Faculté des Sciences de la matière et d'Informatique.
Département d'Informatique.
1ère année Master – GLSD/IABD.

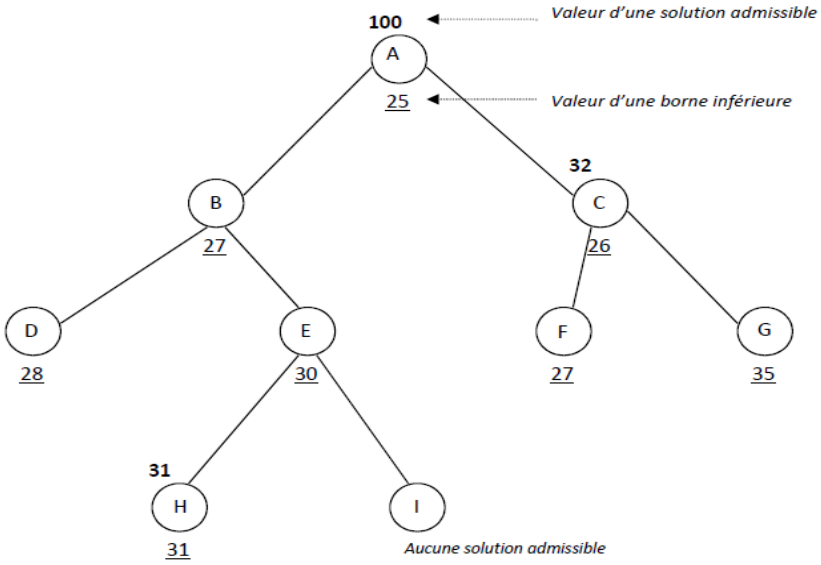
# Recherche Opérationnelle avancée 2

## Série de Travaux Dirigés N°03

2025-2026

### Exercice 01:

Soit un problème de minimisation pour lequel on a commencé l'arborescence de recherche d'une solution optimale suivante, où les sommets sont arbitrairement notés A, B, …, I :




1) Quelle est la valeur de la meilleure solution admissible connue du problème, pour l'instant ?

2) Quelle est la valeur de la meilleure borne inférieure de la valeur optimale du problème, pour l'instant ?

3) Déduire des deux premières question un encadrement de la valeur optimale du problème de départ.

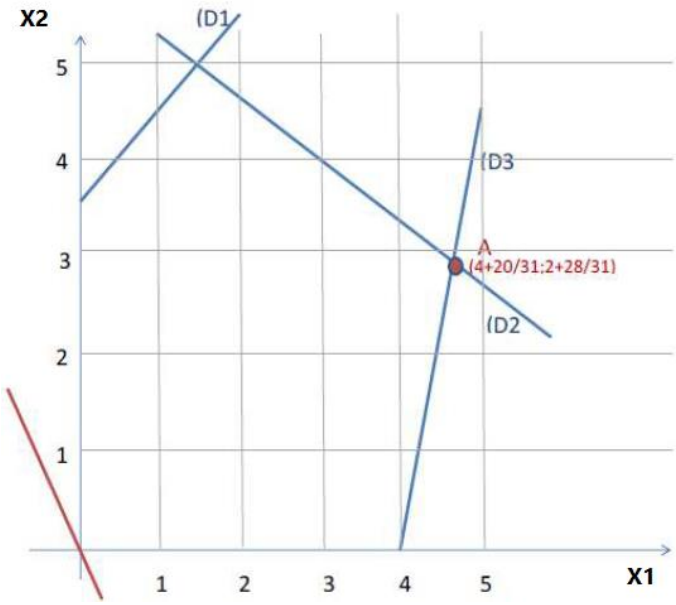
4) Pour chacune des feuilles, dire si elle peut être élaguée et pourquoi.

### Exercice 02:

Soit le PLNE suivant :

$$(PE1)\begin{cases}\max Z = 3x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 9x_1 - 2x_2 \leq 36 \\ x1, x2 \geq 0, \text{ entiers}\end{cases}$$

- Appliquer la méthode de Branch & Bound en utiliser la méthode de Dakin pour résoudre (PE1).
- Les solutions des programmes linéaires continus à résoudre en chaque noeud seront trouvées directement de façon géométrique sur la figure donnée ci-dessous. La solution continue du problème à la racine est obtenue au point A.




- Indication : coordonnées des points à considérer successivement (mais pas obligatoirement dans cet ordre, et la liste n'est pas exhaustive) :

B : (4 ; 3+1/3) z=18+2/3 ; C : (4+4/9 ; 2) z=17+1/3 ; D : (4+1/2 ; 3) z=19+1/2 ; E : (3 ; 4) z=17

**Exercice 03:**

Considérant le PLNE suivant ainsi que le tableau optimal de son Pl relaxé PR1:

$$(PE1)\begin{cases} \max Z = 4x_1 - x_2 \\ 7x_1 - 2x_2 \leq 14 \\ x_2 \leq 3 \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ \text{x1, x2} \geq 0, \text{ entiers} \end{cases}$$

| | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | b |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_2$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | |
| $X_5$ | 0 | 0 | -2/7 | 10/7 | 1 | |
| $X_1$ | 1 | 0 | 1/7 | 2/7 | 0 | |
| -Z | 0 | 0 | -4/7 | -1/7 | 0 | |

1) Résoudre (PR1) graphiquement.
2) Déduire que (PE1) n'admet pas de solution réalisable quand $x_1 \geq 3$
3) Déduire un encadrement de la valeur de la fonction objectif de PE1
4) Compléter le tableau de simplexe de PR1 donné ci-dessus.
5) Résoudre (PE1) en utilisant l'algorithme de branch un bound en choisisant la variable de branchement selon la règle de Dakin.

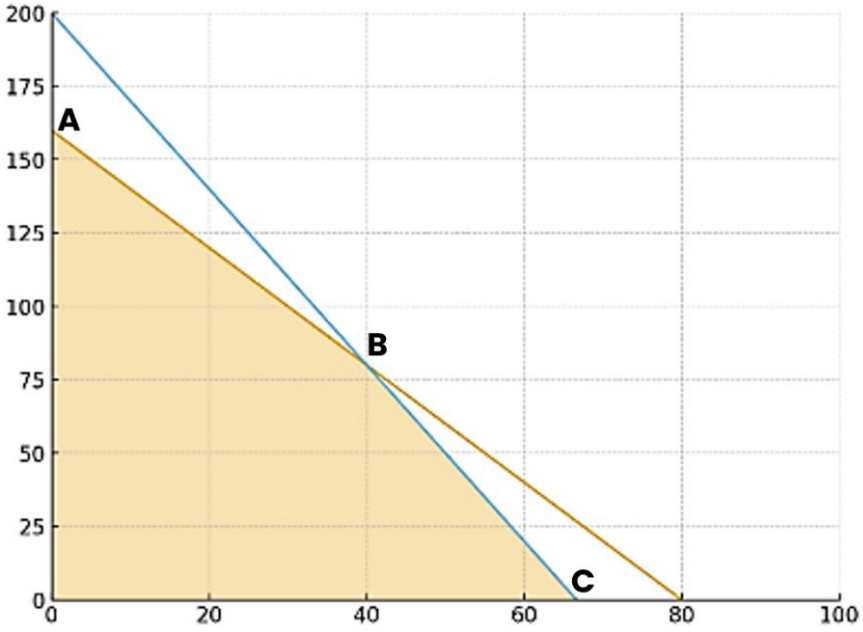
**Exercice 04:**

Soit le programme linéaire en nombre entier suivant :

$$(PE1)\begin{cases} \max Z = 9x_1 + 4x_2 \\ x_1 + 1/2x_2 \leq 80 \\ 3/2x_1 + 1/2x_2 \leq 100 \\ \text{x1, x2} \geq 0, \text{ entiers} \end{cases}$$

La représentation graphique de la relaxation du PLNE est donnée ci-dessous.

La solution optimale de la relaxation est : $x_1^* = 200/3, x_2^* = 0$ (le sommet C du graphique).




1) Montrer que la contrainte $x_1 \leq 66$ est une coupe pour le PLNE.

2) Montrer que la contrainte $x_1 \leq 63$ n'est pas une coupe pour le PLNE.

3) Le tableau optimal de la relaxation est donné ci-dessous:

| | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | b |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_3$ | 0 | 1/6 | 1 | -2/3 | 40/3 |
| $X_1$ | 1 | 1/3 | 0 | 2/3 | 200/3 |
| -Z | 0 | -1 | 0 | -6 | |

4) Insérer la coupe $x_1 \leq 66$ dans tableau optimal et effectuer une itération du simplexe dual.

**Exercice 05:**

Soit le PLNE suivant ainsi que le tableau optimal de son PL relaxé:

$$\begin{cases} \min Z = 3x1 + 4x2 \\ 3x1 + x2 \geq 4 \\ x1 + 2x2 \geq 4 \\ x1, x2 \geq 0, \text{ entiers} \end{cases}$$

| | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | b |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 1 | 0 | -2/5 | 1/5 | 4/5 |
| $X_2$ | 0 | 1 | 1/5 | -3/5 | 8/5 |
| -Z | 0 | 0 | 2/5 | 9/5 | -44/5 |

1. Résoudre le PLNE avec la méthode de coupe de gomory (Commencer par $X_1$).
2. Représenter graphiquement la ou les coupes obtenues.

**Exercice 06:**

Soit le PLNE suivant :

$$(PE)\begin{cases}\min Z = 2x_1 + 15x_2 + 18x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - 6x_3 \leq -10 \\ x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ 2x_1 + 10x_3 \leq 19 \\ -x_1 + x_2 \leq -2 \\ \text{x1, x2, , x3} \geq 0, \text{ entiers}\end{cases}$$

Le tableau optimal de la relaxation est donné ci-dessous:

| | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ | $X_7$ | b |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 1 | 10 | 0 | 5 | 0 | 3 | 0 | 7 |
| $X_5$ | 0 | 5 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 5 |
| $X_3$ | 0 | -2 | 1 | -1 | 0 | -1/2 | 0 | 1/2 |
| $X_7$ | 0 | 11 | 0 | 5 | 0 | 3 | 1 | 5 |
| -Z | 0 | 31 | 0 | 8 | 0 | 3 | 0 | -23 |

1. Générer la coupe de Gomory associée à la 3ème contrainte.

2. Résoudre à l'optimum du PLNE.

**Exercice 07:**

Soit le PLNE suivant :

$$(PE)\begin{cases}\max Z = -x_1 + 2x_2 \\ -4x_1 + 6x_2 \leq 9 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ \text{x1, x2} \geq 0, \quad \text{entiers}\end{cases}$$

1. Résoudre, par le simplexe primal, la relaxation PL du PLNE.

2. Considérer la dernière contrainte de second membre non entier et effectuer une itération complète de la méthode des plans de coupe (en utilisant le simplexe dual).

3. Représenter graphiquement la relaxation PL, les solutions réalisables du PLNE et la coupe définie dans la question 2.