

## PROPAGATION DANS LE VIDE

En l'absence de charges et de courant,

$$\rho_c = 0 \quad \text{et} \quad \vec{j} = 0,$$

les équations de Maxwell dans le vide sont :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},\end{aligned}$$

et l'équation de propagation du champ électrique se réduit à

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = \square \vec{E} = 0.$$

On peut écrire la même relation pour le champ  $\vec{B}$ , ce qui montre que les champs électrique et magnétique se propagent à la même vitesse  $c$ .

## ONDE PLANE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Pour étudier la propagation, on choisit une direction de l'espace de propagation, par exemple  $x$ . Le champ électromagnétique est donc décrit par

$$\vec{E}(x - ct) \quad \text{et} \quad \vec{B}(x - ct)$$

les vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont donc constants dans le plan  $Oyz$ . La divergence nulle du champ électrique (dans le vide) montre que

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial z}}_{=0} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0.$$

Cette relation est vérifiée pour deux conditions alternatives : soit  $E_x$  ne dépend pas de  $x$ , ce qui contredit la notion de propagation selon  $x$ , soit la composante  $E_x$  est nulle. Le même raisonnement appliqué au champ  $\vec{B}$ , lui aussi de divergence nulle, montre que le champ EM est de la forme

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}.$$

Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont **transverses**, car les vecteurs sont toujours perpendiculaires à la direction de propagation.

Comme le champ électrique ne dépend que d'une variable  $\phi = x - ct$ , les relations ci-dessus se mettent sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \phi} = \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial B_y}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -c \frac{\partial B_y}{\partial \phi}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \phi} = \frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -c \frac{\partial B_z}{\partial \phi} \end{cases}$$

La relation de Maxwell-Faraday appliquée à l'onde plane permet de montrer que les vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont également perpendiculaires. En effet,

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix},$$

soit

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \end{cases}$$

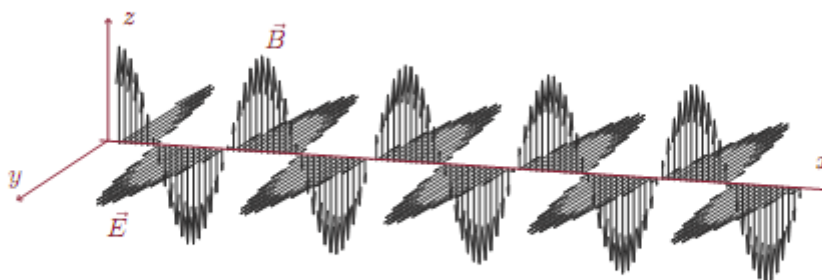
et après intégration par rapport à  $\phi$

$$\begin{cases} E_z = -cB_y, \\ E_y = cB_z. \end{cases}$$

Le produit scalaire  $\vec{E} \cdot \vec{B} = E_y B_y + E_z B_z = c(B_y B_z - B_y B_z)$  est nul, ce qui montre que les vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  de l'onde plane sont perpendiculaires. D'autre part, on peut calculer que

$$\|\vec{E}\| = c\|\vec{B}\|.$$

La figure 1 présente une visualisation de l'onde plane EM dans le cas où les vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  gardent la même direction au cours de la propagation. Dans cet exemple, on parle de polarisation rectiligne, mais il existe d'autres états de polarisation.



**Figure 1** Champs de vecteurs électrique et magnétique pour une onde plane avec une polarisation rectiligne

La propagation se fait suivant l'axe  $x$ , le champ électrique est orienté suivant  $y$  et le champ magnétique est orienté suivant  $z$ .

En utilisant le formalisme de l'onde monochromatique, on peut décrire le champ électromagnétique par  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$ ,  $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$ .

Avec cette écriture, les relations de divergence nulle sur  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  donnent

$$\vec{k}\cdot\vec{E} = 0, \quad \text{et} \quad \vec{k}\cdot\vec{B} = 0,$$

ce qui est une autre démonstration du caractère transverse de l'onde plane dans le vide. La relation d'induction impose d'autre part

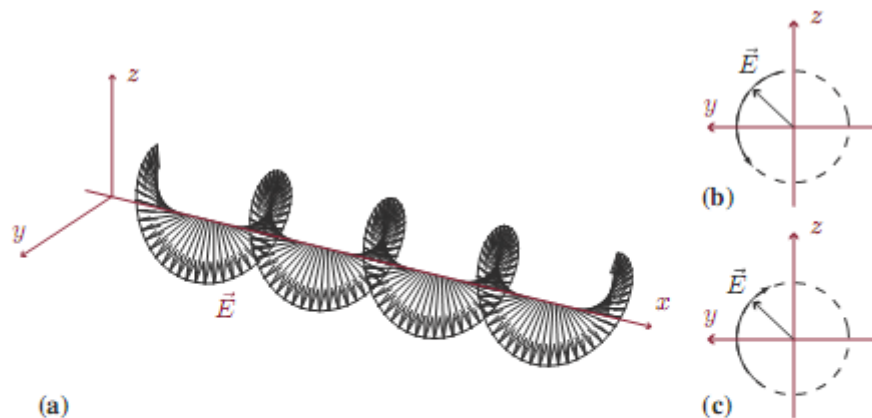
$$i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega\vec{B}$$

soit

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\vec{k} \wedge \vec{E} = \frac{k}{\omega}\vec{\kappa} \wedge \vec{E} = \frac{1}{c}\vec{\kappa} \wedge \vec{E}.$$

## POLARISATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

Lors de la propagation, les vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont perpendiculaires à la direction de propagation. Mais tout en restant dans le plan, ils peuvent se déplacer et décrire différentes figures. La direction et la trajectoire décrites par les champs électromagnétiques lors de la propagation sont appelées la **polarisation** de l'onde.



**Figure 2** Polarisation circulaire du vecteur champ électrique

(a) l'extrémité du vecteur  $\vec{E}$  décrit une hélice dans l'espace. En regardant l'onde depuis un point  $x \rightarrow \infty$ , l'extrémité du vecteur est assujettie à un cercle. Le sens de parcours de ce cercle donne le sens de la polarisation circulaire : polarisation circulaire gauche (b) et droite (c).

Pour une onde plane monochromatique se propageant dans la direction  $x$ , le vecteur champ électrique est

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{y0} \cos(kx - \omega t + \phi_y) \\ E_{z0} \cos(kx - \omega t + \phi_z) \end{pmatrix}.$$

Pour une position  $x$  fixée, l'extrémité du vecteur  $\vec{E}$  décrit différentes figures suivant la valeur du déphasage  $\phi_y - \phi_z$  entre les composantes  $y$  et  $z$ .

- Si  $\phi_y - \phi_z$  est un multiple de  $\pi$ , le vecteur  $\vec{E}$  garde une direction constante. La polarisation est **rectiligne**.
- Si  $\phi_y - \phi_z = \pm\pi/2$  et  $E_{y0} = E_{z0}$ , la polarisation est **circulaire**. Le signe du déphasage détermine le sens de rotation du vecteur  $\vec{E}$  autour de l'axe  $x$ . Pour un observateur placé à  $x = \infty$ , c'est-à-dire qui reçoit l'onde électromagnétique, la polarisation est **circulaire droite** si la rotation est dans le sens des aiguilles d'une montre. Dans le cas contraire, la polarisation est dite **circulaire gauche**.
- Si  $\phi_y - \phi_z = \pm\pi/2$  et  $E_{y0} \neq E_{z0}$ , l'extrémité du vecteur  $\vec{E}$  décrit une ellipse, avec un sens de circulation donné par le déphasage. On parle alors de **polarisation elliptique** droite ou gauche, avec la même convention que pour la polarisation circulaire.
- Si  $\phi_y - \phi_z$  est quelconque, et  $E_{y0} \neq E_{z0}$ , la polarisation est elliptique, mais les axes principaux de l'ellipse ne sont pas confondus avec les axes  $y$  et  $z$  du repère de coordonnées.

## ÉQUATIONS DE MAXWELL DANS LA MATIÈRE

En présence d'un champ électromagnétique, un milieu matériel subit deux effets : un effet de polarisation dû au champ électrique et un effet d'aimantation dû au champ magnétique. Ces deux effets sont décrits par deux fonctions complexes  $\varepsilon$  et  $\mu$  qui décrivent la relation entre le champ incident ( $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ) et le milieu matériel.

Dans un milieu matériel homogène (c'est-à-dire que  $\varepsilon$  et  $\mu$  ne dépendent pas de la position), les quatre équations de Maxwell ont une forme proche de celles établies précédemment :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho_c}{\varepsilon}, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu \left( \gamma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

La propagation des ondes électromagnétiques pourra être déterminée si on a connaissance de la conductivité  $\gamma$ , de la densité volumique de charges libres  $\rho_c$ , de la permittivité complexe  $\varepsilon$  et de la perméabilité complexe  $\mu$  du matériau.



On peut remarquer ici que la forme des équations de Maxwell **dans le vide** et celle des équations de Maxwell dans un milieu matériel sont identiques. Du point de vue électromagnétique, le vide est donc assimilé à un cas particulier de la matière avec des propriétés électriques et magnétiques telles que

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad \mu = \mu_0.$$

## ÉQUATION DE PROPAGATION

### Équations générales

La combinaison des équations permet d'obtenir une équation de propagation pour le champ électromagnétique ( $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ).

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \text{grad } \rho_c + \mu \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

De même, pour le champ magnétique

$$\Delta \vec{B} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \mu \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

En présence de charges libres (donc un milieu matériel globalement non neutre électriquement), l'équation de Maxwell-Gauss montre que pour une onde monochromatique de la forme

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)},$$

les vecteurs  $\vec{k}$  et  $\vec{E}$  ne sont pas perpendiculaires. Pour un milieu non neutre, il ne peut y avoir d'onde plane électromagnétique.

### Équation de propagation en milieu neutre

Pour un milieu neutre ( $\rho_c = 0$ ), l'équation de propagation pour le champ électrique est identique à celle du champ magnétique. On écrit celle pour le champ électrique :

$$\Delta \vec{E} = \mu \left( \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right).$$

Si l'onde est monochromatique et caractérisée par le couple  $(\vec{k}, \omega)$ ,

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)},$$

la relation de dispersion s'écrit

$$k^2 = \mu \varepsilon \omega^2 + i \mu \gamma \omega,$$

ou encore

$$k^2 = \mu \left( \varepsilon + i \frac{\gamma}{\omega} \right) \omega^2 = \mu \hat{\varepsilon} \omega^2,$$

avec l'introduction d'une **constante diélectrique généralisée**

$$\hat{\varepsilon} = (\varepsilon + i \gamma / \omega).$$

## Onde progressive sans atténuation

Dans le cas où  $(\hat{\epsilon}\mu)$  est un **réel positif**, alors,  $k^2$  est positif et  $k$  prend des valeurs réelles. La relation de dispersion est simplement

$$k = \sqrt{\hat{\epsilon}\mu}\omega$$

et la propagation se fait sans atténuation : l'amplitude des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  reste constante au cours de la propagation et l'onde électromagnétique a la structure d'une onde plane.

D'après la relation (7.23), la vitesse de phase est

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\hat{\epsilon}\mu}},$$

et la propagation est dispersive : la vitesse de phase varie avec la pulsation.

## Onde évanescente

Si  $(\hat{\epsilon}\mu)$  est un **réel négatif**,  $k^2 < 0$  et  $k$  est un imaginaire pur. Le champ électrique a donc comme écriture

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-i\omega t}$$

et présente une décroissance spatiale exponentielle sans propagation : le champ  $\vec{E}$  oscille en phase dans tout l'espace. On parle dans ce cas d'une onde évanescente.

**Remarque :** en calculant la racine carrée de  $k^2 < 0$ , on a éliminé la solution  $+ik$  qui correspond à une croissance exponentielle du champ ( $\vec{E}, \vec{B}$ ) car ce n'est pas une solution acceptable physiquement.

## Onde progressive atténuée

Dans le cas où  $(\hat{\epsilon}\mu)$  est un nombre **complexe**, alors le vecteur d'onde  $\vec{k} = \vec{k}_r + i\vec{k}_i$  est également un nombre complexe, et la propagation de l'onde est décrite par

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\vec{k}_i\cdot\vec{r}} e^{i(\vec{k}_r\cdot\vec{r} - \omega t)}.$$

La première exponentielle décrit l'atténuation de l'onde avec une distance caractéristique d'atténuation

$$\delta = 1/k_i$$

tandis que le second décrit une propagation avec une longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k_r$ . Malgré la décroissance de l'amplitude au cours de la propagation, on peut quand même définir une vitesse de phase

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_r},$$

et la dispersion est possible. Dans ce cas, la partie réelle du nombre d'onde dépend de la fréquence :  $k_r = k_r(\omega)$ . La vitesse de groupe est définie par rapport à la partie réelle du nombre d'onde :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_r}.$$

## Propagation dans un isolant parfait

Un isolant parfait est caractérisé par une conductivité nulle et une permittivité relative  $\epsilon_r \geq 1$  :

$$\gamma = 0, \quad \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0.$$

Avec ces hypothèses, la relation de dispersion généralisée est

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r(\omega)}$$

et cette relation montre que la dispersion de l'onde est liée à la variation en fréquence de la permittivité relative  $\epsilon_r(\omega)$ .

La vitesse de phase calculée par  $\omega/k$  vaut

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r'}} = \frac{c}{n},$$

et  $n = \sqrt{\epsilon_r'}$  est appelé l'**indice de réfraction** du milieu. Ce n'est pas une simple analogie avec la théorie de l'optique géométrique car les lois classiques de l'optique peuvent être obtenues à partir des équations de Maxwell.

## Propagation dans un diélectrique imparfait sans pertes

Dans un diélectrique imparfait, la conduction n'est pas nulle même si elle est très faible ( $\gamma \neq 0$ ). Si l'on ne tient pas compte de pertes au sein du matériau (l'absorption d'énergie électromagnétique par le matériau), la permittivité relative  $\epsilon_r$  est réelle, et la relation de dispersion s'écrit

$$k^2 = \epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + i \frac{\gamma}{\epsilon_0 \epsilon_r \omega} \right).$$

Cette relation fait apparaître une pulsation caractéristique

$$\omega_c = \frac{\gamma}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

qui sépare le domaine de fréquence en deux bandes :

- **Bande 1 : faibles fréquences** ( $\omega \ll \omega_c$ ). On a dans ce cas un régime de propagation avec atténuation :

$$k^2 = i \frac{\gamma \omega}{\epsilon_0 c^2}$$

et

$$k = \delta^{-1} - i \delta^{-1}$$

avec une profondeur de pénétration

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

identique à celle obtenue dans le cas du métal.

- **Bande 2 : hautes fréquences** ( $\omega \gg \omega_c$ ). La relation de dispersion se simplifie en

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r}$$

et traduit une propagation de l'onde sans atténuation. Le milieu est donc transparent pour ces fréquences.

### VITESSE DE PHASE ET VITESSE DE GROUPE

La vitesse de phase est la vitesse de propagation de la phase d'une onde plane progressive sinusoïdale. La vitesse de phase est calculée par :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

La propagation est dite dispersive lorsqu'il y a une dépendance entre la vitesse de phase et la fréquence de l'onde.

La vitesse de groupe est la vitesse de propagation de l'enveloppe d'une onde. On définit la vitesse de groupe par l'expression :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

On voit qu'elle se distingue de la vitesse de phase dès qu'apparaît une dispersion, et dès que la relation entre  $\omega$  et  $k$  cesse d'être linéaire (Cette vitesse est égale à la vitesse de phase lorsque  $\omega$  et  $k$  sont proportionnels, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas de dispersion; c'est le cas du vide pour lequel  $\omega = kc$  :  $v_g = c = v_\varphi$ ).