RECHERCHE OPÉRATIONNELLE AVANCÉE 2

Chapitre II

Application de la Recherche Opérationnelle

Enseignant:
M. MAABED Mohammed

mars 2026



Plan du chapitre

01

Méthode Matricielle (Revisitée)

Elle exprime le problème linéaire en termes de matrices et vecteurs, ce qui permet une écriture compacte des calculs. Les opérations pivot s'y traduisent par des mises à jour matricielles.

02

Méthode du Simplexe Révisée

Variante plus efficace du simplexe, elle ne manipule pas tout le tableau mais uniquement la base et son inverse. Elle réduit ainsi la mémoire et les calculs nécessaires.

03

Dualité et analyse de sensibilité

La dualité relie un problème à son dual et permet d'interpréter les variables duales comme des "prix implicites". L'analyse de sensibilité exploite ces résultats pour mesurer l'effet de variations sur l'optimum..

Rappels

Définition 1 - *Addition de matrices*

Soient A = $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ et B = $(b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ deux matrices m×n, on définit l'addition des matrices par : A + B = $(a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$

Exemple: Soient les matrices A = $\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix}6 & 1 & 9\\2 & 0 & 4\end{pmatrix}$. On obtient : A + B = $\begin{pmatrix}3+6 & 4+1 & 5+9\\1+2 & 2+0 & 3+4\end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix}9 & 5 & 14\\3 & 2 & 7\end{pmatrix}$

Remarque: La somme de deux matrices de tailles différentes n'est pas définie.

Définition 2

La matrice nulle, notée $O_{m,n}$, est la matrice dont tous les éléments sont nuls.

La matrice opposée d'une matrice A est notée −A. Si A = $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$, alors −A = $(-a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$

Propriété 1

Si A, B et C sont des matrices de même ordre, alors nous avons:

- A + B = B + A (**commutativité**),
- A + (B + C) = (A + B) + C (**associativité**).

Rappels

Définition 3

On appelle matrice diagonale toute matrice carrée D =$(d_{ij})_{1\leq i\leq n}$ tel que i ≠ j ⇒ $d_{ij} = 0$.

Si on note $d_i = d_{ii}$, une matrice diagonale est de la forme:

$$D_n = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

On la note Diag(d_1, d_2, …. , d_n).

La **matrice identitée** d'ordre n, notée $\mathbf{I_n}$, est la matrice diagonale Diag(1, 1, …. , 1).

Définition 4

On dit qu'une matrice carrée A = $(a_{ij})_{1\leq i\leq n}$ est triangulaire supérieure (resp. inférieure) si i > j ⇒ a_{ij} = 0 (resp. si i < j ⇒ a_{ij} = 0).

Remarque : Une matrice triangulaire supérieure et inférieure est une matrice diagonale.

Propriété 2: *Si A ∈ $M_{m,n}$ (K), B ∈ $M_{n,p}$ (K), C ∈ $M_{p,q}$ (K), alors:*

- (A x B) x C = A x (B x C) (**associativité**).
- A x (B + C) = A x B + A x C (**distributivité**).

Si A ∈ $M_{m,n}$ (K), A x I_n = I_n x A = A

Remarque: A x B ≠ B x A, en général

Rappels

Définition 4 – Matrice transposée

Si A = $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ est une matrice de format m×n, on définit la matrice transposée de A, notée A^T par: $A^T = (a_{ji})_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le i\le m}}$

C'est donc une matrice n × m obtenue en échangeant lignes et colonnes de la matrice initiale.

Exemple: Soit la matrice *A* d'ordre 2 × 3 suivante $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, sa transposée est la matrice A^T d'ordre 3, 2 suivante:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Propriété 3

$(A^T)^T = A$, *si* $A \in M_{m,n}$ (K)

$(\alpha A)^T = \alpha . A^T$, *si* $\alpha \in K$ *et* $A \in M_{m,n}$ (K)

$(A + B)^T = A^T + B^T$, *si* $A, B \in M_{m,n}$ (K)

$(A\,xB)^T = B^T\ x\ A^T$, *si* $A \in M_{m,n}$ (K) et $B \in M_{n,p}$ (K)

Définition 5

Une matrice A est dite **symétrique** si $A^T = A$

Une matrice A est dite **antisymétrique** si $A^T = -A$

A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 \\ 3 & -1 & 0 \\ -9 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est symétrique ; B = $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique

Rappels

Définition 6 – *Matrice inversible, matrice singulière*
Une matrice carrée A ∈ M_n (K) est dite **inversible** ou **régulière** si elle est **symétrisable** pour le produit matriciel, autrement dit s'il existe une matrice B ∈ M_n (K) telle que A × B = B × A = I_n.
Remarques:
– *L'**inverse**, s'il existe, d'une matrice A est noté* A^{-1}.
– *Une matrice non régulière est dite **singuliere.***

Proposition 1
Soient A et B deux matrices inversibles, alors:
• A^{-1} *l'est aussi et* $(A^{-1})^{-1} = A$,
• A^T *l'est aussi et* $(A^T)-1$.
• $A \times B$ *l'est aussi et* $(A\ x\ B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

Rappels

Définition 3 - Déterminant d'une matrice d'ordre n

Soit A = $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ une matrice carrée d'ordre n. Etant donné un couple (i; j) d'entiers, 1 ≤ i; j ≤ n,

On note A_{ij} la matrice carrée d'ordre n − 1 obtenue en supprimant la **i-ième** ligne et la **j-ième** colonne de A.

On définit **le déterminant de A**, et on le note **det(A)**, par récurrence sur l'ordre de la matrice A :

1. si n = 1 : le déterminant de A est le nombre det(A) = a11,
2. si n > 1 : le déterminant de A est le nombre det(A) = $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{\mathbf{i+j}}\, a_{ij}\, \mathbf{det}(A_{ij})$ quelle que soit la ligne i, 1 ≤ i ≤ n,

ou, de manière équivalente, le nombre det(A) = $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{\mathbf{i+j}}\, a_{ij}\, \mathbf{det}(A_{ij})$ quelle que soit la colonne j, 1 ≤ j ≤ n.

Remarque:

Pour retrouver les signes de ces deux formules, on peut remarquer que la distribution des signes + et − avec la formule $(-1)^{\mathbf{i+j}}$ est donnée par:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Rappels

Exemple:

Soit A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ alors: det $(A_{11}) = a_{22}$; det $(A_{12}) = a_{21}$; det $(A_{21}) = a_{12}$; det $(A_{22}) = a_{11}$, et on peut calculer le det(A) par l'une des formule suivante:

1. $a_{11}\det(A_{11}) - a_{12} \det(A_{12}) = a_{11}\, a_{22} - a_{12}a_{21}$ (développement suivant la ligne i = 1)
2. $-a_{21}\det(A_{21}) + a_{22} \det(A_{22}) = - a_{21}\, a_{12} + a_{22}a_{11}$ (développement suivant la ligne i = 2)
3. $a_{11}\det(A_{11}) - a_{21} \det(A_{21}) = a_{11}\, a_{22} - a_{21}a_{12}$ (développement suivant la colonne j = 1)
4. $-a_{12}\det(A_{12}) + a_{22} \det(A_{22}) = -a_{12}\, a_{21} + a_{22}a_{11}$ (développement suivant la colonne j = 2)

Remarques:

Il convient d'utiliser cette définition après avoir fait apparaître sur une même rangée le plus possible de zéros sachant que:

– si deux colonnes (resp. deux lignes) sont identiques ou proportionnelles, alors **det(*A*) = 0**,

– si on échange deux colonnes (resp. deux lignes), alors le déterminant est changé en son opposé,

– on ne change pas un déterminant si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes).

Rappels

Exemple:

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ alors:

$\det(A_{11}) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 10$; $\det(A_{12}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 0$; $\det(A_{13}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 0$;

$\det(A_{21}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = -3$; $\det(A_{22}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5$; $\det(A_{23}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3$;

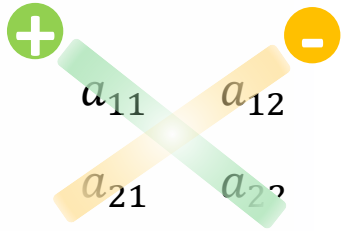
$\det(A_{31}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -2$; $\det(A_{32}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$; $\det(A_{33}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$;

et on peut calculer le det(A) par l'une des formule suivante:

1. $1 \times \det(A_{11}) - 0 \times \det(A_{12}) + 1 \times \det(A_{13}) = 10 + 0 + 0 = 10$
2. $-0 \times \det(A_{21}) + 2 \times \det(A_{22}) - 0 \times \det(A_{23}) = 0 + 10 + 0 = 10$
3. $0 \times \det(A_{31}) - 3 \times \det(A_{32}) + 5 \times \det(A_{33}) = 0 + 0 + 10 = 10$
4. $1 \times \det(A_{11}) - 0 \times \det(A_{21}) + 0 \times \det(A_{31}) = 10 + 0 + 0 = 10$
5. $0 \times \det(A_{12}) + 2 \times \det(A_{22}) - 3 \times \det(A_{32}) = 0 + 10 + 0 = 10$
6. $1 \times \det(A_{13}) - 0 \times \det(A_{23}) + 5 \times \det(A_{33}) = 0 + 0 + 10 = 10$

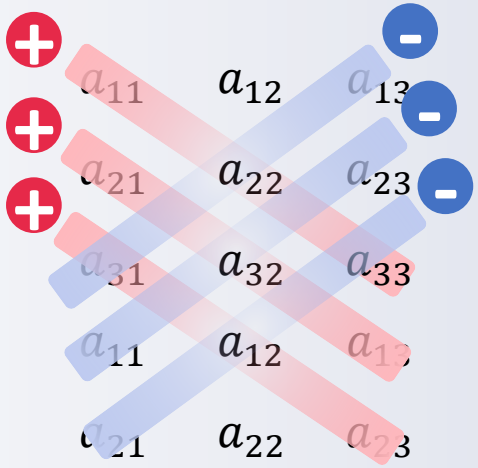
Rappels

Proposition 2
Soit A une matrice carrée d'ordre n = 2. Le déterminant de A peut se calculer à l'aide de la technique suivante :



Exemple:
Soit la matrice A = $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, det(A) = -2x5 – 1x3 = -14

Proposition 3 - *Déterminant d'une matrice d'ordre 3 :* ***Règle de Sarrus***
Soit A une matrice carrée d'ordre n = 3. Le déterminant de A peut se calculer à l'aide de la technique suivante :



Exemple:
Soit la matrice A = $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ ⟶ $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \\ 5 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

det(A) = (5 x 3 x 6 + 4 x 1 x 1 + 2 x 7 x 2) – (1 x 3 x 2 + 2 x 1 x 5 + 6 x 7 x 4)
= 122 – 184 = -62

Rappels

Propriété 4
Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux.

Théoreme 1 A est inversible si et seulement si det(A) ≠ 0.

Propriété 5

$\det(\boldsymbol{A^T}) = det\ (A)$

$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

det (A x B) = det(A). Det(B)

Définition 4 – *Rang d'une matrice*
Le rang d'une matrice quelconque A est égal au plus grand entier ***s*** tel que l'on puisse extraire de A une matrice carrée d'ordre ***s*** inversible, c'est-`a-dire de déterminant non nul. Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes (ajout à une colonne - resp. une ligne - une combinaison linéaire des autres colonnes - resp. lignes) d'une matrice ne modifient pas le rang.

Exemple:

Soit la matrice suivante A = $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1/2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, Rang = 2.

Rappels

Proposition 4

Pour une matrice A, nous avons:

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Com}\,(A)^T$, tel que Com(A) est la matrice des cofacteurs (aussi appelée comatrice).

Définition 5

Soit A = (a_{ij}) une matrice carrée d'ordre n.

La comatrice Com(A) est la matrice formée par tous les cofacteurs :

Com (A) = $\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$, Le cofacteur $\mathbf{C_{ij}}$ est défini par :

$$\boldsymbol{C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})}$$

Remarque:

Cette méthode est plutôt pratique pour les petites matrices (2×2 ou 3×3)

Proposition 5

Pour une matrice carrée A d'ordre 2, nous avons:

A= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, si $ad - bc \neq 0$

Rappels

Définition 6 – L'inverse d'une matrice : la méthode de Gauss-Jordan

Soit A = (a_{ij}) une matrice carrée d'ordre n.

Pour trouver A^{-1}, On applique des opérations élémentaires sur les lignes :

1. Former la matrice augmentée $[A|I_n]$.
2. Réduire A en I_n par des opérations élémentaires.
3. Ce qui reste à droite devient A^{-1}.

Exemple:

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $[A|I_n] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

L3 ← L3 – 5L1, ça donne = $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right)$

L3 ← L3 + 4L2, ça donne = $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right)$

L1 ← L1 - 2L2, ça donne = $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right)$

L2 ← L2 - 4L3, ça donne = $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right)$

L1 ← L1 + 5L3, ça donne = $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right)$

$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Rappels

Exemple: Méthode de comatrice

Soit la matrice A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$,

Det (A) = 1 det $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ + 5 det $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ = -24 + 25 = 1

Com (A)= $\begin{pmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, Com $(A)^T$ = $\begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

A^{-1} = $\begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Idée générale de la méthode

01

Trouver une solution de base réalisable (**SBR**): on appelle ça la solution **de départ** (par ex. avec la méthode des variables artificielles)

Principe du simplexe

02

Vérifier l'optimalité : si la SBR est optimale → fin. Sinon, il faut chercher une autre SBR adjacente qui améliore la valeur de la fonction objectif.

03

Itérer : répéter le processus jusqu'à atteindre une SBR optimale..

Formulation mathématique

On a le problème standard:

Z = $C^T . x$

Sous contraintes:

Bx_b + E x_e = b

x_b : variables de base (associées à la matrice B).

x_e : variables hors base (associées à la matrice E).

Comme B est inversible (base), on peut exprimer :

$x_b = B^{-1}.(b - \mathrm{E}\, x_e)$

En remplaçant dans la fonction objectif :

Z = $c_b^T x_b + c_e^T x_e$, on obtient:

Z = $c_b^T B^{-1} b + (c_e^T - c_b^T B^{-1}\mathrm{E})\, x_e$

Choix de la variable entrante

On définit donc le coût réduit:
$\bar{c_e}^T = c_e^T - c_b^T B^{-1}$E (coefficient de variable hors base x_e)

- $\bar{c_e}^T$ mesure l'effet d'une augmentation de la variable hors base x_e sur la valeur de Z.
- Si tous les $\bar{c_e} \leq 0$ (dans le cas d'une maximisation), cela signifie qu'aucune variable hors base ne peut améliorer la solution → la solution est optimale.
- Si un $\bar{c_e} > 0$, alors on peut améliorer la solution en faisant entrer la variable correspondante dans la base.

C'est donc le critère **d'optimalité**.

Choix de la variable entrante

On choisit une variable x_k telle que $\overline{c_k} > 0$. Quand on augmente x_k, les variables de base changent selon :

$$x_b = B^{-1}.(b - A_k\, x_k) = B^{-1}b - B^{-1}A_k\, x_k$$

où : A_k est la colonne correspondante à x_k
On pose: $\boldsymbol{P} = B^{-1}A_k$: est la colonne pivot associée à la variable candidate x_k
et $\overline{\boldsymbol{b}} = B^{-1}b$: le vecteur des valeurs **actuelles** des variables de base, Donc : $x_b = \overline{b} - P\, x_k$

Choix de la variable sortante

Comme les $x_b \geq 0$ (contrainte de positivité), il faut : $\overline{b} - P\, x_k \geq 0$, il y a deux cas:

Si P > 0, on peut augmenter x_k jusqu'à une certaine limite donnée par la **règle du rapport minimum** :

$x_k = min_{p_i>0} \frac{\overline{\boldsymbol{b}_i}}{p_i}$; la variable correspondante x_{b_i} quitte la base (Celle qui atteint son zéro en premier (le minimum) est la première à être violée si on augmente encore x_k).

Si P ≤ 0, alors en augmentant x_k , la composante x_{b_i} ne décroît pas (elle augmente ou reste constante). Elle ne met donc aucune limite à la croissance de x_k . on peut envoyer $x_k \to +\infty$ tout en restant faisable.

Une variable entrante doit avoir un **coût réduit négatif** $\overline{c_k}$ (pour un problème de maximisation), cela dit: $Z = Z_0 + \overline{c_k}\, x_k$; En ce cas la solution est non bornée. x_k tend vers $+\infty$ et Z vers $-\infty$.

Exemple 1

Soit le PL suivant:

$$\begin{cases} Z_{max} = X_1 + 4X_2 \\ 4X_1 + 2X_2 \leq 36 \ldots\ldots\ldots (1) \\ 3X_1 + X_2 \leq 25 \ldots\ldots\ldots (2) \\ 2X_1 + 2X_2 \leq 12 \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Forme standard:

$$\begin{cases} Z_{max} = X_1 + 4X_2 \\ 4X_1 + 2X_2 + X3 = 36 \\ 3X_1 + X_2 + X4 = 25 \\ 2X_1 + 2X_2 + X5 = 12 \end{cases}$$

1ère Itération:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 36 \\ 25 \\ 12 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons:

B = $I_3 \Rightarrow B^{-1} = I_3$, Base= (**X3, X4, X5**)

$\bar{b} = B^{-1}b$ = b

c_b = (0, 0, 0)

$\bar{c_e}^T = c_e^T - c_b^T B^{-1}E = c_e^T$ = (1, 4)

- Variable entrante c'est $\mathbf{X_2}$ (plus grand coef dans c).

- P = B^{-1} A_{x2} = $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\frac{\bar{b}}{P} = (\frac{36}{2}, \frac{25}{1}, \frac{12}{2}) \Rightarrow$ X5 quite la base

Exemple 1

2ème Itération:

B= (x3, x4, x2)

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \text{Com}\,(B)^T$, $\text{Com(B)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 36 \\ 25 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 19 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\bar{c_e}^T = c_e^T - c_b^T B^{-1}$E (Toujours le coefficient des variables de base est = 0 dans la fonction objectif)

On calcule donc pour x1, x5:
Nous avons: c_b^T = (0,0,4) / Base ={x3,x4,x2} et Z = x1 + 4x2
Variables hors-base : {x1, x5} c_e^T = (1,0)

$\bar{c_e}^T = c_e^T - c_b^T B^{-1}\text{E} = (1,0) - (0,0,4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,0) - (0,0,4).\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} = (1,0) - (4,2) = (-3, -2)$

Tous les coûts réduits des variables hors-base soient ≤ 0
donc optimum atteint: **x1 = 0, x2 = 6, Z = 24**

Exemple 2

Soit le PL suivant:

$$Z_{max} = 60X_1 + 35X_2 + 20X_3$$

$$8X_1 + 6X_2 + X_3 \leq 48 \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$4X_1 + 2X_2 + \frac{3}{2}X_3 \leq 20 \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$2X_1 + \frac{3}{2}X_2 + \frac{1}{2}X_3 \leq 8 \ldots\ldots (3)$$

$$X_2 \leq 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Forme standard:

$$Z_{max} = 60X_1 + 35X_2 + 20X_3$$

$$8X_1 + 6X_2 + X_3 + X_4 = 48$$

$$4X_1 + 2X_2 + \frac{3}{2}X_3 + X_5 = 20$$

$$2X_1 + \frac{3}{2}X_2 + \frac{1}{2}X_3 + X_6 = 18$$

$$X_2 + X_7 = 5$$

1ère Itération:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 60 \\ 35 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons:

$B = I_4 \Rightarrow B^{-1} = I_4$,

$\bar{b} = B^{-1}b = b$

$c_b = (0, 0, 0, 0)$

$\bar{c_e}^T = c_e^T - c_b^T B^{-1} E = c_e^T = (60, 35, 20, 0, 0, 0, 0)$

- Variable entrante c'est $\mathbf{X_1}$ (plus grand coef dans c).

- $P = B^{-1} A_{x1} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{\bar{b}}{P} = \left(\frac{48}{8}, \frac{20}{4}, \frac{8}{2}, \frac{5}{0}\right) \Rightarrow$ X6 quite la base

Exemple 2

2ème Itération:

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $[B \mid I_4] = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

(1). L1 = L1 -4L3 = $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

(2). L2 = L2 -2L3 = $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

(3). L3 =L2/2= $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcul des coûts réduit:

$\bar{c_e}^T = c_e^T - c_b^T B^{-1} E$, B = {x4,x5,x1,x7} : c_b^T = (0, 0, 60, 0) et c_e^T = (35,20,0)

Donc : $\bar{c_e}^T$ = (35,20,0) – (0, 0, 60, 0) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 2 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ = (35,20,0) – (0, 0, 60, 0) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ -1 & 1/2 & -2 \\ 3/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

= (35,20,0) – (45,15, 30) = (-15, 5, -30)

Exemple 2

2ème Itération:

B = {x4,x5,x1,x7}

$\overline{c_{x3}}$ = 5 > 0 ⇒ x3 entre en base.

Nous avons :

$$\bar{b} = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$P = B^{-1}\, A_{x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1/2 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\frac{\bar{b}}{P} = (\frac{16}{-2}, 4 * 2, 4 * 4, \frac{5}{0})$ ⇒ X5 quite la base

Exemple 2

3ème Itération:

B = {x4, x3,x1,x7}

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 3/2 & 4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \text{Com}\,(B)^T, \quad \text{Com(B)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1/2 & 0 \\ -8 & -4 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul des coûts réduit:

$$\overline{c_e} = c_e - c_b . B^{-1}\text{E} = (35,0,0)-(0,20,60,0). \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (35,0,0)-(0,20,60,0). \begin{pmatrix} -2 & 2 & -8 \\ -2 & 2 & -4 \\ 5/4 & -1/2 & 3/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(35,0,0)-(35, 10,10) = (0, -10, -10)

Tous les coûts réduits des variables hors-base soient ≤ 0. donc optimum atteint

$$x_b = B^{-1}\,\text{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ **X1 = 2, X2 = 0 et x3= 8, avec Z= 280**

Exemple 2

3ème Itération:

X2 est une variable hors base qui est null, cela signale optimalité multiple : il existe une arête (segment) de solutions optimales reliant la solution courante à la solution où $x2$ entrerait.

$$P = B^{-1} A_{x2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 5/4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Avec : B = {x4, x3,x1,x7}

$$\bar{b} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \frac{\bar{b}}{P} = \left(\frac{24}{-2}, \frac{8}{-2}, \frac{8}{5}, 5\right) \Rightarrow X1 \text{ quite la base}$$

Exemple 2

4ème Itération:

Base = {x4, x3,x2,x7}

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 3/2 & 2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 6/5 & -28/5 & 0 \\ 0 & 6/5 & -8/5 & 0 \\ 0 & -2/5 & 6/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & -6/5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 6/5 & -28/5 & 0 \\ 0 & 6/5 & -8/5 & 0 \\ 0 & -2/5 & 6/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & -6/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 48 + 24 - (28 * 8/5) \\ 24 - 64/5 \\ -8 + 48/5 \\ 8 - \frac{48}{5} + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 136/5 \\ 56/5 \\ 8/5 \\ 17/5 \end{pmatrix} \Rightarrow \textbf{X1 = 0, X2 = 8/5 et x3= 56/5, Z = 280}$$

Simplexe REVISÉE



1918 - 1989

William Orchard-Hays fut un pionnier de la programmation mathématique au sein de la RAND Corporation dans les années 1950. Il joua un rôle crucial dans l'adaptation de l'algorithme du simplexe pour les ordinateurs, en développant des implémentations pratiques et efficaces. Son travail fut fondamental pour transformer la méthode théorique de Dantzig en un outil computationnel puissant.



1914 - 2005

George Dantzig était un mathématicien et statisticien américain considéré comme le "père de la programmation linéaire". En 1947, il développa l'algorithme du simplexe, une méthode révolutionnaire pour résoudre des problèmes d'optimisation aux multiples contraintes.

Méthode du simplexe révisée

Simplexe Révisée

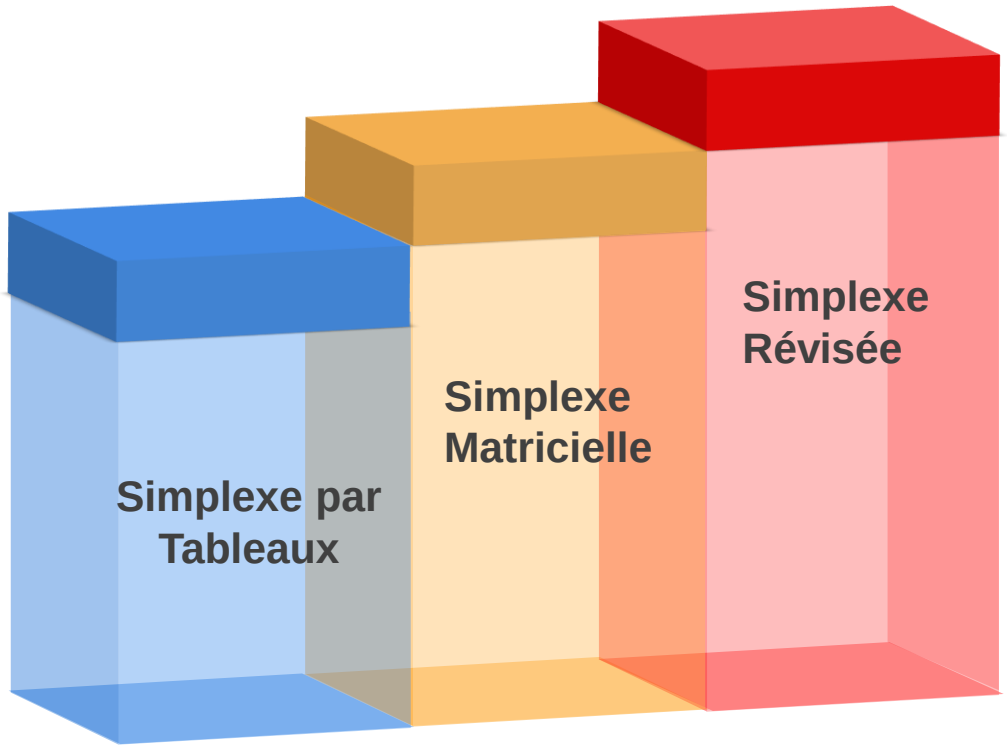
1. Optimisation numérique : **Ne calcule jamais B^{-1}**
2. **Met à jour B efficacement** (Factorisation LU, Matrice de rang un)
3. Utilisée par les solveurs (CPLEX, Gurobi, etc.)
4. **Adaptée aux grands PL.**
5. **Évite les calculs redondants → rapide et robuste**

Simplexe Matricielle

1. Montre la structure algébrique du simplexe
2. Utilise B et E pour exprimer formules
3. **Souvent calcule B^{-1} explicitement**
4. Bon pour démonstrations et compréhension théorique.

Simplexe par Tableaux

1. Recalcule tout le tableau à chaque itération (y compris des colonnes inutiles).
2. Pratique pour petits exemples.
3. Lourde en calculs → inefficace pour grands PL
4. Manipule directement les coefficients des contraintes et Z



Formulation Matricielle du Problème

Un problème de programmation linéaire sous forme standard est représenté comme :
min ou max $Z = C^T.x$
Sous contraintes:
$A\,x = b$
Avec:
$X \geq 0$

Où:

- **A** est une matrice m×n de rang plein,
- **b** est un vecteur de ressources (m×1),
- C est un vecteur de coûts (n×1).

Remarque:
On dit que A est **de rang plein** si : rang(A)=min(m,n).
Ex. Si A est une matrice **carrée** (m=n) :
Rang plein ⟺ rang(A)=n.
Cela veut dire que A est **inversible**.

Principes de la Méthode Révisée

Base et Variables Basiques

- Une base **B** est une sous-matrice m×n inversible de **A**, correspondant aux variables basiques x_b.
- Les variables hors-base x_N sont fixées à zéro.

Calculs Essentiels

Solution basique : $x_b = B^{-1}b$.

Direction de descente (si $r_j < 0$) :
$d = B^{-1}a_j$ (a_j est la colonne entrante)

Coûts réduits :
$r_N^T = c_N^T - c_b^T B^{-1}N$; où **N** est la sous-matrice hors-base.

Colonne sortante (si $d_i > 0$) :
$a_k = \min \frac{x_b}{d}$

La variable entrante remplace une variable sortante dans la nouvelle base via **le critère de ratio**.

Mise à jour efficace de la base | Méthode algébrique

Soit B une base inversible (ancienne base) composée de vecteurs a_1, a_1,..., a_p,..., a_m:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

Soit x_p la variable sortante, on obtient une nouvelle base B1 en remplaçant le vecteur a_p (à la position p) par un nouveau vecteur p (qui correspond à la variable entrante):

$$B_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & p_{1p} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & p_{mp} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

Il est à noter que **tout vecteur p** $\in \mathbb{R}^m$ (y compris le vecteur entrant) peut s'écrire comme une combinaison linéaire **des colonnes de B** (ancienne base)

$$p = y_1 a_1 + y_2 a_2 + \ldots + y_m a_m = By \Rightarrow y = B^{-1}p$$

Mise à jour efficace de la base | Méthode algébrique

- Le vecteur p peut s'écrire comme une combinaison linéaire **des colonnes de B**

$$p = By = \sum_{j=1}^{m} y_j a_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{m} y_j a_j + y_p a_p$$

- $$\Rightarrow a_p = \frac{1}{y_p} p - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{m} \frac{y_j}{y_p} a_j$$

  Cela montre que l'ancien vecteur a_p **peut s'exprimer** comme une combinaison linéaire des colonnes de la **nouvelle** base B_1 (c'est l'ancienne base en faisant sortir a_p et entrer p).

- On définit un vecteur v_p dont les composantes sont les coefficients de cette combinaison linéaire :

$$v_p = \left(-\frac{y_1}{y_p}, -\frac{y_2}{y_p}, \dots, \frac{1}{y_p}, \dots, -\frac{y_m}{y_p} \right)^T$$

- où le terme $\frac{1}{y_p}$ est à la position **p**. On peut alors écrire : $a_p = B_1 v_p$

Mise à jour efficace de la base | Méthode algébrique

On sait très bien que la nouvelle base n'est rien d'autre que l'ancienne base en lui rajoutant un seul vecteur entrant p.

Autrement dit, **l'ancienne** base est composée de toutes les colonnes **de la nouvelle base B1** sauf sa **p-ième colonne (vecteur sortant)**. Ce dernier a déjà été exprimé en fonction de B1 ($a_p = B_1 v_p$).

On se retrouve donc avec:

$B = B_1 E$, tel que :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & -\frac{y_1}{y_p} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & -\frac{y_2}{y_p} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{y_p} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{y_m}{y_p} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple: Prenons m=2, B=(a_1 , a_2), et remplaçons a_2 par p pour obtenir B_1 =(a_1 , p).

Soit p= $y_1 a_1 + y_2 a_2$. (combinaison linéaire de la base B) Alors :

$$a_2 = \frac{1}{y_2} p - \frac{y_1}{y_2} a_1, \text{ donc } v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{y_1}{y_2} \\ \frac{1}{y_2} \end{pmatrix} \text{ et } E = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{y_1}{y_2} \\ 0 & \frac{1}{y_2} \end{pmatrix}$$

$$B_1 E = (a_1 , p). \begin{pmatrix} 1 & -\frac{y_1}{y_2} \\ 0 & \frac{1}{y_2} \end{pmatrix} = (a_1 . 1 + 0 . p, -a_1 . \frac{y_1}{y_2} + p . \frac{1}{y_2}) = (a_1 , a_2) = B$$

Mise à jour efficace de la base | Méthode algébrique

En inversant la relation $B = B_1 E$, on obtient:

$B^{-1} = (B_1 E)^{-1} = E^{-1}.B_1{}^{-1}$ d'où: $B_1{}^{-1} = E.B^{-1}$

De façon plus générale:

Si x_j est la colonne entrante, on a: $d = B_{old}^{-1} x_j$

$$\mathbf{B_{new}^{-1} = E\, B_{old}^{-1}}$$

Tel que E est la matrice identité dont la $r^{ième}$ colonne est remplacée par:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix}, \text{ tel que } \eta_i = \begin{cases} -\frac{d_i}{d_k}, si\ i \neq k \\ \frac{1}{d_k}, si\ i = k \end{cases}$$

k est le numéro d'équation contenant la variable de base sortante

$$Z_{max} = 3X_1 + 5X_2 + 2X_3$$

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 10 \ \ldots\ldots\ldots (1) \\ 2X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 15 \ \ldots\ldots\ldots (2) \\ X_1 + X_2 + X_3 \leq 8 \ \ldots\ldots (3) \\ X_2 \leq 5 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4) \\ X_1 , X_2 , X_3 \geq 0 \end{cases}$$

Forme standard:

$$Z_{max} = 3X_1 + 5X_2 + 2X_3$$

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 = 10 \\ 2X_1 + 3X_2 + 2X_3 + X_5 = 15 \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_6 = 8 \\ X_2 + X_7 = 5 \\ X_1 , X_2 , X_3, X_4 , X_5 , X_6 , X_7 \geq 0 \end{cases}$$

1ère Itération:

Base = $\{X_4 , X_5 , X_6 , X_7\}$

$B_0 = I_4 \Rightarrow B_0^{-1} = I_4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} , \ x_b = B_0^{-1} b = b$$

Coûts réduits:

$r_N^T = c_N^T - c_b^T B^{-1} N = c_N^T = (3,5,2)$ (coûts des variables basique = 0)

$\max(3,5,2) = 5 \Rightarrow \mathbf{X_2}$ entre en base

$\min(\frac{10}{2}, \frac{15}{3}, , \frac{8}{1}, \frac{5}{1}) = 5 \Rightarrow \mathbf{X_4}$ quitte la base (choix arbitraire entre X_4 , X_5 , X_7)

$d = B^{-1} A x_2 = A x_2$

2ème Itération:

Base = $\{X_2, X_5, X_6, X_7\}$

$\mathbf{B_1^{-1} = E\, B_0^{-1} = E}$

$$\mathbf{B_1^{-1}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x_b = B_1^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cout réduits:

$$r_N^T = c_N^T - c_b^T B^{-1} N = (3, 2, 0) - (5,0,0,0) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (3, 2, 0) - (5,0,0,0) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$= (3, 2, 0) - (5/2, 5/2, 5/2) = (1/2, -1/2, -5/2) \Rightarrow X_1$ entre en base.

$$B_1^{-1}.Ax_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$\min(\frac{5}{1/2}, 0, \frac{3}{1/2}, 0) = \mathbf{X_5}$ quitte la base (choix arbitraire entre X_5 , X_7)

3ème Itération:

Base = $\{X_2, X_1, X_6, X_7\}$

$\mathbf{B_2^{-1} = E\, B_1^{-1}}$ $\quad \mathbf{B_2^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Couts réduits:

$r_N^T = c_N^T - c_b^T B^{-1} N = (2, 0, 0) - (5,3,0,0). \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (2, 0, 0) - (1,1,0,0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

= (2, 0, 0) – (3, 1, 1) = (-1, -1, -1) donc Tous les coûts réduits hors-base $\leq 0 \Rightarrow$ optimalité atteinte.

$x_b = B_2^{-1} b = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Solution optimale:

$X_1 = 0, X_2 = 5, X_3 = 0$ et $Z = 25$

Dualité
et analyse de sensibilité



1903 - 1954

Le père de la dualité en programmation linéaire est généralement reconnu comme étant John von Neumann. Il fait le parallèle entre un problème d'optimisation (primal) et la théorie des jeux.



1905 - 1995

Albert W. Tucker et ses étudiants David Gale et Harold W. Kuhn ont formalisé et rigoureusement prouvé les théorèmes de dualité tels que nous les connaissons aujourd'hui.

Principe de la dualité



DATA CENTER

Supposons qu'une entreprise possède un **datacenter** avec ***m*** serveurs et souhaite héberger ***n*** applications.

→ Chaque application ***j*** rapporte un **gain** c_j si elle est déployée.

→ Déployer une application consomme une certaine quantité de ressources de type CPU, RAM, stockage, etc.

→ Notons a_{ij} = quantité de ressource ***i*** nécessaire pour exécuter l'application ***j***.

→ Chaque serveur ***i*** dispose d'une capacité maximale b_i.

Formation Primal

Quelles applications déployer pour maximiser le gain total sans dépasser les ressources disponibles ?

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Sous contraintes:

$$\sum_{j}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$

$$x_j \in \{0,1\}$$

Maintenant, imaginons une société de cloud concurrente qui veut **racheter la capacité de ce datacenter**.
Elle se demande : **quel est le prix minimal que je peux offrir pour chaque ressource (CPU, RAM, stockage) de façon à couvrir la valeur de toutes les applications possibles** ?

→ On introduit une variable y_i = prix unitaire que l'acheteur paie pour la ressource ***i***.

Formation Dual

→ Pour chaque application ***j***, le **coût en ressources** doit être **au moins égal** au gain c_j, sinon l'entreprise n'a aucun intérêt à céder ses ressources.

$$\min W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Sous contraintes:

$$\sum_{j}^{n} a_{ij} y_i \geq c_j$$

$$y_i \geq 0$$

Principe de la dualité

Une entreprise gère un réseau informatique avec m liens (câbles, canaux, connexions sans fil). On doit faire passer n flux de données (applications, utilisateurs).

→ Chaque flux j rapporte une **valeur** c_j (ex. importance de l'utilisateur ou revenu généré).

Pour envoyer ce flux sur le réseau, il consomme une partie de la capacité de certains liens.

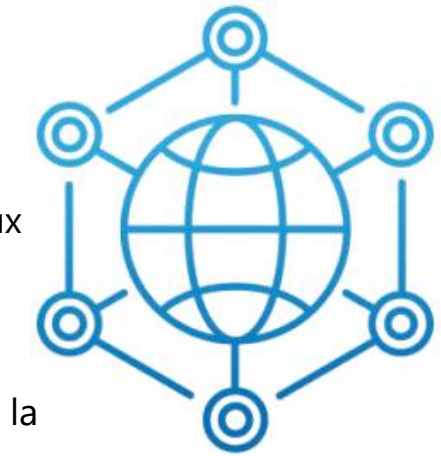
→ a_{ij} =quantité de bande passante consommée sur le lien i par le flux j

→ Chaque lien i a une capacité maximale b_i (en Mbps).

Quels flux de données admettre dans le réseau pour maximiser la valeur totale sans saturer les liens ?

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \begin{cases} \text{Sous contraintes:} \\ \sum_{j}^{n} a_{ij} x_j \leq b_j \\ x_j \in \{0,1\} \end{cases}$$

où x_j =1 si le flux j est accepté, 0 sinon.



Enterprise Network



Maintenant, imaginons un **opérateur télécom** qui doit fixer un prix par unité de bande passante pour chaque lien du réseau.

→ Soit y_i = prix par unité de bande passante sur le lien i.

→ Pour chaque flux j, le coût en bande passante (pondéré par les prix y_i) doit être au moins égal à la valeur c_j du flux, sinon il ne vaut pas la peine de l'accepter.

Quel prix attribuer à chaque lien du réseau pour que tout flux soit correctement valorisé, et pour que le coût global soit minimal ?

$$\min W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \quad \begin{cases} \text{Sous contraintes:} \\ \sum_{j}^{n} a_{ij} y_i \geq c_j \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

Principe de la dualité

Entreprise 1

Elle fabrique 2 types de drones :
- x_1 =drones de surveillance.
- x_2 =drones de livraison.

Profit unitaire :
- chaque x_1 rapporte **3 k€**
- chaque x_2 rapporte **5 k€**

Contraintes de ressources :
- Carte électronique : max **4 unités** disponibles
- Moteur : max **12 unités** disponibles



Consommation par drone :
- Type x_1 consomme **1 carte + 2 moteurs**
- Type x_2 consomme **2 cartes + 3 moteurs**

Problème Primal : $Z_{max} = 3X_1 + 5X_2$

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 \leq 4 \\ 2X_1 + 3X_2 \leq 12 \\ X_1 , X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Entreprise 2



Elle veut racheter l'entreprise 1, elle fixe les prix des ressources :
- y_1 =prix unitaire d'une carte électronique
- y_2 =prix unitaire d'un moteur

Son but : **minimiser** le coût total payé pour les ressources disponibles : $\min W = 4y_1 + 12y_2$

Mais attention : elle doit fixer ses prix de manière à ce que son offre intéresse l'entreprise 1

Contraintes:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ 2y_1 + 3y_2 \geq 5 \end{cases} \qquad y_1 , y_2 \geq 0$$

Construction du programme Dual

Considérons un programme linéaire sous la forme canonique appelée **programme primal** :

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \begin{cases} \sum_{j}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & , i \in \{1, \ldots, m\} \\ x_j \geq 0 & , j \in \{1, \ldots, n\} \end{cases}$$

Le programme dual à m variables notées y_1 ,…., y_m (rangées sous la forme d'un vecteur ligne) s'écrit:

$$\min W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad \begin{cases} \sum_{j}^{n} a_{ij} y_i \geq c_j & , j \in \{1, \ldots, n\} \\ y_i \geq 0 & , i \in \{1, \ldots, m\} \end{cases}$$

On constate la correspondance suivante entre les deux problèmes :

Problème primal	Problème dual
maximisation	minimisation
n variables (vecteur colonne)	n contraintes
m contraintes	m variables (vecteur ligne)
variable n° $j \geq 0$	contrainte n° j « ≥ »
contrainte n° i « ≤ »	variable n° $i \geq 0$
(ligne de) coefficients fonction objectif	Second membre
Second membre	(colonne de) coefficients fonction objectif

Construction du programme Dual

Exemple

$$Z_{max} = X_1 + 3X_2$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \leq 14 \ldots\ldots\ldots (1) \\ -2X_1 + 3X_2 \leq 12 \ldots\ldots\ldots (2), X_1 , X_2 \geq 0 \\ 2X_1 - X_2 \leq 12 \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Dual

$$W_{min} = 14y_1 + 12y_2 + 12y_3$$

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 + 2y_3 \geq 1 \ldots\ldots\ldots (1) \\ y_1 + 3y_2 - y_3 \geq 3 \ldots\ldots\ldots (2) \\ y_1 , y_2 , y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Remarque

Le PL initial doit être mis sous forme canonique avant de déterminer son dual, ainsi dans l'exemple qui suit,

$$\begin{cases} Z_{max} = 2X_1 - 4X_2 \\ 3X_1 + X_2 \leq 10 \ldots\ldots (1) \\ 4X_1 - 3X_2 \geq 8 \ldots\ldots (2) \\ X_1 - X_2 \geq 6 \ldots\ldots\ldots (3) \\ X_1 , X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Forme canonique

$$\begin{cases} Z_{max} = 2X_1 - 4X_2 \\ 3X_1 + X_2 \leq 10 \ldots\ldots (1) \\ -4X_1 + 3X_2 \leq -8 \ldots\ldots (2) \\ -X_1 + X_2 \leq -6 \ldots\ldots\ldots (3) \\ X_1 , X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Dual

$$W_{min} = 10y_1 - 8y_2 - 6y_3$$

$$\begin{cases} 3y_1 - 4y_2 - y_3 \geq 2 \ldots\ldots\ldots (1) \\ y_1 + 3y_2 + y_3 \geq -4 \ldots\ldots\ldots (2) \\ y_1 , y_2 , y_3 \geq 0 \end{cases}$$

On remarque bien que le problème dual est un problème de minimisation. Les tableaux de Simplexe s'appliquent de la même manière expliquée précédemment. La seule différence réside dans le choix de la colonne pivot qui se fait, en sélectionnant la variable qui a le coefficient **le plus bas(le plus petit)** dans la ligne de la fonction objective.

Propriétés de la dualité

On démontre facilement les résultats suivant:

- Le dual du problème dual c'est le problème primal.

- Si le primal est non borné, le dual est contradictoire. Si le primal est contradictoire, le dual est non borné ou contradictoire. (contradictoire veut dire n'a pas de solution faisable. Autrement dit, le système de contraintes du programme linéaire est **incompatible** : il n'existe **aucun vecteur de décision** qui satisfait simultanément toutes les contraintes.)

- Si le primal **admet une solution finie *x**** alors le dual **admet** une solution optimale finie ***y**** qui vérifie : $z(x^*) = w(y^*)$.

- A toute variable d'écart primale (resp. duale) positive correspond une variable structurelle duale (resp. primale) nulle. A toute variable structurelle primale (resp. duale) positive correspond une variable d'écart duale (resp. primale) nulle. On note, x_j (resp. y_i) les variables structurelles du primal (resp. dual) et t_i (resp. u_j) les variables d'écart du primal (resp. dual).

Remarque:
variables structurelles **= variables de décision d'origine** (dans le primal ou le dual).

Propriétés de la dualité

Théorème

Pour toute solution faisable $\boldsymbol{x}$ de (P) et toute solution faisable $\boldsymbol{y}$ de (D) on a:

$$Z = c^T x \leq b^T y = W$$

Autrement dit chaque valeur admissible du dual est un majorant pour chaque valeur admissible du primal.

Démonstration

On considère le primal (P) en forme **maximisation** :

$$\text{(P)} \quad \max \ c^T x \quad s.t. \ Ax \leq b, \quad x \geq 0,$$

Le dual correspondant (D) est alors (minimisation) :

$$\text{(D)} \quad \min \ b^T y \quad s.t. \ A^T y \geq c, \quad y \geq 0.$$

Nous avons: $A^T y \geq c \Leftrightarrow y^T A \geq c^T$

$$\Leftrightarrow y^T Ax \geq c^T x$$

On sait que: $Ax \leq b \Leftrightarrow y^T Ax \leq y^T b$

Donc : $c^T x \leq b^T y$

Propriétés de la dualité

Corollaire 1

Soit ***x**** une solution admissible du primal, et ***y**** une solution admissible du dual. Si ***c x**** = ***y*b***, alors ***x**** est une solution optimale de (P) et ***y**** est une solution optimale de (D).

A noter que la réciproque n'est pas évidente, à savoir que si ***x**** est une solution optimale du primal et **y*** une solution optimale du dual alors **les valeurs optimales coïncident**. C'est l'objet du théorème suivant qui est un résultat central de la programmation linéaire.

Théorème

Si le problème primal (P) a une solution optimale x^* alors le problème dual (D) a une solution optimale y* et les valeurs optimales coïncident, $c\,x^* = y^*b$
Autrement dit : $z^* = w^*$.

Du dernier tableau du primal au dernier tableau du dual

Au signe près, on a les correspondances suivantes :

1. Variable de base x_j (resp. hors base t_j) ⟷ Variable hors base u_j (resp. de base y_j)
2. Ligne x_j (resp. t_j) en base ⟷ Colonne u_j (resp. y_j) hors base.
3. Colonne x_j (resp. t_i) hors base ⟷ Ligne u_j (resp. y_i) en base.
4. Ligne $c_j - z_j$ (primal) ⟷ Ligne $z_i - b_i$ (Dual).

Du dernier tableau du primal au dernier tableau du dual

Exemple 1

		u_1	u_2	y_1	y_2	u_3	
		x_1	x_2	t_1	t_2	X_3	B
u_1	x_1	1	0	3/5	-1/5	0	6
u_2	x_2	0	1	2/5	1/5	0	8
u_3	X_3	0	0	-4/5	3/5	1	8
	Z	0	0	-9/5	-2/5	0	30

	y_1	y_2	u_1	u_2	u_3	B
y_1	1	0	-3/5	-2/5	4/5	9/5
y_2	0	1	1/5	-1/5	-3/5	2/5
Z	0	0	-6	-8	-8	-30

Du dernier tableau du primal au dernier tableau du dual

Exemple 2

		u_1	u_2	y_1	u_3	y_2	u_4	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	B
u_1	x_1	1	0	4/3	0	-1/3	0	40
u_3	x_4	0	0	-14/3	1	2/3	0	60
u_2	x_2	0	1	-1/3	0	1/3	0	110
u_4	x_6	0	0	-4/3	0	1/3	1	50
	-Z	0	0	-200/3	0	-100/3	0	-26000

	y_1	y_2	u_1	u_2	u_3	u_4	B
y_1	1	0	-4/3	1/3	14/3	4/3	200/3
y_2	0	1	1/3	-1/3	-2/3	-1/3	100/3
-Z	0	0	-40	-110	-60	-50	-26000

Relation Primal-Dual dans la méthode du simplexe révisée

Dans la méthode du simplexe révisée (idem pour la méthode matricielle), on ne manipule plus explicitement de tableaux complets, mais la **base courante** B et son inverse B^{-1}.
Les variables duales y sont obtenues par la relation : $\mathrm{y}^{\mathrm{T}} = c_B^T \ \mathrm{B}^{-1}$;
où c_B = vecteur des coûts des variables de base du **primal**.

Le lien primal-dual n'est pas visible dans un tableau (puisqu'il n'y en a pas), mais **dans les formules matricielles** :

- Le primal évolue avec les valeurs des $x_B = B^{-1}b$.
- Le dual évolue avec $y^T = c_B^T B^{-1}$

Relation Primal-Dual dans la méthode du simplexe révisée

Exemple 1

Problème primal (P) :

$$\max \quad Z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 8, \\ x_i \geq 0 \ (\mathrm{i} = 1, \dots, 4). \end{cases}$$

1. Le PL précédent est-il écrit sous forme canonique par rapport à une base réalisable ? Justifier votre réponse. Sinon, écrivez (P) sous forme canonique par rapport à une base réalisable.
2. Formuler le problème dual D de (P).
3. La base optimale de (P) est: $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & -1/4 \end{pmatrix}$

Calculer, **sans utiliser le simplexe**, la solution optimale de (P), celle de (D) ,ainsi que les valeurs optimales des fonctions objectifs de (P) et de (D).

Relation Primal-Dual dans la méthode du simplexe révisée

Exemple 1

Problème primal (P) :

$$\max \quad Z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 4, \\ x_1 + 4x_2 + x_4 & = 8, \\ x_i & \geq 0 \ (\mathrm{i} = 1, \dots, 4). \end{cases}$$



1. C'est vrai que les variables x_3 et x_4 forme une matrice identité I_2, mais ils ont des coefficients non nuls dans la fonct objectif. Donc le PL n'est pas écrit sous forme canonique.

   Pour le rendre sous forme canonique par rapport à B = $\{x_3 , x_4\}$, on effectue les substitutions suivantes:

   $x_3 = 4 - x_1 - x_2; x_4 = 8 - x_1 - 4x_2$

   En remplaçant dans la fonct obj on trouve: $Z = x_1 + 12x_2 - 8$

   La solution basique associée (prendre $x_1 = x_2 = 0$) est $x = (0, 0, 4, 8)$, réalisable.

Relation Primal-Dual dans la méthode du simplexe révisée

Exemple 1

Problème primal (P) :

$$\max \quad Z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 8, \\ x_i \geq 0 \ (\mathrm{i} = 1, \dots, 4). \end{cases}$$

2. Le Problème Dual correspondant:

$$\min \quad W = 4y_1 + 8y_2$$

$$s.t. \begin{cases} y_1 + y_2 \geq 2, \\ y_1 + 4y_2 \geq 4, \\ y_1 \geq 4 \\ y_2 \geq -3 \\ y_i \in \mathrm{R}. \end{cases}$$

3.1. La solution optimale pour (P):

Nous avons: A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Donc les variables **basiques** sont : x_2 et x_3.

Nous avons: $x_{\mathrm{B}} = \mathrm{B}^{-1}.\ \mathrm{b}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & -1/4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow x^* = (0,2,2,0)$ et $Z^* = 16$

3.2. La solution optimale pour (D):

Nous avons: $y^T = c_B^T B^{-1}$

$= (4, 4) \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & -1/4 \end{pmatrix} = (4, 0)$

$\Rightarrow y_1^* = 4 \ et y_2^* = 0 \ avec \ W^* = 16$

On a $\boldsymbol{Z^* = W^* = 16}$, confirmant l'optimalité.

Théorème des écarts complémentaires

Soient $\boldsymbol{x}$ réalisable pour (P) et $\boldsymbol{y}$ réalisable pour (D). Alors $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont optimaux (pour leurs problèmes respectifs) **si et seulement si** les conditions d'écarts complémentaires sont satisfaites :

$$\forall j\ x_j((A^T y)_j - c_j) = 0\ et\ \ \forall i\ y_i(b_i - (Ax)_i) = 0.$$

Autrement dit :

si $x_j > 0$ alors l'inégalité duale correspondante est **tendue** : $(A^T y)_j = c_j$.

si $y_i > 0$ alors l'inégalité primal correspondante est **tendue** : $(Ax)_i = b_i$.



Si une contrainte est serrée dans le primal alors la variable associée est dans la base du dual (et donc non nulle).
Si une contrainte n'est pas serrée dans le primal alors la variable associée n'est pas dans la base du dual (et donc nulle).

Théorème des écarts complémentaires



Idée simple : une porte et une serrure



Imaginez vous que nous avons une porte avec une serrure :

- La porte représente la **contrainte** (elle peut être **ouverte** = écart > 0, ou **fermée** = écart = 0).
- La clé (la variable x_j (ne peut tourner que si la porte est **fermée** pile au bon endroit.

Donc :

- Si la porte est **fermée pile** (écart = 0), alors la clé peut tourner (variable > 0).
- Si la porte est **ouverte** (écart > 0), alors la clé reste inutilisée (variable = 0).

C'est ça la **complémentarité** : **une seule des deux peut être "active" à la fois.**

Analyse de sensibilité

L'**analyse de sensibilité** (ou analyse post-optimale) étudie la **robustesse** d'une solution optimale lorsque certains paramètres du problème changent légèrement. Ces paramètres peuvent être :

1. Les coefficients de la fonction objectif c_j,
2. Les termes du second membre b_i,
2. Les coefficients de la matrice A

La dualité joue un rôle essentiel car elle donne **une interprétation économique** et des **formules directes** pour mesurer ces variations.

Analyse de sensibilité

Prix d'ombre (valeur marginale)

Les **prix d'ombre** (solutions optimales du dual) représentent la **valeur marginale** d'une ressource. Elle montre combien le critère objectif s'améliore si l'on augmente légèrement les b_i.

- Si $\boldsymbol{y_i^* = 0}$, cela signifie que la contrainte $\boldsymbol{i}$ n'est pas "rare" : une unité supplémentaire de ressource n'améliore pas la valeur optimale.
- Si $\boldsymbol{y_i^* > 0}$,alors cette ressource est "rare" et une augmentation **du membre droit** augmente la valeur optimale.

Pour une contrainte $\boldsymbol{i}$ avec b_i, la variable duale correspondante est :

$$y^* = c_B^T B^{-1}$$

et donc le **prix d'ombre** (valeur marginale de la ressource i) est :

$$\pi_i = y_i^* = \textit{composante } i \textit{ de } (c_B^T B^{-1})$$

Si $\boldsymbol{y_i^*}$ est la valeur optimale de la variable duale associée à la contrainte i, alors une variation de $\boldsymbol{\Delta b_i}$ entraîne une variation de $(\boldsymbol{y_i^* \cdot \Delta b_i})$ de la valeur optimale (tant qu'on reste **dans l'intervalle de validité**).

Analyse de sensibilité

Intervalle de validité du RHS (Right Hand Side) b_i

Pour chaque contrainte i, l'intervalle admissible de b_i se calcule via :

$$x_B = B^{-1}b$$

où x_B est la solution de base optimale.

Si on modifie b en $b + \Delta b$, alors :

$$x_B(\Delta b) = B^{-1}(b + \Delta b) = x_B + B^{-1}\Delta b$$

Pour que la base reste faisable, on doit avoir :

$$x_B(\Delta b) \geq 0$$

Ce qui donne :

$\Delta b_i^{\min} = \max_k \left\{ -\frac{(x_B)_k}{(B^{-1})_{k,i}} : (B^{-1})_{k,i} > 0 \right\}$, $\Delta b_i^{\max} = \min_k \left\{ -\frac{(x_B)_k}{(B^{-1})_{k,i}} : (B^{-1})_{k,i} < 0 \right\}$; Donc l'intervalle de validité est :

$$b_i + \Delta b_i^{\min} \leq b_i' \leq b_i + \Delta b_i^{\max}$$

Conventions : si l'ensemble des indices k avec $(B^{-1})_{k,i} > 0$ est vide alors $\Delta b_i^{\min} = -\infty$;
si l'ensemble des indices k avec $(B^{-1})_{k,i} < 0$ est vide alors $\Delta b_i^{\max} = +\infty$.

Analyse de sensibilité — Exemple 1

Reprenant l'exemple de fabrication de drones.

Une entreprise fabrique 2 types de drones :
- x_1 =drones de surveillance qui rapporte **3 k€** et qui nécessite **1 carte électronique + 2 moteurs**
- x_2 =drones de livraison qui rapporte **5 k€** et qui nécessite **2 carte électronique + 3 moteurs**

Cartes électroniques : **04 unités** disponibles et Moteurs : **12 unités** disponibles.

Problème primal (P) :

$$\max \quad Z = 3x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & \leq 4, \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq 12, \\ x_1, x_2 & \geq 0. \end{cases}$$

Problème dual (D) :

$$min \quad W = 4y_1 + 12y_2$$
$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 & \geq 4, \\ 2y_1 + 3y_2 & \geq 8, \\ y_1, y_2 & \geq 0. \end{cases}$$

La résolution du primal par la méthode du simplexe révisée résulte en $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ avec $x_B = \{x_1, x_4\}$

Nous avons: $x_B = B^{-1}.\, b$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow x^* = (4,4) \text{ et } Z^* = 12$$

Nous avons:

$$y^* = c_B^T B^{-1}$$
$$= (3, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = (3, 0)$$

Donc $y_1^* = 3$ (valeur marginale d'une carte), $y_2^* = 0$ (valeur marginale d'un moteur).
Interprétation économique : une carte supplémentaire augmente la valeur optimale de **3 k€**; un moteur supplémentaire n'augmente pas Z (ressource non-limite dans cette base).

Analyse de sensibilité — Exemple 1

Intervalle de validité du RHS b_i:

Nous avons: $\Delta b_i^{\min} = \max_k \left\{ -\frac{(x_B)_k}{(B^{-1})_{k,i}} : (B^{-1})_{k,i} > 0 \right\}$, $\Delta b_i^{\max} = \min_k \left\{ -\frac{(x_B)_k}{(B^{-1})_{k,i}} : (B^{-1})_{k,i} < 0 \right\}$

Pour b_1(colonne $i = 1$) : colonne 1 de B^{-1}est $(1, -2)^T$,

- Ensemble $\{k: (B^{-1})_{k,1} > 0\}$ = {1}
  $-\frac{(x_B)_1}{(B^{-1})_{1,1}} = -\frac{4}{1} = -4$. Donc : $\Delta b_1^{\min} = \max_1 \{-4\}$ = -4
- Ensemble $\{k: (B^{-1})_{k,1} < 0 = \{2\}$.
  $-\frac{(x_B)_2}{(B^{-1})_{2,1}} = -\frac{4}{-2} = 2$. Donc Δb_1^{max} = min {2} = 2
- $\Longrightarrow b_1' \in [4-4, 4+2] = [0, 6]$

Pour b_2(colonne $i = 2$) : colonne 2 de B^{-1}est $(0, 1)^T$,

- Ensemble $\{k: (B^{-1})_{k,1} > 0\}$ = {1}
  $-\frac{(x_B)_2}{(B^{-1})_{2,2}} = -\frac{4}{1} = -4$. Donc : $\Delta b_2^{\min} = \max_2 \{-4\}$ = -4
- Ensemble $\{k: (B^{-1})_{k,1} < 0 = \emptyset$.
  Donc Δb_2^{max} = $+\infty$.
- $\Longrightarrow b_2' \in [12-4, +\infty] = [8, +\infty]$

L'intervalle $[b_i, +\Delta b_i^{\min}, b_i + \Delta b_i^{\max}]$garantit que la **composition de la base (quelles variables sont basiques)** reste inchangé.
Mais la **valeur de la fonction objectif**, elle évolue proportionnellement à la variation de b_i, avec un coefficient donné par le prix d'ombre y_i^*

Exercice

On considère le problème linéaire suivant :

$$(P)\begin{cases} Z_{\min} = 2x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ 2x_1 - x_2 \geq 5 \\ x_1 + 4x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Questions :

1. La solution donnée par $x_1 = 3, x_2 = 1$ est-elle :
    1. une solution réalisable de (P)?
    2. une solution de base réalisable de (P)?
    3. une solution optimale de (P)?

    Justifier les réponses.
2. Écrire le problème dual (D) associé à (P).
3. Résoudre (D) en appliquant la méthode du simplexe révisée.
4. Déduire la solution optimal de (P) en utilisant le théorème des écarts complémentaire.

Exercice

On considère le problème linéaire suivant :

$$(P)\begin{cases} Z_{\min} = 2x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ 2x_1 - x_2 \geq 5 \\ x_1 + 4x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Réponses :

1. Vérifions les contraintes :

$2x_1 + x_2 = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \geq 3$✓

$2x_1 - x_2 = 2 \cdot 3 - 1 = 5 \geq 5$ ✓(égalité)

$x_1 + 4x_2 = 3 + 4 \cdot 1 = 7 \geq 6$✓

$x_1 = 3 \geq 0,\ x_2 = 1 \geq 0$✓

Donc c'est **une solution réalisable** de (P).

Dans $\mathbb{R}^2$, une solution de base correspond à l'intersection de deux contraintes actives linéairement indépendantes (les **équations** qui sont satisfaites en égalité). Pour (3, 1) seules la deuxième contrainte est active en égalité ($2x_1 - x_2 = 5$). Les autres contraintes sont strictement satisfaites (>). Il n'y a donc qu'une seule contrainte active indépendante, pas deux : Donc ce **n'est pas une solution de base réalisable.**

Et **non plus une solution optimale** car une solution optimale doit être une solution de base réalisable.

Exercice

On considère le problème linéaire suivant :

$$(P)\begin{cases} Z_{\min} = 2x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ 2x_1 - x_2 \geq 5 \\ x_1 + 4x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Réponses :

2. Le dual associé au primal :

$$(D)\begin{cases} W_{max} = 3y_1 + 5y_2 + 6y_3 \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 2 \\ y_1 - y_2 + 4y_3 \leq 3 \\ \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

3. Résolution par méthode du simplexe révisée:

Forme canonique du Dual:

$$(D)\begin{cases} W_{max} = 3y_1 + 5y_2 + 6y_3 \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 = 2 \\ y_1 - y_2 + 4y_3 + y_5 = 3 \\ \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

Initialisation:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

B1 = $B1^{-1}$ = I_2 max (3,5,6) = 6 $\Longrightarrow$ y_3 entre en base

min (2/1,3/4) = 3/4 $\Longrightarrow$ y_5 sort de la base

Exercice

Réponses :

3. Résolution par méthode du simplexe révisée:
Forme canonique du Dual:

$$(D)\begin{cases} W_{max} = 3y_1 + 5y_2 + 6y_3 \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 = 2 \\ y_1 - y_2 + 4y_3 + y_5 = 3 \\ \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

2ère Itération: Base: $\{y_4, y_3\}$

$$B2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B2^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$y_B = B2^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

Couts réduits:

$r_N^T = c_N^T - c_b^T B^{-1} N$

$= (3, 5, 0) - (0, 6)\begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= (3, 5, 0) - (0, 3/2)\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (3, 5, 0) - (3/2, -3/2, 3/2)$

$= (3/2, 13/2, -3/2)$

$= \max(3/2, 13/2, -3/2) = 13/2 \Longrightarrow \boldsymbol{y_2}$ **entre en base**

Nous avons: $B2^{-1}\, y_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}$

Min (5/4 * 4/9, __) = 5/9 $\Longrightarrow \boldsymbol{y_4}$ **quitte la base**

Exercice

Réponses :

3. Résolution par méthode du simplexe révisée:
Forme canonique du Dual:

$$(D)\begin{cases} W_{max} = 3y_1 + 5y_2 + 6y_3 \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 = 2 \\ y_1 - y_2 + 4y_3 + y_5 = 3 \\ \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

2ème Itération: Base: $\{y_2, y_3\}$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad B_2{}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/9 & -1/9 \\ 1/9 & 2/9 \end{pmatrix}$$

$$y_B = B_2{}^{-1}.b = \begin{pmatrix} 4/9 & -1/9 \\ 1/9 & 2/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/9 \\ 8/9 \end{pmatrix}$$

Coûts réduits:

$r_N^T = c_N^T - c_b^T B^{-1} N$

$= (3, 0, 0) - (5, 6)\begin{pmatrix} 4/9 & -1/9 \\ 1/9 & 2/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= (3, 0, 0) - (26/9, 7/9)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (3, 0, 0) - (59/9, 26/9, 7/9)$

$= (-32/9, -26/9, -7/9)$

Tous les coefficients sont < 0 $\Longrightarrow$ optimalité

Solution optimale: $y_1 = 0, y_2 = \frac{5}{9}, y_3 = \frac{8}{9}, W = \frac{73}{9}$

Exercice

Réponses :

4. Solution optimale de (P):

$$(P)\begin{cases} Z_{\min} = 2x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ 2x_1 - x_2 \geq 5 \\ x_1 + 4x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Nous avons : $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$=(0, **5/9**, **8/9**, 0 ,0), $W^\star = \frac{73}{9}$.

On sait que $Z^\star = W^\star = \frac{73}{9}$.

En appliquant le théorème des écarts complémentaire, on trouve:

Comme $y_2 > 0$,la contrainte 2 du primal est **active** : $2x_1 - x_2 = 5$

Comme $y_3 > 0$,la contrainte 3 du primal est **active** : $x_1 + 4x_2 = 6$

Comme $y_1 = 0, y_4 = 0, y_5 = 0$,les autres contraintes peuvent être strictes (>)

Donc il suffit de résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5, \\ x_1 + 4x_2 = 6, \end{cases}$$

avec $x_1, x_2 \geq 0$.

Solution du primal :

$$(x_1, x_2) = (\frac{26}{9},\ \frac{7}{9}), Z^\star = 2x_1 + 3x_2 = \frac{73}{9}.$$