(A) = \mu(B) = 0.$$

Puisque $(f = g) \cap (g = h) \subset (f = h)$ on a

$$(f \neq h) \subset (f \neq g) \cup (g \neq h) \subset A \cup B$$

et on a $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) = 0$, d'où

$$(f \neq h) \subset A \cup B \quad \text{avec} \quad \mu(A \cup B) = 0.$$

Finalement $f = h$ presque partout. ■

2.5 Convergence p.p et convergence en mesure.

Définition 2.5.1 *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $[0, +\infty]$ une suite de fonctions et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $[0, +\infty]$ une fonction. On dit que la suite $(f_n)_n$ converge presque partout vers f sur X, s'il existe $A \subset X$ négligeable tel que pour tout $x \in A^c$, la suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$. Dans ce cas on écrit $f_n \longrightarrow f$ p.p.*

Remarques 2.5.2 *1) Si les fonctions f_n et f sont mesurables, alors la suite $(f_n)_n$ converge presque par tout vers f si*

$$\mu\left(\left\{x \in X : \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) \neq f(x)\right\}\right) = 0.$$

2) La convergence simple implique la convergence presque partout car si $f_n \longrightarrow f$ simplement on a

$$\mu\left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n \neq f\right) = \mu(\phi) = 0$$

Exemple 2.5.3 *Soit $X = [0, 1]$, $\mathcal{M}$ est la tribu borélienne sur $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue λ et $(f_n)_n$ la suite de fonctions définie par $f_n(x) = (-x)^n$.*
Pour tout $x \in [0, 1[$ on a $\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ et

$$\lambda\left(\left\{x \in [0, 1] : \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) \neq 0\right\}\right) = \lambda(\{1\}) = 0.$$

Donc $f_n \longrightarrow 0$ p.p.

Définition 2.5.4 *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $[0, +\infty]$ une suite de fonctions mesurables et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $[0, +\infty]$ une fonction mesurable. On dit que $(f_n)_n$ converge en mesure vers f si pour tout $\varepsilon > 0$ on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

Remarque 2.5.5 *La convergence presque partout n'entraîne pas la convergence en mesure.*

Exemple 2.5.6 *Soit $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu = \lambda$ la mesure de Lebesgue et $f_n = \chi_{[n,n+1]}$,*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & si\ n \leq x \leq n+1 \\ 0 & si\ x < n\ \ ou\ x > n+1 \end{cases},$$

il existe $n_0 = [x] + 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $f_n(x) = 0$. Alors $(f_n)_n$ converge simplement vers 0 sur X. Ce qui donne $f_n \longrightarrow 0$ p.p.
D'autre part si on pose $\varepsilon = 1$ on a

$$\lambda\left(\{x \in X : |f_n(x) - 0| \geq 1\}\right) = \lambda\left(\left\{x \in X : \chi_{[n,n+1]} \geq 1\right\}\right) = \lambda\left([n, n+1]\right) = 1 \neq 0$$

donc f_n ne tend pas vers 0 en mesure.

Proposition 2.5.7 *[2]*
Dans un espace mesuré fini, la convergence presque partout entraîne la convergence en mesure.

Exercice corrigé 2.5.8 *Soit $X = [0, 1[$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ. Soit la suite $(f_n)_n$ de fonctions définie par $f_n = \chi_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}[}$. Montrer que $f_n \longrightarrow 0$ en mesure, mais que $(f_n)_n$ ne converge pas vesr 0 presque partout.*

Démonstration. Pour tout $\alpha > 0$ on a $\{x \in X : |f_n(x) - 0| \geq \alpha\} \subset [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[$, donc

$$\lambda\left(\{x \in X : |f_n(x) - 0| \geq \alpha\}\right) \leq \lambda\left([\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[\right) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Il s'ensuit que $f_n \longrightarrow 0$ en mesure.
D'autre part $\limsup\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n = 1 \neq \liminf\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n = 0$, alors pour tout $x \in [0, 1[$, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) \neq 0$.
D'où

$$\lambda\left(\left\{x \in X : \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) \neq 0\right\}\right) = \lambda\left([0, 1[\right) = 1 \neq 0,$$

et donc $(f_n)_n$ ne peut converger presque partout vers 0. ■

Proposition 2.5.9 *[5]*
Supposons que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge en mesure vers f. Alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ de $(f_n)_n$ converge vers f presque partout.

Proposition 2.5.10 *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $[0, +\infty]$ une suite de fonctions mesurables et $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $[0, +\infty]$ deux fonctions mesurables. Si $f_n \longrightarrow f$ en mesure et $f_n \longrightarrow g$ en mesure, alors $f = g$ presque partout. C'est-à-dire la limite est unique presque partout.*

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$ on a $|f - g| \leq |f_n - g| + |f_n - f|$. Donc si $k \geq 1$ on obtient

$$\left(|f_n - g| \leq \frac{1}{2k}\right) \cap \left(|f_n - f| \leq \frac{1}{2k}\right) \subset \left(|f - g| \leq \frac{1}{k}\right)$$

et donc par passage au complémentaire,

$$\left(|f - g| > \frac{1}{k}\right) \subset \left(|f_n - g| > \frac{1}{2k}\right) \cup \left(|f_n - f| > \frac{1}{2k}\right)$$

et donc

$$\mu\left(|f - g| > \frac{1}{k}\right) \leq \mu\left(|f_n - g| > \frac{1}{2k}\right) + \mu\left(|f_n - f| > \frac{1}{2k}\right).$$

En faisant tendre n vers l'infini, on trouve $\mu\left(|f - g| > \frac{1}{k}\right) = 0$. Comme

$$(|f - g| \neq 0) = (|f - g| > 0) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(|f - g| > \frac{1}{k}\right)$$

et donc

$$\mu(f \neq g) = \mu(|f - g| \neq 0) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu\left(|f - g| > \frac{1}{k}\right) = 0$$

et en fin $f = g$ presque partout. ■