Université Djilali Bounaama (Khemis Miliana) L3 Mathématiques (2022/2023)
Département de Mathématiques-Informatiques Matière: Mesures et intégrations

Série d'exercices n 01
Tribus et mesures

Exercise 1 *Soit Ω un ensemble et $T \subset P(\Omega)$ un ensemble de parties de Ω.*

1- Montrer que si T est une tribu, alors T est une algèbre d'ensembles.

Exercise 2 *: Soit Ω un ensemble et soit $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω. Montrez que l'ensemble Ω lui-même doit appartenir à $\mathcal{F}$ et que $\mathcal{F}$ est stable par intersection denombrable.*

Exercise 3 *Soit Ω un ensemble.*

1. Montrer qu'une intersection quelconque de tribus sur Ω est une tribu sur Ω.

Exercise 4 *1- Soit $\Omega = \mathbb{Z}$ et $A = \{A \subset \Omega \ / \ A \text{ ou } A^c \text{ est fini}\}$. Montrer que A est une algèbre d'ensembles*

sur Ω mais pas une tribu.
2- L'ensemble des parties finies de Ω est-il une tribu ?

Exercise 5 *Soient A et $B \subset P(E)$ et $\sigma(A)$, $\sigma(B)$ les tribus engendrees par A et B. Montrer que si $A \subset B$ alors*

$\sigma(A) \subset \sigma(B)$.

Exercise 6 *Soit Ω un ensemble et (A_n), $n \in IN$ une suite d'elements de $P(\Omega)$. On pose :*

$$B_n = A_n \cap \left(\cup_{p=1}^{n-1} A_p\right)^c, \text{ avec } B_0 = A_0.$$

Montrer que :

$$\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

et que les B_i sont disjoints deux a deux.
(Cela signifie que toute reunion dénombrable peut s'écrire comme réunion dénombrable de parties deux a deux disjointes. On remarquera aussi que si les A_n sont des élements d'une tribu T , alors les B_n appartiennent aussi a cette tribu.)

Exercise 7 *1- Soit $f : E \to F$ une application et T' est une tribu sur F . Montrer que*

$$f^{-1}(T') = \left\{f^{-1}(B) / B \in T'\right\}$$

est une tribu de E .(image réciproque de la tribu).

2- Si T est une tribu sur E, alors

$$T' = \left\{B \subset F, f^{-1}(B) \in T\right\}$$

est une tribu de F .(tribu image).

Exercise 8 *1. Soit T une tribu sur un ensemble E et $F \subset E$. Montrer que $T_F = \{A \cap F, A \in T\}$ est une tribu sur F (tribu trace de T sur F).*

Exercise 9 *Soit $\Omega = [1, +\infty[$ un ensemble et $F =]0, 1]$.*

Soit $C = \{]0, 1/3],]1/3, 2/3],]2/3, 1]\} \subset P(F)$. Déterminer la tribu engendrée par C.
Soit $f(x) = 1/x$. Déterminer $\sigma(f^{-1}(E))$ et $f^{-1}(\sigma(E))$.
Conclure.

Exercise 10 *(Lemme de transport)*

Soit $f : X \to Y$ et E une partie de parties de Y. Montrer que

$$\sigma\left(f^{-1}(E)\right) = f^{-1}(\sigma(E)).$$

Exercise 11 *Soit (Ω, T) un espace mesurable, $(\mu_i)_{1\leq i\leq n}$, n mesures sur (Ω, T) et $(a_i)_{1\leq i\leq n}$, n réels positifs. Pour A dans T on pose:*

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i(A)$$

Montrer que μ est une mesure sur (Ω, T), notée $\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i$.

Exercise 12 *1) Montrer que μ est une mesure sur (Ω, T), notée $\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i$.*

2) On suppose que les $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des probabilités et on considère une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs tels que $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1$.
Vérifier que $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n\mu_n$ est une probabilité sur (Ω, T).
3) Vérifier que la mesure discrète définie par :

$$\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \delta_{x_n}$$

ou δ_{x_n} est la mesure de Dirac au point x_n, est telle que:

$$\forall A \in T, \quad \mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \chi_A(x_n)$$

Exercise 13 *Soient $E, F \in M_{\mu^*}$ et $A \subset X$. Montrer que*

1) $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E \cap F^c) + \mu^*(A \cap E^c \cap F) + \mu^*(A \cap E^c \cap F^c)$.
2) $\mu^*(A \cap (E \cup F)) = \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E \cap F^c) + \mu^*(A \cap E^c \cap F)$.
3) $\mu^*(A \cap (E \cup F)) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap F)$ .si $E \cap F = \varnothing$

Exercise 14 *Supposons que $A, B \in T$, montrer que les propriétés suivantes sont vérifiées:*

1) $P(A^c) = 1 - P(A)$ ou A^c désigne le complémentaire de A dans Ω .
2) Si $B \subset A$ alors $P(A - B) = P(A) - P(B)$ avec $A - B = A \cap B^c$.
3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exercise 15 *Soit (X, M, μ) un espace mesuré ou μ est une mesure positive telle que $\mu(X) = 1$. On considère*

$$T = \{A \in M, \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1\}$$

Montrer que T est une tribu sur X.

Exercise 16 *Soit X un ensemble et μ une application définie sur $P(X)$ par $\mu(A) = CardA$ si A est fini, $\mu(A) = +\infty$ sinon. Montrer que que μ est une mesure sur $P(X)$.*

Exercise 17 *Soit λ la mesure de Lebesgue sur $B(\mathbb{R})$ et $A \in B(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(A) = 0$. A-t-on nécessairement A fermé ?*

Exercise 18 *Soit X un ensemble non vide et M la tribu engendrée par les parties $\{x\}$ou $x \in X$.*

a. Montrer que $A \in M$ si et seulement si A est d´enombrable ou bien A^c est dénombrable.
b. Si X n'est pas dénombrable, on pose pour $A \in M$.

$$\mu(A) = 0, \text{si } A \text{ est dénombrable,}$$
$$\mu(A) = 1, \text{si } A \text{ n'est pas dénombrable.}$$

Montrer que μ est une mesure positive d´efinie sur M .

Exercise 19 *Soit (E, M, μ) un espace mesuré, (F, N) un espace mesurable et $g : E \to F$ une application mesurable. Pour tout $B \in N$, on pose*

$$\nu(B) = \mu\left(g^{-1}(B)\right).$$

1) Montrer que ν est une mesure sur (F, N). On dit que ν est la mesure image de μ par l'application g.

Exercise 20 *Soit $f_n : X \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables de l'espace mesuré (X, M, μ) vers l'espace mesuré $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$.*

- Montrer que l'ensemble $\{x \in X; \forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \geq 1\}$ appartient à A .