Chapitre 1

Tribus et mesures

1.1 Rappels sur la théorie des ensembles.

Dans toute la suite, on considère un ensemble de base X. On rappelle que $\mathcal{P}(X)$ désigne la famille de tous les sous-ensembles de X. Pour tout sous-ensembles A et B de X on a

$A^c = \{x \in X : x \notin X\}$, le complémentaire de A dans X.

$A \backslash B = \{x \in X : x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap B^c = A \backslash (A \cap B)$

$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

Dénombrabilité

Il est essentiel, pour tout ce qui concerne la théorie de la mesure, de savoir distinguer ce qui est dénombrable de ce qui ne l'est pas.

Définition 1.1.1 *L'ensemble E est dit dénombrable s'il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$. En d'autres termes, on peut écrire*

$$E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x_0, ..., x_n, ...\}$$

C'est-à-dire tout ensemble dénombrable pouvant être indexé par $\mathbb{N}$ (ou si on peut énumérer tous ses éléments).

Remarques 1.1.2 *1) Tout ensemle fini est dénombrable.*

2) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables mais $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

3) Toute partie d'un ensemle dénombrable est dénombrable.

4) Si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble A_n est dénobrable, alors $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ est dénombrable.

5) La propriété 4) reste vrai si l'on remplace la suite d'ensemble $(A_n)_{n \geqslant 1}$ par famille dénombrable $(A_i)_{i \in I}$, c'est-à-dire avec I dénombrable .

6) Tout produit d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

En général, les familles dénombrables ou les propriétés qui s'expriment en termes de dénombrabilité sont notées avec le préfixe σ pour témoigner de leur caractère dénombrable (exemples : σ-algèbre, σ-additivité).

Limites d'ensembles

Définition 1.1.3 *Soit X un ensemble non-vide et $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de parties de X, on définit la limite supérieure et inférieure de la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ par*

$$\begin{aligned}
\overline{\lim} A_n &= \limsup_n A_n := \bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n} A_k = \bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \\
\underline{\lim} A_n &= \liminf_n A_n := \bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant n} A_k = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k
\end{aligned}$$

La notation inf sup et sup inf est à prendre au sens de la relation d'ordre partiel $\subset$ sur les parties de X.

Remarque 1.1.4 *Noter que*

$$\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n \tag{1.1}$$

En effet, $\bigcap_{k\geqslant n} A_k \subset A_k$ pour tout $k \geqslant n$. On a donc $\bigcap_{k\geqslant n} A_k \subset \bigcup_{k\geqslant n} A_k$ pour tout n. On a alors pour tout n

$$\bigcap_{k\geqslant n} A_k \subset \bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n} A_k = \overline{\lim} A_n$$

Finalement,

$$\bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant n} A_k \subset \overline{\lim} A_n$$

C'est à dire l'inclusion (1.1).

Proposition 1.1.5 *[18, Page 5](Suite convergente d'ensembles)*

1) Si $(A_n)_n$ est croissante i.e. $A_n \subset A_{n+1}$, $\forall n \geq 1$, alors

$$\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

2) Si $(A_n)_n$ est décroissante i.e. $A_{n+1} \subset A_n$, $\forall n \geq 1$, alors

$$\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$$

Dans les deux cas on dira que la suite $(A_n)_n$ est convergente.

Pour les suites réelles, rappelons que si $(a_n)_n$ est une suite dans $\mathbb{R}$, on définit

$$\begin{aligned} \limsup_n a_n &= \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} a_k \\ \liminf_n a_n &= \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} a_k \end{aligned}$$

Ces deux nombres existent toujours dans $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

De même si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions d'un ensemble X dans $\mathbb{R}$, $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, on définit $\limsup_n f_n$ et $\liminf_n f_n$ comme fonctions de X dans $\overline{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} \left(\limsup_n f_n\right)(x) &= \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} f_k(x) \\ \left(\liminf_n f_n\right)(x) &= \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} f_k(x) \end{aligned}$$

Fonctions caractéristiques d'ensembles

Rappelons que la fonction caractéristique (ou indicatrice) χ_A d'une partie A de X est la fonction $\chi_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Cette fonction ne prend donc que deux valeurs 1 ou 0 selon qu'elle est évaluée sur A ou non.

La fonction indicatrice vérifie les propriétés suivantes, pour la preuve voir par example [2, Page 22]

Proposition 1.1.6 *Soient X un ensemble non vide et $A, B \subset X$.*

1) Si $A \cap B = \phi$ alors $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$.

2) On a $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$ et si $B \subset A$ alors $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_B$.

3) Si $(A_n)_n$ une suite de parties de X on a alors

$$\chi_{\underline{\lim} A_n} = \liminf_n \chi_{A_n} \quad et \quad \chi_{\overline{\lim} A_n} = \limsup_n \chi_{A_n} \tag{1.2}$$

De plus si les A_n sont disjoints deux à deux, alors $\chi_{\cup A_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{A_n}$

1.2 Algèbres et tribus

Maitenant on va définir un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$, (on dit aussi une famille des parties de X) qu'on appelle tribu sur lequel on pourra définir une mesure comme une application de cette famille dans $[0,+\infty]$ avec certaines conditions.

Définition 1.2.1 *Soit X un ensemble et $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ une famille de parties de X. On dit que $\mathcal{M}$ est une tribu (ou σ-algèbre) sur X, si l'on a les trois propriétés suivantes*
(c1) $\phi \in \mathcal{M}$.
(c2) Si $A \in \mathcal{M}$ alors $A^c \in \mathcal{M}$.
(c3) Si $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de $\mathcal{M}$ alors $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Les éléments de $\mathcal{M}$ sont appelés les parties mesurables de X et on dit que $(X,\mathcal{M})$ est un espace mesurable.

Remarque 1.2.2 *Si $\mathcal{M}$ est une tribu sur X alors,*
(i) $X \in \mathcal{M}$ car $X = \phi^c \in \mathcal{M}$ d'aprés (c1) et (c2) de la définition précédente.
(ii) Si $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de $\mathcal{M}$ alors $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$. En effet, par (c2) et (c3), $A_n \in \mathcal{M}$ implique que

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c\right)^c \in \mathcal{M}.$$

(iii) Si $A, B \in \mathcal{M}$ alors $A \backslash B, A\Delta B \in \mathcal{M}$ car

$$A\backslash B = A \cap B^c \in \mathcal{M} \quad et \quad A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) \in \mathcal{M}.$$

Définition 1.2.3 *On appelle Algébre de parties d'un ensemble X toute famille $\mathcal{A}$ de parties de X vérifiant les propriétés suivantes*
1) $\phi \in \mathcal{A}$
2) Si $A \in \mathcal{A}$ alors $A^c \in \mathcal{A}$
3) Si $A, B \in \mathcal{A}$ alors $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Remarque 1.2.4 *Une tribu est une algèbre d'ensembles stable par réunion dénombrable.*

Exemples 1.2.5 *Soit X un ensemble non vide.*

1) La famille $\mathcal{P}(X)$ de toute les parties de X est la plus grande tribu sur X.

2) La famille $\mathcal{M} = \{\phi, X\}$ est la plus petite tribu sur X.

3) Si X est un ensemble infini alors, la famille $\mathcal{M}$ définie par

$$\mathcal{M} = \{A \subset X,\ A \text{ ou } A^c \text{ est dénombrale}\}$$

est une tribu sur X.

4) Soit $(E_n)_{n \geqslant 1}$ une partition dénombrable de X c-à-d

$$\begin{cases} E_n \cap E_m, \text{ pour tout } m \neq n, \\ X = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n \end{cases}$$

Alors

$$\mathcal{M} = \left\{ A \subset X,\ A = \bigcup_{i \in I} E_i,\ I \subset \mathbb{N}^* \right\}$$

est une tribu sur X, dite engendrée par la partition $(E_n)_{n \geqslant 1}$, comme on le vérifiera à titre d'exercice.

5) Si X est un ensemble infini. La famille $\mathcal{A}$ définie par

$$\mathcal{A} = \{A \subset X,\ A \text{ ou } A^c \text{ fini}\}$$

n'est pas une tribu sur X bien que ce soit une algèbre de parties de X.

Proposition 1.2.6 *Si l'algèbre $\mathcal{A}$ vérifiée la propriété*

$$(B_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A},\ (B_n)_{n \geq 1} \text{ est croissante } \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$$

alors $\mathcal{A}$ est une tribu sur X.

Démonstration. Soit $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$ une suite de parties de X. Si on pose $B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$, la suite $(B_n)_{n \geq 1}$ est croissante donc $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$. D'autre part il est clair que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, d'où $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ ■

Proposition 1.2.7 *$\mathcal{M}$ est une tribu sur X si, et seulement si*

(1) $\phi \in \mathcal{M}$.

(2) $\mathcal{M}$ stable par complémentation et intersection finie.

(3) Si $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de $\mathcal{M}$ disjoints deux à deux (i.e. $A_i \cap A_j = \phi$, $\forall i \neq j$), alors $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Démonstration. La condition nécessaire est évidente. Pour montrer qu'elle est suffisante, il suffit de montrer que $\mathcal{M}$ est stable par réunion dénombrable, soit donc $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de $\mathcal{M}$ et posons

$$\begin{cases} B_1 = A_1 \\ B_n = A_n \cap \left(\overset{n-1}{\underset{i=1}{\cup}} A_i\right)^C, \quad n \geq 2 \end{cases} \tag{1.3}$$

d'aprés l'hypothèse (2) de la proposition on a $B_n \in \mathcal{M}$ pour tout $n \geq 1$. Pour tout $n \neq m$, si $n > m$ on a

$$B_m \cap B_n \subset A_m \cap B_n = A_m \cap \left(A_n \cap A_1^c \cap ... \cap A_m^c \cap ... \cap A_{n-1}^c\right) = \phi$$

d'où $B_m \cap B_n = \phi$, $\forall n \neq m$. D'autre part, il est clair que $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} B_n \subset \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$. Pour l'inclusion inverse, si $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$, il existe $n \geq 1$ tel que $x \in A_n$. On pose r la plus petite $n \geq 1$ qui vérifie $x \in A_n$ i.e.

$$r = \min\{n \in \mathbb{N}, x \in A_n\}$$

alors $x \in A_r, x \notin A_{r-1}, x \notin A_{r-2}, ...$et $x \notin A_1$ ce qui donne $x \in B_r$, alors $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} B_n$. Nous avons montré que les B_n sont disjoints deux à deux et $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} B_n$ donc d'après l'hypothèse (3) de la proposition, on a $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$. ■

Lemme 1.2.8 *Soit $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de tribus sur X. Alors $\bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{M}_i$ st encore une tribu sur X.*

Démonstration. La vérification est immédiate. ■

Définition 1.2.9 *Soit $\mathcal{S}$ une famille de parties de X. On note $\sigma(\mathcal{S})$ l'intersection de toutes les tribus $\mathcal{M}$ contenant $\mathcal{S}$. Alors, $\sigma(\mathcal{S})$ est une tribu sur X appelée tribu engendrée par $\mathcal{S}$. C'est la plus petite tribu sur X qui contient $\mathcal{S}$.*

En pratique, pour montrer qu'une tribu $\mathcal{M}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{S}$ il suffit de montrer que toute tribu contenant $\mathcal{S}$ contient $\mathcal{M}$.

Tribu borélienne ou tribu de Borel

Rappelons que, si X est un espace topologique (métrique), sa topologie $\mathcal{O}$ est l'ensemble de ses ouverts. La famille de parties $\mathcal{O}$ n'est pas une tribu (sauf cas très partiuculiers), par example, si $X = \mathbb{R}$ on a $\left]-\frac{1}{n}, 1\right[\in \mathcal{O}$ pour tout $n \geq 1$ mais $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-\frac{1}{n}, 1\right[= [0, 1[\notin \mathcal{O}$. De même le complémentaire d'un ouvert, c-à-d un fermé, n'est pas en général un ouvert. On est donc amené à définir les ensembles mesurables comme éléments d'une tribu contenant $\mathcal{O}$.

Définition 1.2.10 *La tribu borélienne d'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est $\sigma(\mathcal{O})$, la tribu engendrée par $\mathcal{O}$. On la note $\mathcal{B}(X)$. Un borélien est un ensemble mesurable $A \in \mathcal{B}(X)$.*

Proposition 1.2.11 *La tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$ est aussi engendrée par les fermés de l'espace topologique X.*

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ la famille de tous les fermés de X. Comme les tribus sont stables par passage au complémentaire et que les fermés sont les complémentaires des ouverts on a $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(X)$ et alors $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{B}(X)$. Inversement, soit $\theta \in \mathcal{O}$ un ouvert de X, alors $\theta^c \in \mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{F})$ donc $\theta \in \sigma(\mathcal{F})$. Ce qui montre que $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{F})$ et puisque $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{O})$ on a $\mathcal{B}(X) \subset \sigma(\mathcal{F})$. ■

Lemme 1.2.12 *Tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles $]a, b[$.*

Démonstration. Soit θ un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Posons la partie $A \subset \mathbb{Q}^2$ définie par

$$A = \left\{(p,q) \in \mathbb{Q}^2,\ p < q :]p,q[\, \subset \theta\right\}.$$

Si $x \in \theta$, il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que $]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x[\, \subset \theta$. Par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ en peut prendre $p_x, q_x \in \mathbb{Q}$ vérifiant

$$x - \varepsilon_x \leq p_x \leq x \quad \text{et} \quad x \leq q_x \leq x + \varepsilon_x$$

il résulte que

$$x \in\,]p_x, q_x[\, \subset\,]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x[\, \subset \theta,$$

d'où $p_x, q_x \in A$, donc

$$x \in\,]p_x, q_x[\, \subset \bigcup_{(p,q)\in A}]p,q[\,,$$

c'est-à-dire $\theta \subset \bigcup_{(p,q)\in A}]p,q[\,$. Inversement, si $x \in \bigcup_{(p,q)\in A}]p,q[\,$, il existe $p_x, q_x \in A$ avec $x \in\,]p_x, q_x[\, \subset \theta$ d'où $x \in \theta$. On en déduit

$$\theta = \bigcup_{(p,q)\in A}]p,q[\,.$$

Cette réunion est dénombrable car la partie $A \subset \mathbb{Q}^2$ est dénombrable. ■

Théorème 1.2.13 *(La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$)*

La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendreé par les intervalles $]a, +\infty[$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Soient $\mathcal{S} = \{]a, +\infty[\,,\ a \in \mathbb{R}\}$ la famille de toute les intervalles $]a, +\infty[$ et $\mathcal{O}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$. Il est clair que $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$ alors $\sigma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car par définition on a $\sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Maintenant, montrons que $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{S})$, soit $\theta \in \mathcal{O}$ alors, d'aprés le lemme précèdent, θ est une réunion dénombrable d'intervalles de la forme $]a, b[$ c-à-d $\theta = \bigcup_{n=1}^{+\infty}]a_n, b_n[\,$. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ on a

$$]a,b[\, = \,]-\infty, b[\, \cap\,]a, +\infty[\quad \text{et} \quad [b, +\infty[= \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]b - \tfrac{1}{n}, +\infty\right[.$$

Pour tout $n \geq 1$ on a $\left]b - \frac{1}{n}, +\infty\right[\in \mathcal{S} \subset \sigma(\mathcal{S})$ donc la stabilité par intérsection garantit que $[b, +\infty[\in \sigma(\mathcal{S})$ et par complémentaire,

$$]-\infty, b[= ([b, +\infty[)^c \in \sigma(\mathcal{S})$$

et $]a, +\infty[\in \mathcal{S} \subset \sigma(\mathcal{S})$ ce qui donne $]a, b[\in \sigma(\mathcal{S})$. Alors, $\theta = \bigcup_{n=1}^{+\infty}]a_n, b_n[\in \sigma(\mathcal{S})$. Finalement on obtient l'inclusion $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{S})$ ce qui implique que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathcal{S})$. ■

1.3 Mesures positives.

Définition 1.3.1 *Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable, une mesure positive sur $(X, \mathcal{M})$ (ou, plus simplement, sur X) est une application d'ensembles $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ vérifiant les propriétés suivantes*

(c1) $\mu(\phi) = 0$.

(c2) Pour toute suite $(A_n)_{n \geqslant 1} \subset \mathcal{M}$ de parties mesurables deux-à-deux disjointes, on a

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

On dit que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace mesuré.

Commentaires

- La condition (c2) s'appelle la propriété de σ-additivité de la mesure.
- On dira souvent "mesure" au lieu de "mesure positive".
- On admettra $+\infty$ comme valeur possible, $\mathbb{R}$ est de longueur infinie.

Remarques 1.3.2 *1) Dans la définition précédente, la condition (c1) peut être remplacée par la condition*

$$\exists A \in \mathcal{M} : \mu(A) < \infty, \text{ (i.e. } \mu(A) \text{ est finie).}$$

2) La σ-additivité contient, en particulier, la propriété d'additivité simple : pour tout $n \geq 1$, si les n ensemble mesurables, $A_1, \ldots, A_n$ sont deux-à-deux disjointes alors

$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n),$$

il suffit de prendre $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \phi$.

Définition 1.3.3 *Soient X un ensemble et $\mathcal{M}$ une tribu sur X. On appelle probabilité une mesure $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{M}$ telle que $\mathbb{P}(X) = 1$.*
On dit que $(X, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et les éléments de $\mathcal{M}$ sont appelés les événements.

Exemples 1.3.4 *1)* ***Mesure de comptage.*** *Sur $(X, \mathcal{P}(X))$, on définit la mesure de comptage par*

$$\begin{cases} \mu(A) = card(A), & si\ A\ est\ fini \\ \mu(A) = \infty, & sinon \end{cases}$$

2) ***Mesure de Dirac en un point.*** *Soit X un ensemble et $x_0 \in X$ un point de X. Pour tout sous-ensemble A de X, la mesure δ_{x_0} de Dirac (sur $\mathcal{P}(X)$) au point x_0 est définie par*

$$\begin{cases} \delta_{x_0}(A) = 1, & si\ x_0 \in A \\ \delta_{x_0}(A) = 0, & si\ x_0 \notin A \end{cases}$$

On peut remarquer que la mesure de Dirac est une probabilité.
3) ***Mesures discrètes.*** *Soit X un ensemble, $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de points de X et $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs. Pour toute partie A de X on pose*

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n . \delta_{a_n}(A) = \sum_{n=1, a_n \in A}^{\infty} \alpha_n$$

On définit ainsi une mesure positive sur $\mathcal{P}(X)$ que l'on note

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n . \delta_{a_n}.$$

Proposition 1.3.5 *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. La mesure μ possède les propriétés suivantes*
1) ***(La monotonie).*** *Si $A, B \in \mathcal{M}$ avec $A \subset B$ alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

2) Si $A, B \in \mathcal{M}$ avec $A \subset B$ et $\mu(A) < \infty$ alors $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

*3) **(La sous-additivité).** Pour toute suite $(A_n)_{n \geqslant 1}$ dans $\mathcal{M}$ on a*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Démonstration. 1) Si $A, B \in \mathcal{M}$ avec $A \subset B$ alors $B = A \cup (B \backslash A)$, puisque $A \cap (B \backslash A) = \phi$, par l'additivité de la mesure on a

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \geq \mu(A).$$

2) Si de plus $\mu(A) < \infty$ alors $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

3) A partir de la suite $(A_n)_{n \geqslant 1}$, on construit la suite $(B_n)_{n \geqslant 1}$ définie par (1.3). On a $B_n \subset A_n$ pour tout $n \geqslant 1$, les B_n sont disjoints deux à deux dans $\mathcal{M}$ et $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$ (voir la preuve de la Proposition 1.2.7). La monotonie de la mesure donne $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$ pour tout $n \geqslant 1$. D'autre part, d'après la σ-additivité de la mesure on a

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

■

Définition 1.3.6 *On dit qu'une mesure positive μ est finie si elle est à valeurs finies c-à-d*

$$\mu(A) < \infty \text{ pour tout } A \in \mathcal{M}$$

Autrement dit, $\mu(X) < \infty$.

Définition 1.3.7 *Soit μ une mesure sur $(X, \mathcal{M})$. On dit qu'elle est σ-finie s'il existe une suite de parties mesurables $(E_n)_{n \geqslant 1}$ telle que $X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ et $\mu(E_n) < \infty$ pour tout $n \geqslant 1$.*

Exemples 1.3.8 *1) La mesure de Direc δ_x est finie car $\delta_x(X) = 1 < \infty$.*

2) La mesure de compage sur X est :

i) finie si et seulement si X est fini

ii) σ-finie si et seulement si X est dénombrable.

1.4 Propriétés des mesures, mesures extérieures, mesures complètes.

La propiété de la continuité de la mesure sera à la base d'un des théorèmes les plus importants et l'un des plus utilisés pour l'intégrale de Lebesgue et le théorème de convergence monotone.

Théorème 1.4.1 *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, alors*
1) ***La continuité croissante.*** *Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de parties mesurables, on a*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n)$$

2) ***La continuité décroissante.*** *Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante de parties mesurables avec*

$$\mu(A_1) < \infty, \tag{1.4}$$

alors, on a

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n)$$

Démonstration. 1) Posons

$$\begin{cases} B_1 = A_1 \\ B_n = A_n \backslash A_{n-1}, \text{ pour } n \geq 2 \end{cases}$$

les ensembles B_n sont mesurables et $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ pour tout $n \geq 1$, ce qui implique que $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. De plus, les B_n, $n \geq 1$, sont deux-à-deux disjoints, donc

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

2) Pour tout $n \geq 1$ posons $B_n = A_1 \backslash A_n = A_1 \cap A_n^c$. Comme la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ est croissante, en utilisant 1)

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(B_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n),$$

d'autre part on a

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = A_1 \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c\right) = A_1 \backslash \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

il résulte que

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n) = \mu(A_1) - \mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n).$$

En fin, on peut simplifier par $\mu(A_1)$ puisque cette dernière quantité est finie,

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n)$$

■

La condition $\mu(A_1) < \infty$ dans 2) du théorème précédent est nécessaire comme le montre l'exemple suivant.

Exercice corrigé 1.4.2 *Considérons l'espace mesuré* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), card)$ *et la suite des parties mesurables* $(A_n)_{n\geq 1}$ *telle que*

$$A_n = \{n, n+1, n+2, ...\}$$

pour montrer que la condition (1.4) est nécessaire pour la continuité décroissante de la mesure.

Démonstration. La suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est décroissante,

$$A_{n+1} = \{n+1, n+2, n+3...\} \subset A_n = \{n, n+1, n+2, ...\}$$

et

$$\mu(A_1) = card(\{1, 2, ...\}) = +\infty.$$

Si $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ alors $x \geq n$ pour tout $n \geq 1$. D'où $\mathbb{N}$ est borné, ce qui est une contradiction. Donc

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \phi.$$

D'autre part

$$0 = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \neq \lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} card(\{n, n+1, n+2, ...\}) = +\infty$$

■

Exercice corrigé 1.4.3 *Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable. Montrer que toute fonction additive définie sur $\mathcal{M}$ à valeur dans $[0, +\infty]$ satisfaisant la continuité croissante est une mesure.*

Démonstration. i) $\mu(\phi) = \mu(\phi \cup \phi) = \mu(\phi) + \mu(\phi)$ alors $\mu(\phi) = 0$.
ii) Il s'agit de vérifier la σ-additivité. Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite de $\mathcal{M}$ disjoints deux à deux. Posons $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Cette suite est croissante et de plus on a $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. La continuité croissante et l'additivité de la mesure μ donne

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(B_n) \\ &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

■

Ensemble négligeable et mesure complétes

Définition 1.4.4 *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $N \subset X$. L'ensemble N est dit négligeable dans $(X, \mathcal{M}, \mu)$ s'il existe $E \in \mathcal{M}$ tel que $N \subset E$ et $\mu(E) = 0$.*

Remarque 1.4.5 *Si $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite de parties négligeables dans $(X, \mathcal{M}, \mu)$ alors $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ est négligeable. En effet, pour tout $n \geq 1$ il existe $E_n \in \mathcal{M}$ tel que $A_n \subset E_n$ et $\mu(E_n) = 0$.*

Or
$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \quad et \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0.$$
Donc $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ *est négligeable.*

Définition 1.4.6 *Un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est dit complet si toute partie négligeable est mesurable (et donc de mesure nulle). Dans ce cas on dit que la mesure μ est compléte.*

Mesures extérieurs

Définition 1.4.7 *Soit X un ensemble quelconque. On appelle mesure extérieure sur X une application $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ possédant les propriétés suivantes*
i) $\mu^*(\phi) = 0$
ii) si $A \subset B \subset X$ alors $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
iii) Pour toute suite $(A_n)_n$ de parties de X on a
$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Remarque 1.4.8 *Il est clair que toute mesure positive sur $(X, \mathcal{P}(X))$ est une mesure extérieure sur X. Mais la réceproque n'est pas vraie en générale, comme le montre l'exemple suivant*

Exemple 1.4.9 *Soit X un ensemble non-vide. L'application $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \{0, 1\}$ définie par $\mu^*(\phi) = 0$ et $\mu^*(A) = 1$, si $A \neq \phi$ est une mesure extérieure sur X.*
De plus si card$(X) > 1$, l'application μ^* n'est pas une mesure positive sur $(X, \mathcal{P}(X))$.

Démonstration. Soit $A, B \in \mathcal{P}(X)$ avec $A \subset B$. Si $A = \phi$ alors $\mu^*(A) = 0 \leq \mu^*(B)$. Si $A \neq \phi$ alors $B \neq \phi$ et donc $\mu^*(A) = 1 = \mu^*(B)$.
Soit maintenant $(A_n)_n$ une suite de parties de X. Si tous les A_n sont vides on a
$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \mu^*(\phi) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Pour le contraire, s'il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $A_j \neq \phi$ on a $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \neq \phi$ et alors

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = 1 = \mu^*(A_j) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

ce que signifie que μ^* est une mesure extérieure sur X.

Du fait que $card(X) > 1$, on peut choisir $a, b \in X$ avec $a \neq b$. On pose $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$. Dans ce cas μ^* n'est pas additive car

$$\mu^*(A \cup B) = 1 \neq \mu^*(A) + \mu^*(B) = 2$$

Alors μ^* n'est pas une mesure positive sur $(X, \mathcal{P}(X))$. ■

Proposition 1.4.10 *Toute mesure extérieure additive sur X est une mesure positive sur $(X, \mathcal{P}(X))$.*

Démonstration. Il s'agit de vérifier la σ-additivité. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{P}(X)$ disjoints deux à deux. Tout d'abord remarquons que $\bigcup_{n=1}^{p} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ pour tout $p \geq 1$. D'aprés l'hypothèse de l'additivité et (ii) de la Définition 1.4.7 on a

$$\sum_{n=1}^{p} \mu^*(A_n) = \mu^*(\bigcup_{n=1}^{p} A_n) \leq \mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n).$$

Par le passage à la limite quand $p \longrightarrow +\infty$ on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) \leq \mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n).$$

Cette dernière inégalité et (iii) de la Définition 1.4.7 donnent la σ-additivité de μ^*. ■

Définition 1.4.11 *Soit X un ensemble non-vide et soit μ^* une mesure extérieure sur X. Une partie E de X est dite μ^*-mesurable si pour tout $A \subset X$ on a*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \tag{1.5}$$

On dit aussi que E est mesurable au sens de Carathéodory (par rapport à μ^*).

On note $\mathcal{M}(\mu^*)$ la famille des parties μ^*-mesurable de X.

Remarques 1.4.12 *1) La mesurabilité de E ne fait pas intervenir $\mu^*(E)$ mais $\mu^*(A)$ où A est appelée ensemble test.*
2) Pour tout $A \subset X$ on peut écrire

$$A = A \cap (E \cup E^c) = (A \cap E) \cup (A \cap E^c),$$

par la sous-additivité de la mesure extérieure (iii dans la Définition 1.4.7) on a toujours

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Alors pour montrer qu'une partie $E \subset X$ est μ^*-mesurable, il suffit de montrer que

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \tag{1.6}$$

pour tout $A \subset X$.

Exemples 1.4.13 *Soit X un ensemble non-vide*
1) X et ϕ sont μ^*-mesurables pour toute mesure extérieure.
2) Si μ^* est une mesure extérieure sur X et $E \subset X$ tel que $\mu^*(E) = 0$, alors E est μ^*-mesurable.

Démonstration. 2) Il suffit de montrer que (1.6) est vrai pour tout $A \subset X$. D'aprés les inclusions $A \cap E \subset E$ et $A \cap E^c \subset A$ on a $\mu^*(A \cap E) \leq \mu^*(E) = 0$ et $\mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A)$, ce qui implique que

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) = \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A).$$

■

Théorème 1.4.14 *Soit μ^* une mesure extérieure sur un ensemble non-vide X. Alors $\mathcal{M}(\mu^*)$ est une tribu sur X et la restriction de μ^* à $\mathcal{M}(\mu^*)$ est une mesure.*

Démonstration. $\phi, X \in \mathcal{M}(\mu^*)$, par l'Exemple 1.4.13. De façon immédiate, à partir de l'équation (1.5) on a $E \in \mathcal{M}(\mu^*)$ si et seulement si $E^c \in \mathcal{M}(\mu^*)$. Il reste donc à voir que $\mathcal{M}(\mu^*)$ est stable par réunion dénombrable. Commençons par l'établir pour une réunion finie. Soient $E_1, E_2 \in \mathcal{M}(\mu^*)$, pour tout $A \subset X$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c) \tag{1.7}$$

On teste la μ^*-mesurablité de E_2 par l'ensemble $A \cap E_1^c$

$$\mu^*(A \cap E_1^c) = \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c). \tag{1.8}$$

En portant (1.8) dans (1.7)

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c). \\ &\geq \mu^*\left[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2)\right] + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c). \end{aligned}$$

Mais

$$(A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2) = A \cap [E_1 \cup (E_2 \backslash E_1)] = A \cap (E_1 \cup E_2),$$

et aussi

$$A \cap E_1^c \cap E_2^c = A \cap (E_1 \cup E_2)^c.$$

Finalement on obtient

$$\mu^*(A) \geq \mu^*\left[A \cap (E_1 \cup E_2)\right] + \mu^*\left[A \cap (E_1 \cup E_2)^c\right],$$

d'où $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}(\mu^*)$.

Pour terminer la preuve de que $\mathcal{M}(\mu^*)$ est une tribu, montrons la stabilité par rapport à la réunion dénombrable. Considérons une famille $(E_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{M}(\mu^*)$ deux à deux disjoints (si $(A_n)_{n \geqslant 1}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{M}(\mu^*)$, on peut toujours écrire $\cup_{n \geqslant 1} A_n = \cup_{n \geqslant 1} E_n$, avec les éléments E_n deux à deux disjoints. Voir la preuve de la Proposition 1.2.7). Pour tout $n \geqslant 1$, posons $F_n = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} E_k$ et montrons par récurrence sur

n que pour tout partie $A \subset X$ on a

$$\mu^*(A \cap F_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k). \tag{1.9}$$

La propriété est vraie au rang $n = 1$ et si l'on suppose qu'elle est vraie au rang n. Puisque $F_n \in \mathcal{M}(\mu^*)$ est une réunion finie des éléments dans $\mathcal{M}(\mu^*)$, on teste sa mesurbilité par $A \cap F_{n+1}$,

$$\mu^*(A \cap F_{n+1}) = \mu^*(A \cap F_{n+1} \cap F_n) + \mu^*(A \cap F_{n+1} \cap F_n^c), \tag{1.10}$$

d'autre part le fait que $F_{n+1} \cap F_n = F_n$ et $F_{n+1} \cap F_n^c = E_{n+1}$, l'égalité (1.10) donne

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap F_{n+1}) &= \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap E_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap E_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \mu^*(A \cap E_k). \end{aligned}$$

Maintenant si on pose $F = \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k$ on a $A \cap F \supset A \cap F_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Donc d'aprés la monotonie de la mesure extérieure et (1.9) on a

$$\mu^*(A \cap F) \geq \mu^*(A \cap F_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k)$$

En prenant la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on trouve

$$\mu^*(A \cap F) \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^*(A \cap E_k)$$

Inversement, par (iii) de la Définition 1.4.7,

$$\mu^*(A \cap F) = \mu^* \left[\bigcup_{k=1}^{+\infty} (A \cap E_k) \right] \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^*(A \cap E_k),$$

d'où pour tout partie $A \subset X$,

$$\mu^*(A \cap F) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^*(A \cap E_k). \tag{1.11}$$

On a $F_n^c \supset F^c$ pour tout $n \geqslant 1$ et

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap F_n^c) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap F_n^c) \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap F^c),
\end{aligned}$$

par le passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ et par (1.11),

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap F^c)$$

donc $F = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} E_k \in \mathcal{M}(\mu^*)$.

La σ-additivité de μ^* sur $\mathcal{M}(\mu^*)$ résulte de la formule (1.11) en prenant pour ensemble test $A = X$. ■

1.5 Mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens.

Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Théorème 1.5.1 *[13]*
Il existe une unique mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, notée λ, telle que

$$\lambda(]a, b[) = b - a$$

pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

On l'appelle la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Remarques 1.5.2 *1) Il est clair que la mesure λ est σ-finie puisque*

$$\lambda([-n, n]) = 2n < +\infty \quad \textit{et} \quad \mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [-n, n]$$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\lambda(\{x\}) = 0$ et par conséquent

$$\lambda(]a,b[) = \lambda(]a,b]) = \lambda([a,b[) = \lambda([a,b]) = b - a.$$

En effet, $\{x\} = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$, donc par la continuité décroissante, (2) dans le Théorème 1.4.1, on a

$$\lambda(\{x\}) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \lambda(]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$$

On en déduit immédiatement que

Proposition 1.5.3 *Tout ensemble dénombrable D de $\mathbb{R}$ possède une mesure de Lebesgue nulle, $\lambda(D) = 0$.*

Démonstration. Puisque $D = \bigcup\limits_{n=1, x_n \in \mathbb{R}}^{+\infty} \{x_n\}$, nous avons

$$\lambda(D) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(\{x_n\}) = 0$$

ce qui implique que $\lambda(D) = 0$. ■

La mesure de Lebesgue possède des propriétés importantes.

Proposition 1.5.4 *[4]La mesure de Lebesgue λ est invariante par translation et invariante par symétrie. C'est-à-dire pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a*

$$\lambda(\alpha + A) = \lambda(A) \quad et \quad \lambda(-A) = \lambda(A)$$

pour tout borélien A de $\mathbb{R}$, où $\alpha + A = \{a + \alpha,\ a \in A\}$ et $-A = \{-a,\ a \in A\}$.

Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$.

Rappelons que un pavé P de $\mathbb{R}^m$ est un produit d'intervalles bornés $P = I_1 \times ... \times I_m$, où $I_j \subset \mathbb{R}$ $(j = 1, ..., m)$ est intervalle borné. La mesure du pavé P est donnée par

$$m(P) = |I_1| \times ... \times |I_m|,$$

où $|I_j|$ est la longueur du segment I_j.