Propagation des Les ondes Hertziennes

Mail: r.abdelkader@univ-dbkm.dz

Dr. Abdelkader Rabah Mail: r.abdelkader@univ-dbkm.dz Programmation orientée objets en C++

Les ondes hertziennes

Les ondes hertziennes (ondes radio), font partie du spectre électromagnétique et sont utilisées pour les communications sans fil, telles que la radio, la télévision, le Wi-Fi, les téléphones mobiles, etc.

Ces ondes se propagent dans l'espace à une vitesse égale à la vitesse de la lumière (*c*).

Une onde radio (ou radiofréquence) est classée en fonction de sa fréquence exprimée en Hz ou cycle par seconde ; l'ensemble de ces fréquences constitue le spectre radiofréquence. Le spectre est divisé conventionnellement en bandes, dont les appellations internationales sont normalisées.

sont des ondes électromagnétiques dont la fréquence est par convention inférieure à 300 GHz, se propagent de deux façons :

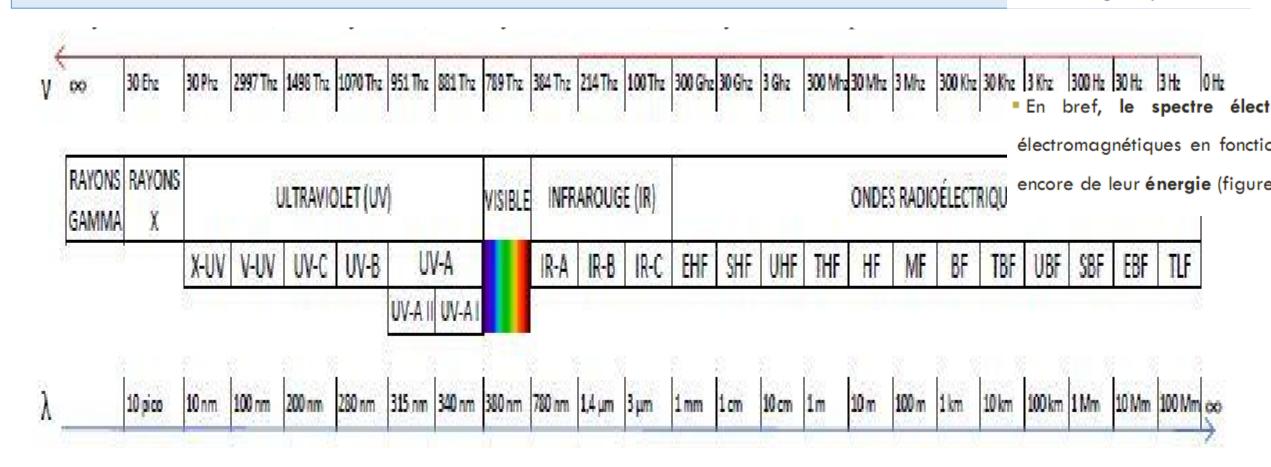
- dans l'espace libre (propagation libre, autour de la Terre par exemple)
- dans des lignes (propagation guidée, dans un câble coaxial, un guide d'onde, fibre optique,.....)

Spectre des ondes électromagnétiques :

Le spectre des ondes électromagnétique est divisé en plusieurs groupes suivant les domaines de fréque Les ondes électromagnétique d'onde:

Les ondes radioélectriques (ondes hertziennes), Les rayons infrarouges, Les rayons visibles (lumière v ultraviolets, Les rayons X, Les rayons Gamma, Les rayons cosmiques

peut répertorier par **ban** électromagnétique.

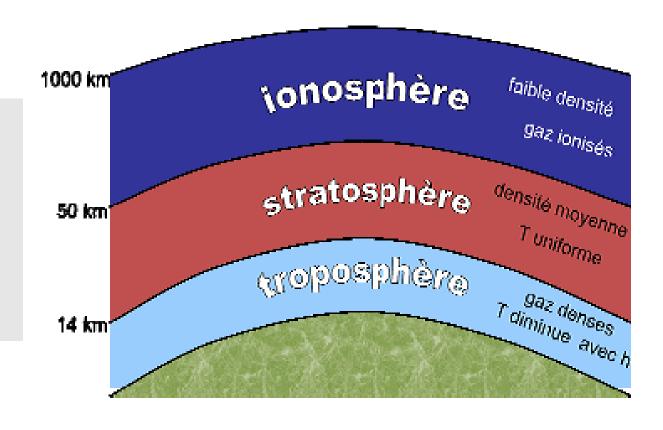


Les ondes hertziennes sont utilisées en communication et elles sont aussi divisées en groupe (VLF, LF, MF, HF, VHF, UHF, SHF, EHF)

Désignation international	Désignation francophone	Fréquence	Longueur d'onde	Autres appellations	Exemples d'utilisation
ELF (extre	EBF	3 Hz à 30 Hz	100 000 km à		Détection de phénomènes
mely low	(extrêmem	3 п2 а 30 п2	10 000 km		naturels
SLF (super	SBF (super	30 Hz à 300 Hz	10 000 km à 1		Communication avec les sous-
low	basse	30 112 a 300 112	000 km		marins
ULF (ultra	UBF (ultra	300 Hz à 3 000	1 000 km à 10		Détection de phénomènes
low	basse	Hz	0 km		naturels
VLF (very	TBF (très	3 kHz à 30 kHz	100 km à 10 k	ondes	Communication avec les sous-
low	basse		m	myriamétriques	marins, Implants médicaux,
LF (low	BF (basse	30 kHz à 300 k	10 km à 1 km	grandes ondes ou	Radionavigation, Radiodiffusio
frequency)	fréquence)	Hz	10 Kill a 1 Kill	ondes longues ou	n GO, Radio-identification
MF (medi	MF	300 kHz à 3 M	1 km à 100 m	petites ondes ou	Radio AM, Service
<u>um</u>	(moyenne	Hz		ondes moyennes ou	maritime, Appareil de
HF (high	HF (haute	3 MHz à 30 M	100 m à 10 m	ondes courtes ou	Organisations Organisations Organisations Organisations
frequency)	fréquence)	Hz		décamétriques	diverses, Militaire, Radiodiffusi
VHF (very	THF (très	30 MHz à 300	10 m à 1 m	ondes ultra-courtes	Radio
<u>high</u>	haute	MHz		ou métriques	FM, Aéronautique, Maritime, R
UHF (ultra	UHF (ultra	300 MHz à 3 G	1 m à 10 cm	ondes décimétriques	Réseaux
<mark>high</mark>	<u>haute</u>	Hz			privés, militaire, GSM, GPS, W
SHF (supe	SHF (super	3 GHz à 30 GH	10 cm à 1 cm	ondes	Réseaux privés, Wi-Fi, Micro-
r high	haute	Z		centimétriques	onde, Radiodiffusion par
EHF (extre	EHF	30 GHz à 300	1cm à 1 mm	ondes	Réseaux privés, Radars
mely high	(extrêmem	GHz	Telli a i iiilii	millimétriques	anticollision pour automobiles,
Térahertz	Térahertz	300 GHz à 3 00	1 mm à 100 μ	ondes	

l'atmosphère se compose de:

- La troposphère
- La stratosphère
- L'ionosphère



Chaque couche possède des propriétés spécifiques propres.

Mode de propagation d'ondes hertziennes

Les ondes électromagnétiques utilisées en radio communication se propagent au dessus du sol dans l'atmosphère.

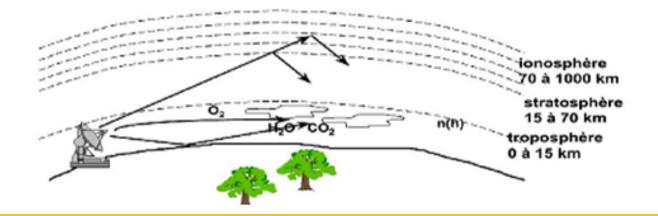


Il est donc nécessaire de connaître les propriétés de ces deux milieux pour étudier cette propagation.

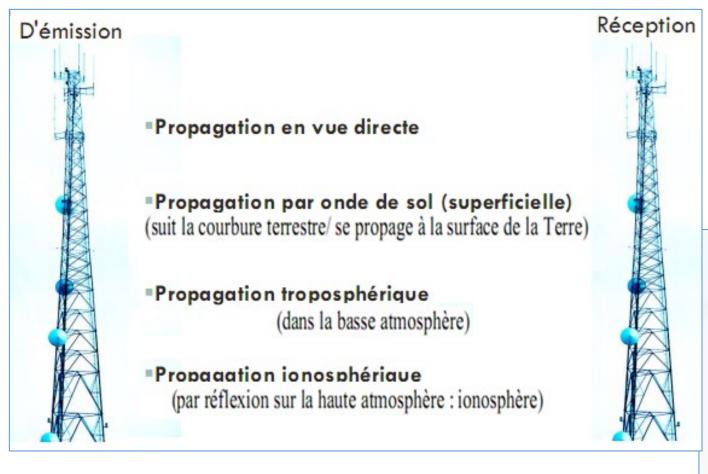
Le sol intervient : Par son relief, sa conductibilité et son constant diélectrique.

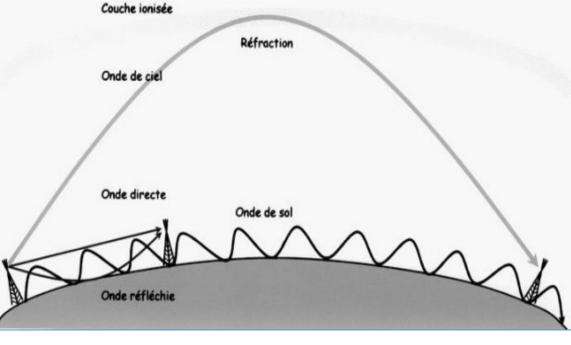
L'atmosphère qui se compose d'un troposphère, stratosphère et l'ionosphère intervient par la variation de sa constante diélectrique (variation de l'indice de réfraction de l'air en fonction de l'altitude) et de la densité d'ionisation de ses régions les plus élevées.

Elle intervient par l'atténuation consécutive à l'absorption par les gazes et la vapeur d'eau ou même par la pluie.



Mode de propagation d'ondes hertziennes





Propagation en vue directe:

- Les antennes de l'émetteur et le récepteur sont en vue directe, sans obstacles,
- Les ondes se propagent quasiment en ligne droite.
- La propagation en vue directe concerne toutes les fréquences du spectre.
- Exemples: Toutes les communications à courte distance, les communications entre avions et centre de contrôle.

Propagation par onde de sol (superficielle) :

- Les antennes de l'émetteur et du récepteur sont situées au niveau du sol, les ondes suivent la courbure de la terre.
- La propagation par onde de sol concerne les fréquences du spectre radioélectrique inférieur à 2.000 kHz.
- Exemples: Les émissions en Grandes Ondes jusqu'à 2.000 km et les émissions en Petites Ondes jusqu'à 300 km.
- Les ondes de surface sont des ondes qui se propagent le long du sol. Une partie de l'énergie de l'onde est absorbée par le sol.
- de la Terre et leurs portées (à puissance émise constante) dépendent essentiellement de trois paramètres: de la nature du sol, en particulier de sa conductivité, de la fréquence, de la puissance émise.

Influence du sol

Le sol est considéré comme un milieu dissipatif étant donné que sa conductivité σ provoque la dissipation d'énergie électromagnétique par effet joule causant l'atténuation de l'onde.

Dans ce cas, sa constante diélectrique devient complexe :

$$\varepsilon_s = \varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega}$$

Où : ε_s : Constante diélectrique complexe

ε : Constante diélectrique dans le cas d'un milieu sans pertes

σ: Constante électrique ou conductivité

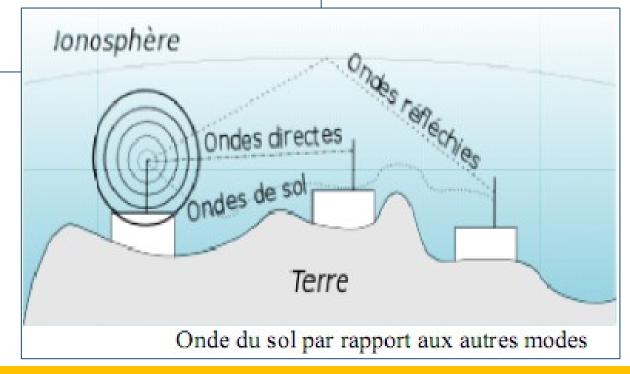
ω: Fréquence angulaire

1 Sans l'influence du sol

Nous avons vu que l'onde peut avoir l'expression suivante :

$$\underbrace{E}_{\text{champ \'electrique}} = \underbrace{E_0}_{\text{Terme d'amplitude}} \cdot \underbrace{e^{j(\omega t - k.r)}}_{\text{Trme de propagation}}$$
ou intensit\'e

Dans ce cas l'onde se propage sans atténuation.



2 Influence du sol

La solution de cette équation de propagation est de la forme suivante

$$f\left(t - \frac{z}{v}\right) \Rightarrow \overline{E} = E_0 e^{j\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)} \qquad \text{Avec} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu - j\frac{\sigma\mu}{\omega}}} \text{ si le milieu est non ferromagnétique } \mu \approx \mu_0 \text{ on aura}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \, \varepsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}} \cdot \sqrt{\varepsilon_0} = \frac{c}{\eta} \sqrt{\varepsilon_0}$$

$$\overline{E} = E_0 e^{j\omega \left(t - \frac{z}{c} \cdot \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon_0}}\right)}$$

Done

$$avec \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon_0}} = \beta' - j\alpha' donc \overline{E} = E_0 e^{-\omega \frac{\alpha'}{c} z} e^{j\omega \left(t - \frac{z\beta}{c}\right)}$$

donc la vitesse de propagation $v_p = \frac{c}{\beta'}$

L'onde subit une attenuation $\alpha = \frac{\alpha' \omega}{c}$ nepers par unité de longueur

Donc nous pouvons identifier une onde par :

- Son amplitude ou intensité E₀
- Son terme d'atténuation dont la constante d'atténuation est donnée par : α' = α.ω/c
- Son terme de propagation dont la constante de propagation est telle que : β'= ω.β/c

Conséquence

- Le paramètre α ' dépend de la conductivité σ , si z (direction de propagation) tend vers l'infini alors le champ électrique E tend vers zéro. C'est comme ça qu'on pourra expliquer l'atténuation de l'onde électromagnétique et par la même occasion la dissipation d'énergie électromagnétique par effet joule.
- La conductivité du sol influe sur la portée des ondes de surface : la portée dépend du milieu de propagation, elle est beaucoup plus grande en mer qu'en terrain agricole ou qu'en terrain aride:

Conductivité du sol (en S/m)

Mer	5
Foret	8 x 10-3
Dune	2 x 10-3
Villes	1 x 10-3

La propagation au niveau du sol s'atténuée avec la fréquence :

- Dans la bande VLF, on peut atteindre une portée de plusieurs milliers de kilomètres.
- Dans la bande MF, quelques centaines de kilomètres.
- Dans la bande HF, quelques dizaines de kilomètres.

Une fréquence de transition est donnée par la formule suivante :

*- Fréquence de transition f_t : c'est la fréquence pour laquelle les amplitudes du terme réel et du terme imaginaire sont égales, est donnée par

$$f_t = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon}$$

Cette valeur correspond au passage d'un comportement conducteur à un comportement diélectrique.

$$f>>f_t$$
 Milieu isolant $f<< f_t$ Milieu conducteur

Exp : - L'eau douce (675 KHz) - Sol (1,2 MHz) - L'eau de mer (900 MHz)

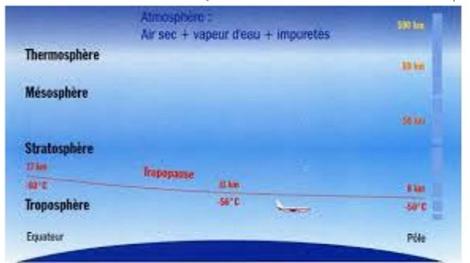
La région de l'atmosphère dans la quelle se déroulent les phénomènes météorologiques est appelée « Troposphère » d'épaisseur variant entre 7 Km (au niveau des deux pôles) et 14 Km (au niveau de l'équateur).

Cette région se comporte comme un diélectrique pur pour les hautes fréquences.

Des antennes de l'émetteur et du récepteur sont situées au voisinage de la terre ou en altitude, les ondes se propagent dans les œuches basses de l'atmosphère et sont légèrement courbées vers le bas « l'indice de réfraction des ondes en dépend »; «la densité de l'air diminue progressivement, et l'humidité change »

Exemple: La réception de la radio FM et de la télévision à distance moyenne de l'émetteur

(30-200 km)



Il serait intéressant d'étudier les variations de l'indice de réfraction selon deux cas :

1er cas: Basse atmosphère : h<1Km

L'indice de réfraction est donné par cette relation :

$$n = n_0 (1 + \beta .h)$$

$$\beta = \frac{1}{R_0} \left(-0.2 + 30 . \frac{dp}{dh} - 6 . \frac{dT}{dh} \right)$$
: Formule de Booker

Où n : indice de réfraction à l'altitude h

 n_0 : indice de réfraction au niveau de la mer $(n_0 \approx 1)$

R₀: rayon de la terre (6400 Km)

dP/dh: Variation de la pression de la vapeur d'eau avec l'altitude (mbar/m)

dT/dh: Variation de la température avec l'altitude (°C/m)

0,2 : correspond à la variation de densité de charges électriques

2ème cas: Basse atmosphère: h>1Km

Dans ce cas le C.C.I.R (Comité Consultatif Internationale des Radiocommunications) donne une atmosphère fondamentale de référence pour laquelle l'indice de réfraction sera établit comme suit :

$$n = 1 + 289.10^{-6} e^{(-0.136.h)}$$

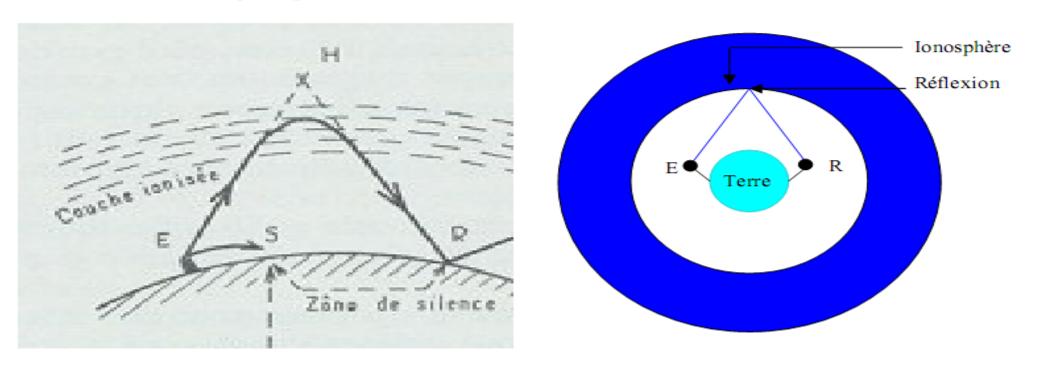
h est exprimée en Km.

Influence de la Stratosphère

La stratosphère est située au dessus de la troposphère. Dans cette couche la température est constante, elle est de l'ordre de -50°C.

L'air est raréfié, dans ce cas les ondes se propagent dans les conditions du vide et on a sensiblement l'indice de réfraction n =1.

C'est la troisième couche de l'atmosphère, elle s'étend entre 50 et 1000 Km, elle est formée de plusieurs sous-couches. Cette couche se comporte comme un miroir réflecteur, car elle est composée essentiellement de molécules de l'air qui se dissocier en ions positives et négatives lorsqu'elle est éclairée par le soleil, formant ainsi une couche conductrice qui sert de miroir aux ondes électromagnétiques incidentes



Réflexion des ondes électromagnétiques sur l'ionosphère

- ➤ La propagation ionosphérique permet des communications radio à grande distance.
- Les couches ionisées de l'atmosphère réfléchissent les ondes et les renvoient sur terre ou sur mer
- Les ondes se réfléchissent sur les couches ionisées situées l'une vers 100 km d'altitude (couche E), l'autre entre 200 et 350 km (couche F).
- Par une succession de réflexions sur l'ionosphère et sur la terre ou la mer, les ondes peuvent parcourir des distances jusqu'à 40.000 km.
- Exemple : La radiodiffusion en ondes courtes, qui couvre de grands pays (Afrique, Amérique du Sud, Australie, ...), des continents entiers ou l'ensemble du Globe, Le trafic radio aéronautique, maritime.

Se phénomène s'explique par le fait que l'indice de réfraction de l'atmosphère décroissant avec la hauteur ,l'OEM passe d'un milieu d'indice de réfraction plus fort à un milieu d'indice de réfraction plus faible et elle est donc astreinte à être réfléchie ou réfractée selon les angles incidentes avec l'ionosphère Quelques chiffres de la densité électronique d'ionisation :

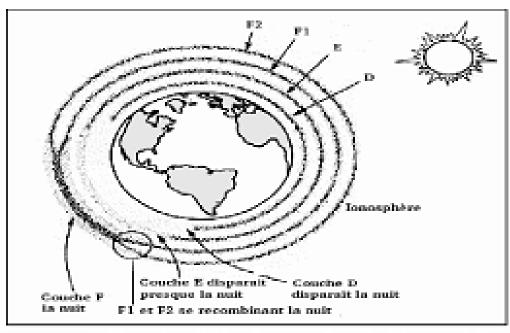
$$\dot{a} = 60 - 70Km \rightarrow 10^2 e^{-}/cm^3$$
, $\dot{a} = 100 - 110Km \rightarrow 10^5 e^{-}/cm^3$

$$\dot{a} = 100 - 110 Km \rightarrow 10^5 e^- / cm^3$$

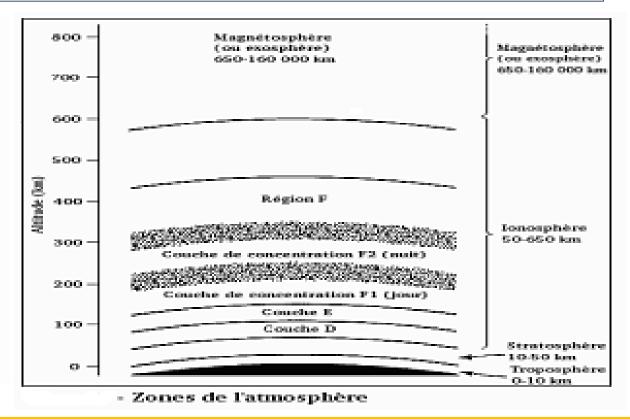
$$\dot{a} = 300Km \rightarrow 10^6 e^-/cm^3$$

$$\dot{a} = 300 Km \rightarrow 10^6 e^-/cm^3$$
 $\dot{a} = 10^4 Km \rightarrow 10^3 e^-/cm^3$

L'ionosphère se divise en sous couches d'altitudes différentes D, E, F_1 et F_2



 Vue simplifiée des couches de l'ionosphère sur une période de 24 heures



La portée utile d'une onde radio dépend pour un état ionosphérique donnée de la fréquence de l'onde et de son inclinaison. Ces deux facteurs entre en considération pour établir des communications à longue distance lorsque nous augmentons la fréquence d'une ondes nous accroissons en général sa portée cela s'explique par le faite que les ondes de fréquence plus élevée pénètre d'avantage les couches de l'ionosphère et ne sont réfléchie que pour les couches supérieur cependant si nous dépassons 30MHz l'onde traversera successivement toutes les couches de l'ionosphère et ne sera pas renvoyée vers le sol cette fréquence est appelée fréquence critique.

La réfraction atmosphérique est un phénomène dans lequel les rayons lumineux (ou ondes radio) dévient lorsqu'ils traversent notre atmosphère en raison des caractéristiques non uniformes de ce milieu.

l'indice de réfraction « n » de l'air n'est pas constant et uniforme dans l'espace

Cela dépend de la **densité de l'air et de l'humidité** (la contribution de l'humidité étant négligeable par rapport à la densité).

La densité, quant à elle, dépend de la **température et de la pression**, de sorte que l'indice de réfraction varie dans l'atmosphère à différentes altitudes.

À mesure que l'altitude augmente, les couches d'air subissent une diminution de pression, ce qui entraîne une diminution de la densité et, par conséquent, une diminution de l'indice de réfraction.

Plus le gradient de **température est élevé**, plus le gradient **d'indice de réfraction est élevé**, ce qui entraîne une courbure plus prononcée.

Puisque l'indice de réfraction de l'air **diminue** légèrement avec l'altitude (il est d'environ 1,003 à la surface et diminue d'environ 4 fois par mètre d'altitude), la vitesse de propagation de l'onde **augmente** légèrement avec l'altitude.

Cela conduit à une légère déviation de la trajectoire de l'onde vers la Terre.

Les changements **graduels** dans l'indice de réfraction avec la hauteur entrainent les ondes EM à se plier dans l'atmosphère. Si l'atmosphère était homogène, les ondes (rayons) se déplacent en ligne droite et les horizons physiques et RF coïncident.

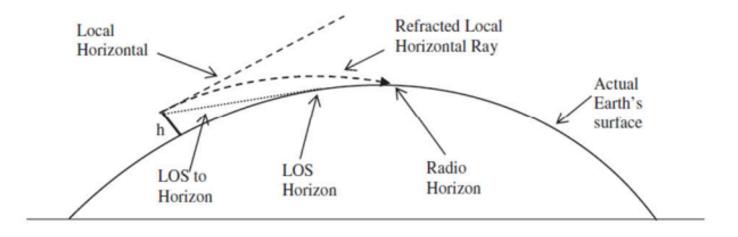


Figure 2. Effet de la réfraction atmosphérique sur la distance de l'horizon.

un rayon horizontal est plié vers le bas et voit un horizon radio qui est au-delà de l'horizon ligne droite de visée (hest la hauteur de l'antenne).

En remplaçant le modèle de la surface de la terre avec celui qui a un rayon de 4/3 du rayon de la terre (pour une atmosphère standard de référence), le rayon courbé devient droit.

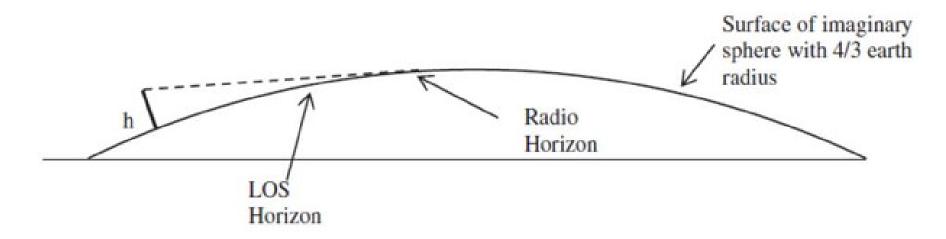


Figure 3. Equivalence de l'horizon radio avec le modèle du 4/3 rayon de la terre.

Le rayon équivalent de la Terre est une mesure utilisée en radiocommunication pour représenter la courbure de la surface de la Terre dans le contexte de la propagation des ondes radioélectriques sur de longues distances. Il est souvent utilisé pour simplifier les calculs de la ligne de visée entre deux antennes.

le rayon équivalent de la Terre est utilisé pour modéliser la courbure de la Terre comme si elle était une sphère parfaite.

Cette approximation est pratique pour estimer la distance entre deux points lorsque la ligne de visée directe entre eux est obstruée par la courbure de la Terre.

Le rayon de la terre et le taux de variation de l'indice de réfraction peuvent être utilisés pour déterminer le rayon équivalent de la terre en fonction des conditions locales :

$$r_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{r} + \frac{dn}{dh}} \tag{1}$$

L'indice de réfraction peut être exprimé comme

$$n = 1 + N \times 10^{-6} \tag{2}$$

où N est appelé la réfractivité:

$$N = (n-1) \times 10^{-6}$$

N est donnée par :
$$N = \frac{77.6}{T} \left(P + \frac{4810e}{T} \right)$$
 Unités N (3)

P est la pression totale en millibar (mb)

e est la pression de la vapeur d'eau en millibar (mb)

T est la température absolue en degré Kelvin (°K)

En utilisant les valeurs typiques d'une atmosphère standard, donne N = 312. Les valeurs typiques sont : P = 1000 mbe = 10 mbT = 290 K

Alors la réfractivité d'une atmosphère standard est $N_S = 312$.

L'indice de réfraction est approximativement égal à l'unité au niveau de la mer et décroit exponentiellement avec la hauteur. La réfractivité comme fonction de la hauteur peut être modélisée par

$$N = N_S e^{-h/H}$$
où $H = 7$ km. (4)

A partir de l'équation (2) on peut voir que

$$\frac{dn}{dh} = \frac{dN}{dh} \times 10^{-6} \quad \text{Unité } N/\text{km}$$

et à partir de (4)

$$\frac{dN}{dh} = \frac{-N_S}{H}e^{-h/H}$$

Pour des altitudes au-dessus de 1 km, dN/dh est approchée par sa valeur à 1 km :

$$\frac{dN}{dh}(1 \text{ km}) = \frac{-312}{7}e^{-1/7} = -38.6 \text{ Unité } N/\text{km}$$

Donc lorsque h < 1 km, l'expression du gradient de la réfractivité est

$$\frac{dN}{dh} \approx -39$$
 Unité N/km



En utilisant l'expression précédente, on peut déterminer l'ajustement nécessaire pour avoir le rayon local horizontal droit :

$$\frac{1}{r_{eq}} = \frac{1}{r} + \frac{dn}{dh}$$

donc

$$\frac{r}{r_{eq}} = \frac{1}{k} = 1 + r \frac{dn}{dh}$$

où r = 6370 km est la rayon de la terre et

$$\frac{dn}{dh} = -39$$
 Unité $N/\text{km} = -39 \times 10^{-6} \text{ km}^{-1}$

Donc

$$k = \frac{1}{1 - 6370 \times 39 \times 10^{-6}} = \frac{1}{0.75} = \frac{4}{3}$$

comme prévu pour les conditions de l'atmosphère standard qui ont été utilisées.

7 Propagation dans des milieux inhomogènes et aléatoires

La propagation d'une onde dans un milieu inhomogène doit faire l'objet d'une modélisation stochastique du milieu et la détermination des échelles caractéristiques du problème.

Milieu aléatoire. On modélise un milieu inhomogène comme une réalisation d'un milieu aléatoire. Dans ce cas, les évolutions des paramètres physiques du milieu en fonction de l'espace sont décrites par des processus aléatoires.

Echelles. Concerne les différentes échelles caractéristiques du problème, à savoir les distances typiques sur lesquelles varient les coefficients et les paramètres du milieu considéré.

Propagation dans des milieux inhomogènes et aléatoires

On peut distinguer trois échelles de longueur dans un problème de propagation d'ondes en milieu aléatoire :

- La longueur d'onde λ,
- La distance de propagation L,
- La taille des inhomogénéités lc.

l'équation qui régit la propagation des ondes en milieu unidimensionnel:

$$\frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial z^2} + \mu(z) \cdot \varepsilon(z) \cdot \frac{d^2 E(z,t)}{dt^2} = 0$$

Le milieu est caractérisé par deux paramètres : la permittivité diélectrique ε et la perméabilité magnétique μ.

Dans le cas d'un milieu homogène, les paramètres du milieu ε et μ sont constants, alors :

$$\frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial z^2} + c^2 \frac{d^2 E(z,t)}{dt^2} = 0$$

la vitesse de propagation $c = (1/\epsilon \mu)^{1/2}$

Propagation dans des milieux inhomogènes et aléatoires

La solution générale, est de la forme : E(z,t)=f(z-c.t)+f((z+c.t)). Il s'agit de deux ondes, une qui se propage vers la droite (z-c.t), et une qui se propage vers la gauche (z+c.t) avec la vitesse c.

Dans un milieu **inhomogène**, les deux paramètres du milieu ε et μ sont fonctions de la coordonnée spatiale z. Toute la difficulté réside dans le calcul de ces coefficients homogénéisés, et l'analyse montre que les bons coefficients sont :

 $\varepsilon_{\text{eff}} = E(\varepsilon)$ et $\mu_{\text{eff}} = E(\mu)$ ainsi, la vitesse effective est $C_{\text{eff}} = (1/\varepsilon_{\text{eff}})^{1/2}$.

Statistique des ondes incohérentes. Dans un milieu aléatoire, on distingue deux parties :

- 1) Un *front cohérent*, d'amplitude importante et qui garde plus ou moins la forme de l'onde originale,
- 2) des *ondes incohérentes (ou réfléchies)*, de faible amplitude, résultat de l'interaction de l'onde avec les inhomogénéités du milieu.

L'énergie perdue par le front cohérent se retrouve dans les ondes incohérentes. le signal réfléchi est un processus gaussien stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation $c_{t0}(t) = E\left[E(t_0 + t)E(t_0)\right]$ donnée par :

$$C_{to}(t) = \frac{1}{2\pi} \int \left| \overline{f}(\omega) \right|^2 .D(t0, \omega) e^{-j\omega t} .d\omega$$

La densité de puissance spectrale **D** est donnée à travers un système d'équations de transport hyperbolique déterministe qui ne dépend que des propriétés et statistiques du milieu de propagation.

La qualité gaussienne des ondes réfléchies montre que toute l'information sur le milieu est contenue dans la fonction d'autocorrélation et en particulier dans la densité de puissance.

Le problème réside dans l'estimation de la fonction d'autocorrélation, qui s'exprime sous la forme d'une moyenne statistique, c'est-à-dire une moyenne sur le milieu.

8 Ondes Hertziennes et ces applications

Le schéma suivant résume les applications possibles en fonction des différentes gammes de fréquences :



Exemple 1

Trouver la distance à l'horizon radio à partir d'une tour 50-m installée à 2 km au-dessus du niveau de la mer, étant donné les conditions atmosphériques suivantes au niveau de la mer :

$$P = 1100 \text{ mb}$$
 $e = 12 \text{ mb}$ $T = 260 \text{ K}$

L'expression de la réfractivité avec les valeurs des paramètres, $N = \frac{77.6}{T} \left(P + \frac{4810e}{T} \right)$ Unité N

donne $N_S = 394.57$ Unité N.

En utilisant l'expression du gradient de réfractivité et la hauteur de 2 km

$$\frac{dN}{dh}(h) = \frac{-N_S}{7}e^{-h/7}$$

Donc
$$\frac{dN}{dh} = \frac{-394.57}{7}e^{-2/7} = -42.36$$
 Unité N/km

et
$$\frac{dn}{dh} = \frac{dN}{dh} \times 10^{-6} = -0.00004236$$
 Unité N/km

La valeur de k peut être obtenue à partir de $\frac{r}{r_{eq}} = \frac{1}{k} = 1 + r \frac{dn}{dh}$

Utilisant r = 6370 km pour le rayon réel de la terre donne

$$k = 1.370$$

La distance à l'horizon est alors donnée par $d \cong \sqrt{2krh_T} = 29.5 \text{ km}$