RECHERCHE OPÉRATIONNELLE AVANCÉE 2

Enseignant:
M. MAABED Mohammed

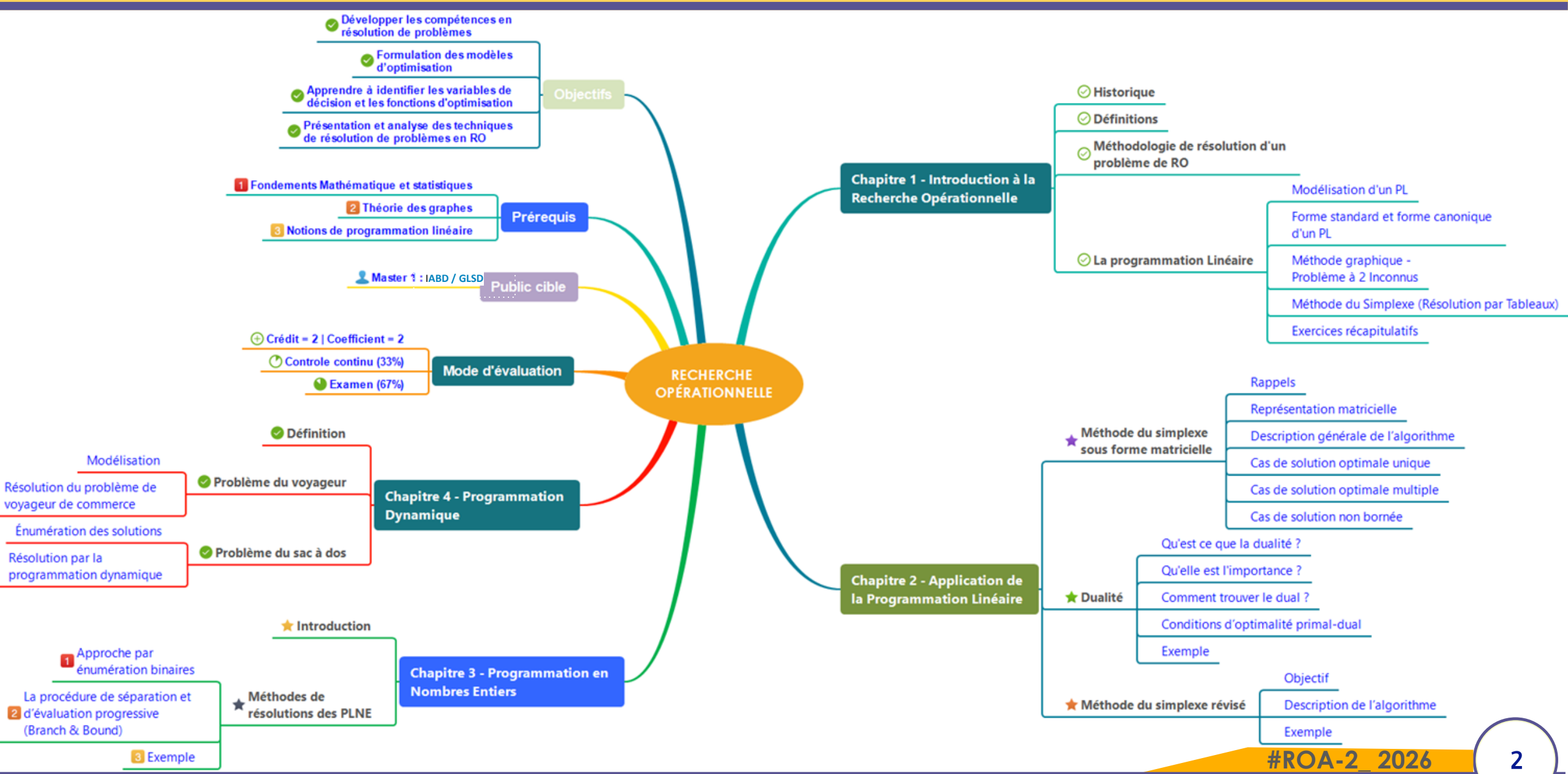
Chapitre I

Introduction à la Recherche Opérationnelle

Fevrier – mai 2026



Plan du cours



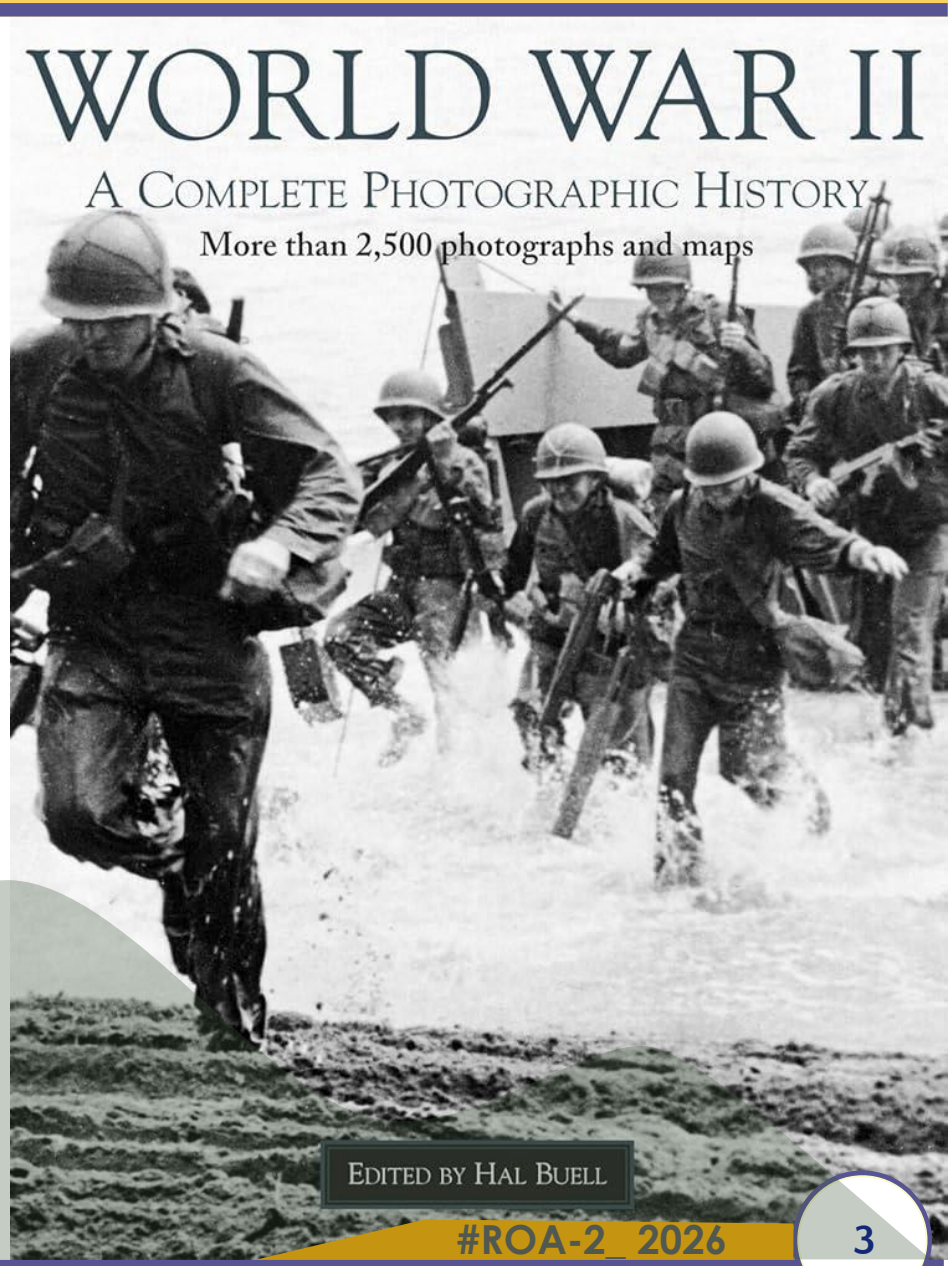
Origine Militaire (1939-1945)

Problème des convois maritimes

Les sous-marins allemands (U-Boote) coulent 25% des navires alliés en 1940.

Efficacité des radars

Le système radar britannique peine à intercepter les raids aériens de l'armée de l'air allemande, la Luftwaffe (des radars à portée et angle de couverture limités).



Origine Militaire (1939-1945)

Taille des convois

Un modèle probabiliste prouve que les grands convois perdent proportionnellement moins de navires (-15% de pertes).

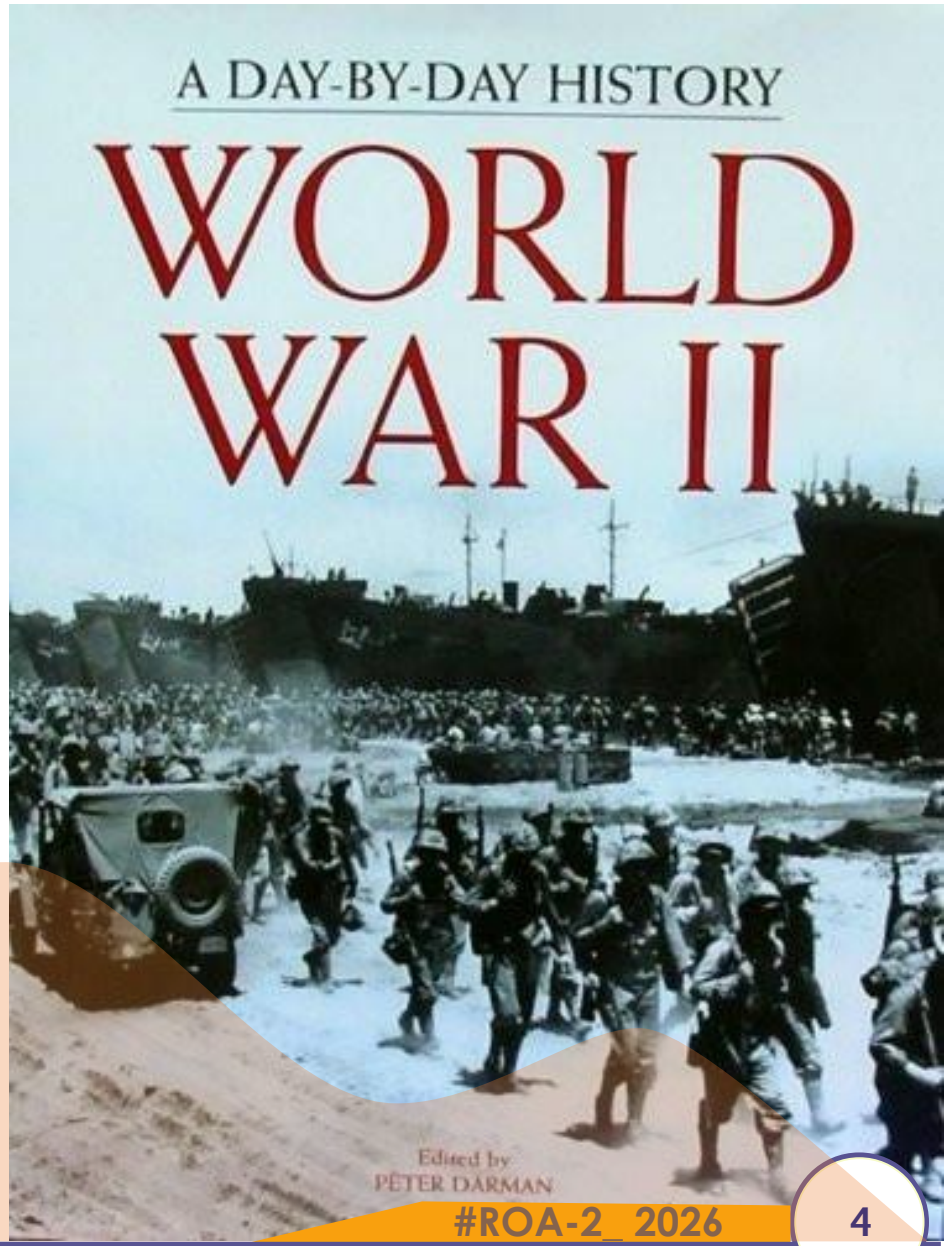
Optimisation de la profondeur de grenadage

Une analyse statistique montre qu'une profondeur de 30 mètres est optimale contre les sous-marins (contre 60 m préconisés).

Efficacité des radars

Méthode de localisation optimal des antennes et amélioration de la distribution des signaux. L'effectivité du système de défense aérienne a doublée.

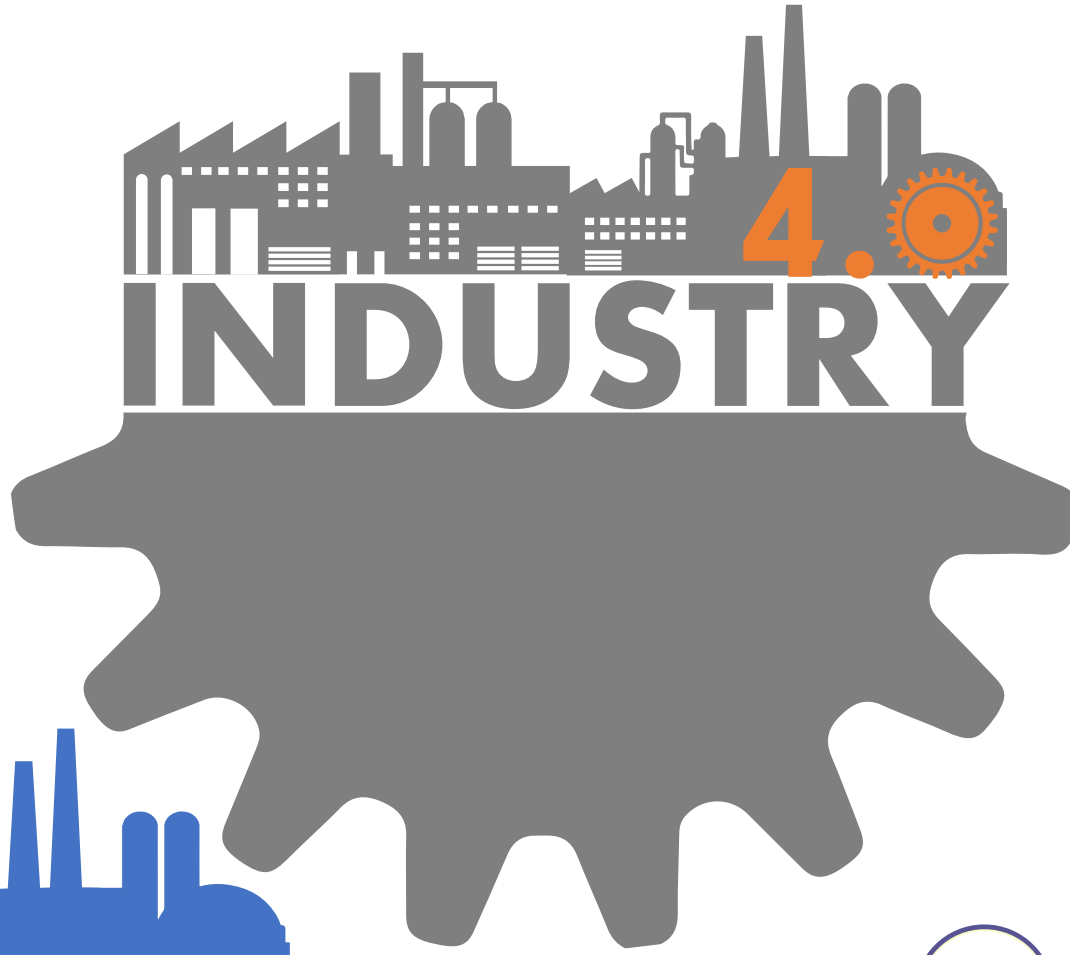




La transition vers le civil – L'industrie .. (1945-1955)

Les scientifiques militaires sont recrutés par l'industrie …

- **Compagnies aériennes** (BOAC optimise les rotations d'avions).
- **Secteur énergétique** (EDF améliore la maintenance des réacteurs).
- **Télécoms** (Bell Labs applique la théorie des files d'attente aux réseaux).





La transition vers le civil – L'industrie .. (1945-1955)

Les scientifiques militaires sont recrutés par l'industrie …

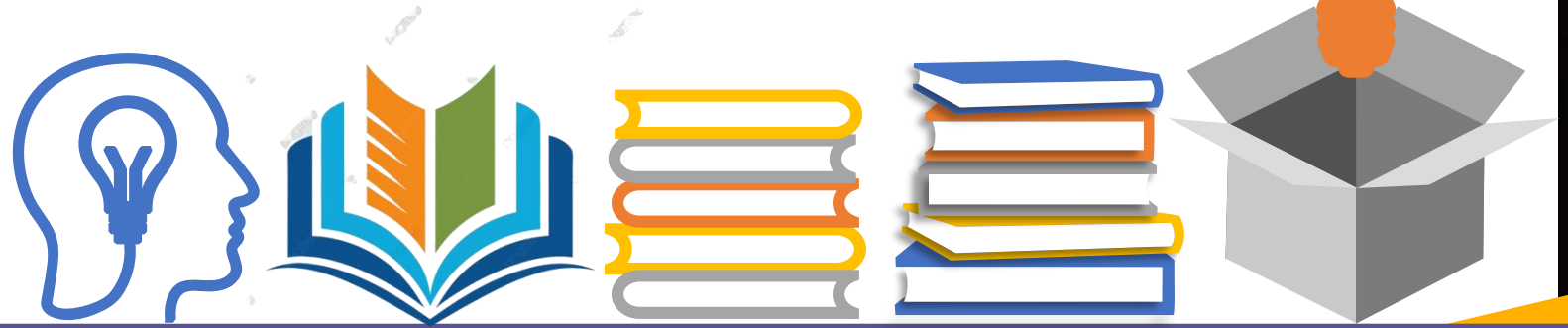
- **Industrie automobile (Toyota) :** Utilisation de modèles de planification pour équilibrer les lignes de production, réduire les temps morts, et appliquer le Just-in-Time.
- **Industrie pharmaceutique (Pfizer)** : Utilisation de modèles de programmation linéaire et stochastique pour planifier et optimiser la production et la distribution mondiale de son vaccin COVID-19.
- **Sidérurgie (US Steel) :** Optimisation de la séquence de production des aciers spéciaux afin de minimiser les pertes lors du changement de configuration des fours.





Âge d'or académique (1955-1970) - L'explosion théorique

Domaine	Contribution	Acteur clé
Programmation linéaire	Méthode de décomposition de Dantzig-Wolfe	George Dantzig 1960
Théorie des files d'attente	Notation Kendall (A/B/c)	David Kendall 1953
Gestion des stocks	Modèle EOQ (*Economic Order Quantity*)	Kenneth Arrow (et équipe) 1951
Optimisation combinatoire	Algorithme branch-and-bound	Ailsa Land 1960



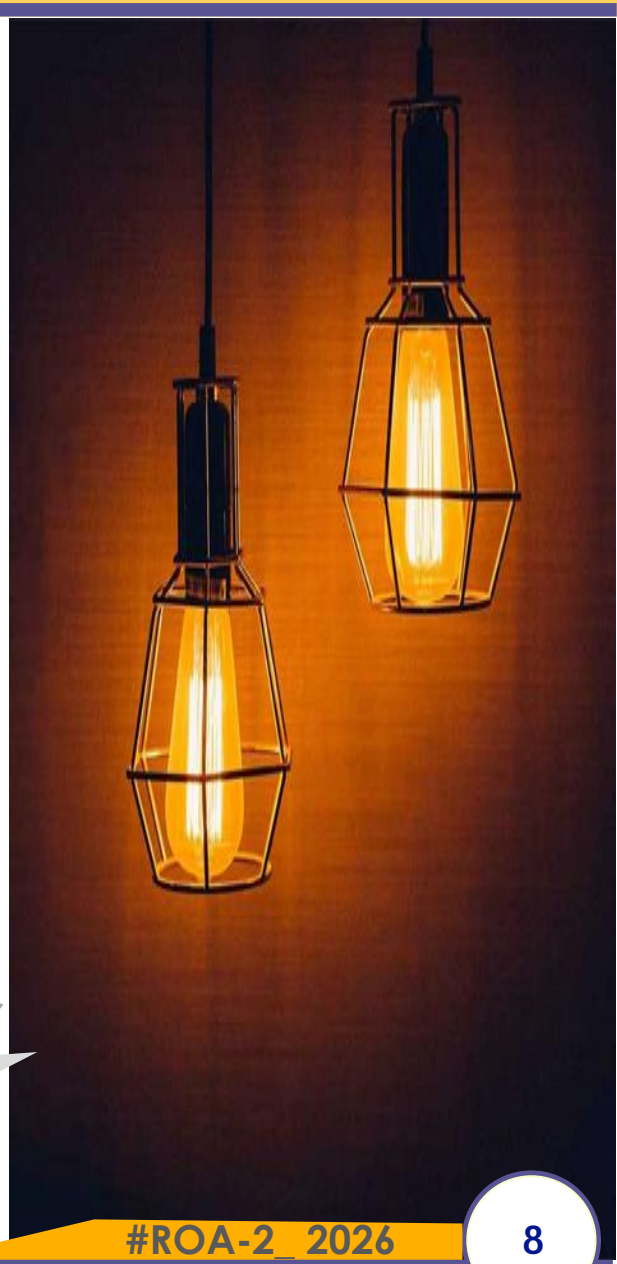


Âge d'or académique (1955-1970) - L'explosion théorique

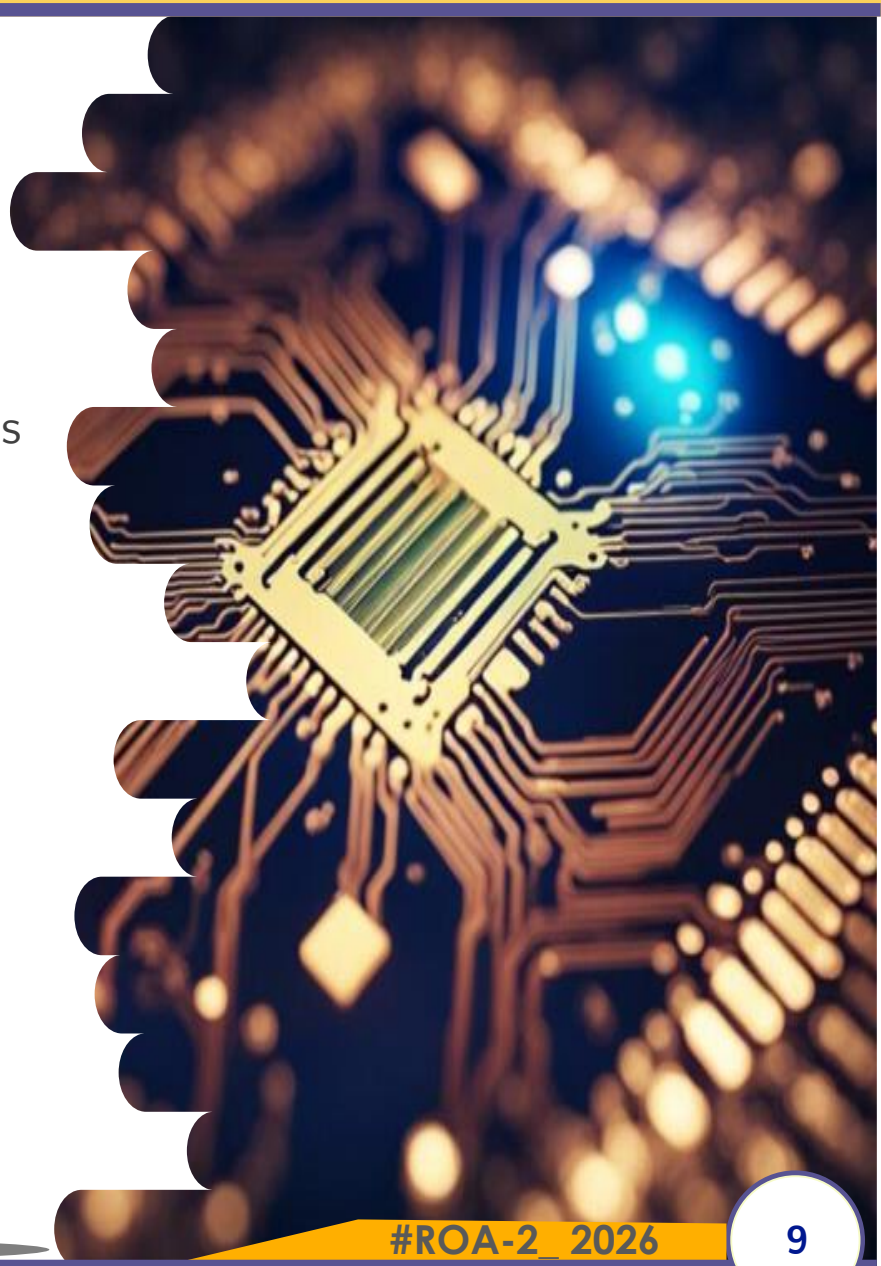
Rayonnement international …

- **URSS : Leonid Kantorovich (Prix Nobel 1975)** développe indépendamment la programmation linéaire dès 1939 pour optimiser la production de contreplaqué. Son travail reste classifié jusqu'en 1959.
- **France : Jacques Lesourne (École des Mines)** applique la RO à la planification économique.





Révolution informatique (1970-1990) : L'ère numérique

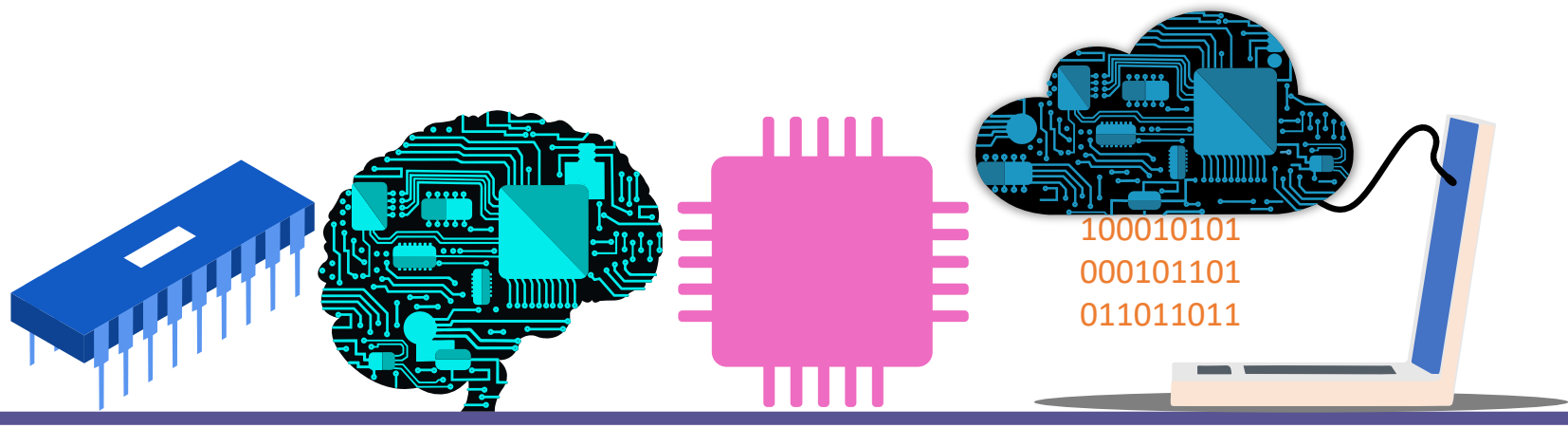


Saut technologique …

- L'avènement des ordinateurs centraux (IBM 360) permet de résoudre des problèmes à 10 000 variables.

- **Logiciels spécialisés :**

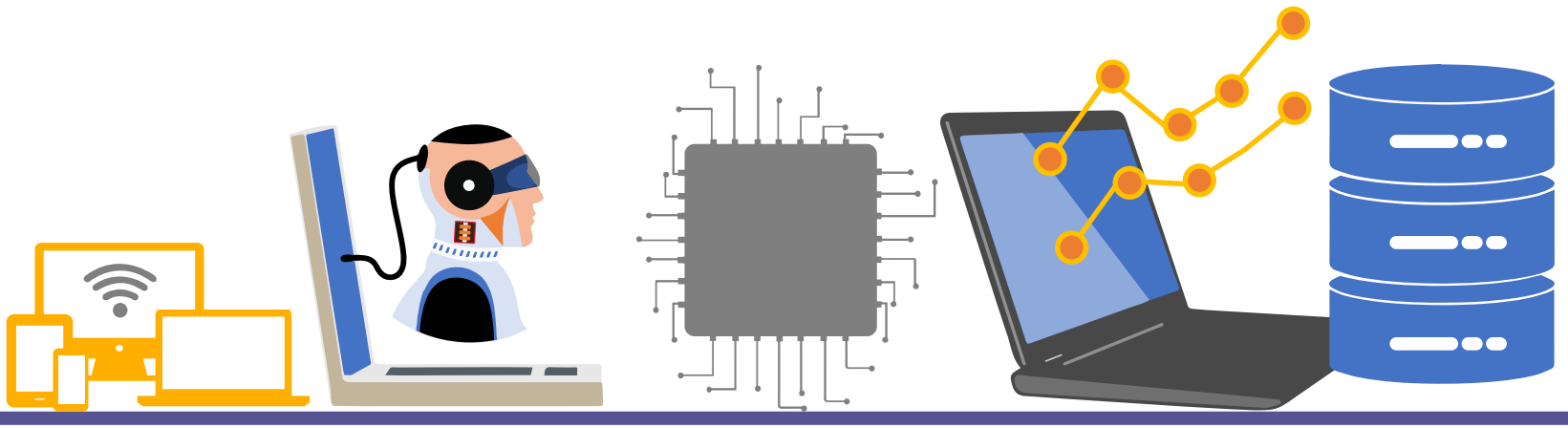
  CPLEX (1988) pour l'optimisation linéaire.
  Arena (1992) pour la simulation discrète.



Révolution informatique (1970-1990) : L'ère numérique

Applications industrielles…

- **Logistique :** FedEx développe l'algorithme COSMOS pour optimiser le routage des colis (économies : 300M$/an).
- **Santé :** L'hôpital St. Mary (Londres) réduit de 40% les temps d'attente aux urgences via un modèle de simulation.
- **Transport aérien :** American Airlines lance SABRE, premier système de réservation optimisé (1976).



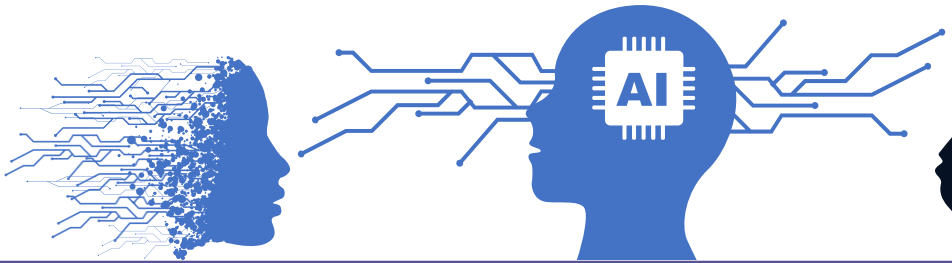


Époque moderne (1990-présent) : Convergence et défis

Intégrations disciplinaires …

- **Data Science :** Les algorithmes RO (ex: branch-and-bound) accélèrent l'entraînement des réseaux de neurones.
- **Écologie :** Optimisation multi-objectif pour les parcs éoliens (trade-off production/impact environnemental.





Époque moderne (1990-présent) : Convergence et défis

Tendances structurantes :...

- **Optimisation en temps réel :** Ex1. Uber Eats : Algorithmes de routage dynamique (+15% de livraisons/heure). Ex2. Google OR-Tools : Framework open-source pour la logistique

- **Prescriptive Analytics :** Combinaison de prédictions ML et d'optimisation RO (ex: maintenance prédictive chez General Electric).







La recherche opérationnelle est un domaine multidisciplinaire qui applique des techniques mathématiques et analytiques afin d'aider à la prise de décision dans des systèmes complexes. En développant des modèles mathématiques et en utilisant des méthodes d'optimisation, la recherche opérationnelle permet d'atteindre des solutions optimales ou quasi optimales à des problèmes réels.

- Nature Research Intelligence, 2024 -



La recherche opérationnelle englobe le développement et l'application d'un large éventail de méthodes et techniques de résolution de problèmes utilisées dans la recherche d'une meilleure prise de décision. C'est le processus qui consiste à prendre de meilleures décisions grâce à l'analyse des données, à la modélisation mathématique, à l'optimisation et à d'autres méthodes analytiques.

- International Federation of Operational Research Societies, 2023 -

Aperçu général de la méthodologie

Définition du problème et la collecte des données

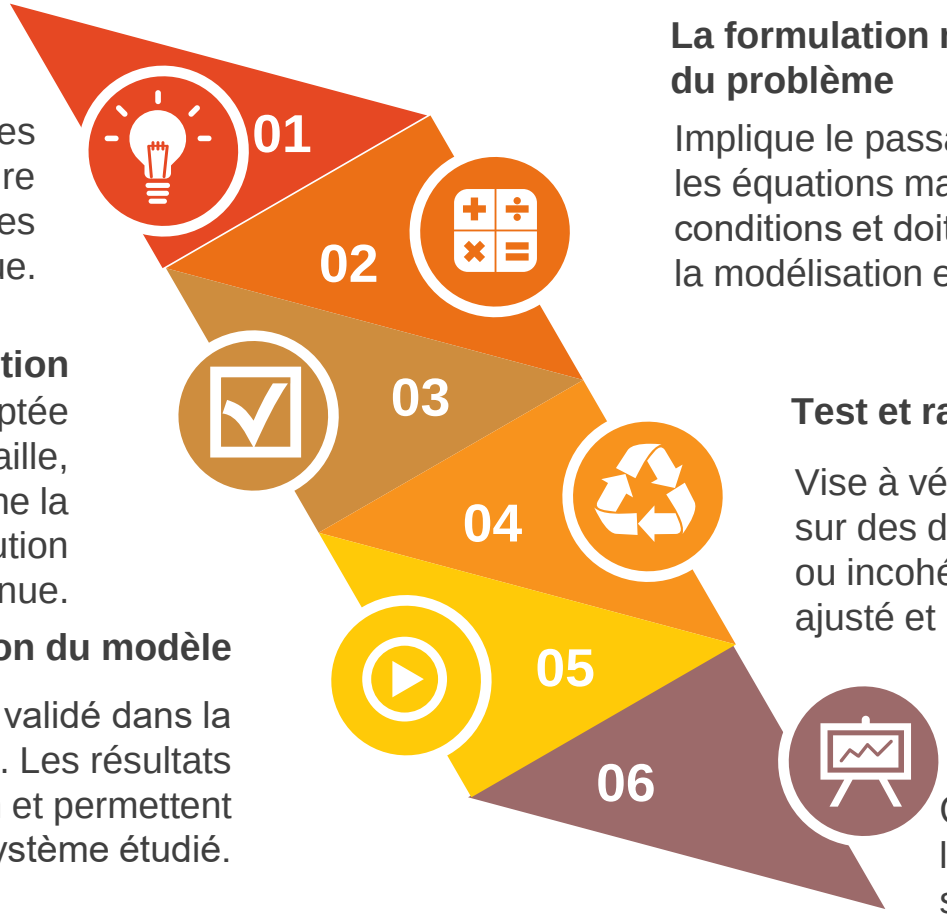
La détermination des objectifs, des contraintes structurelles, et des contraintes de temps nécessaire pour la prise de décision. Identification des données en entrée au modèle mathématique.

Choix de la méthode de résolution

Sélectionner la méthode de résolution la plus adaptée en fonction de la nature du problème (taille, complexité, contraintes). Ce choix conditionne la rapidité, la précision et la faisabilité de la solution obtenue.

Application du modèle

Consiste à mettre en œuvre le modèle validé dans la pratique, afin de résoudre le problème réel. Les résultats obtenus guident la prise de décision et permettent d'améliorer les performances du système étudié.



La formulation mathématique du problème

Implique le passage du texte (énoncé du problème) vers les équations mathématiques. Il doit vérifier certaines conditions et doit passer par plusieurs étapes : l'analyse, la modélisation et le critère à optimiser (fonction objectif).

Test et raffinement du modèle

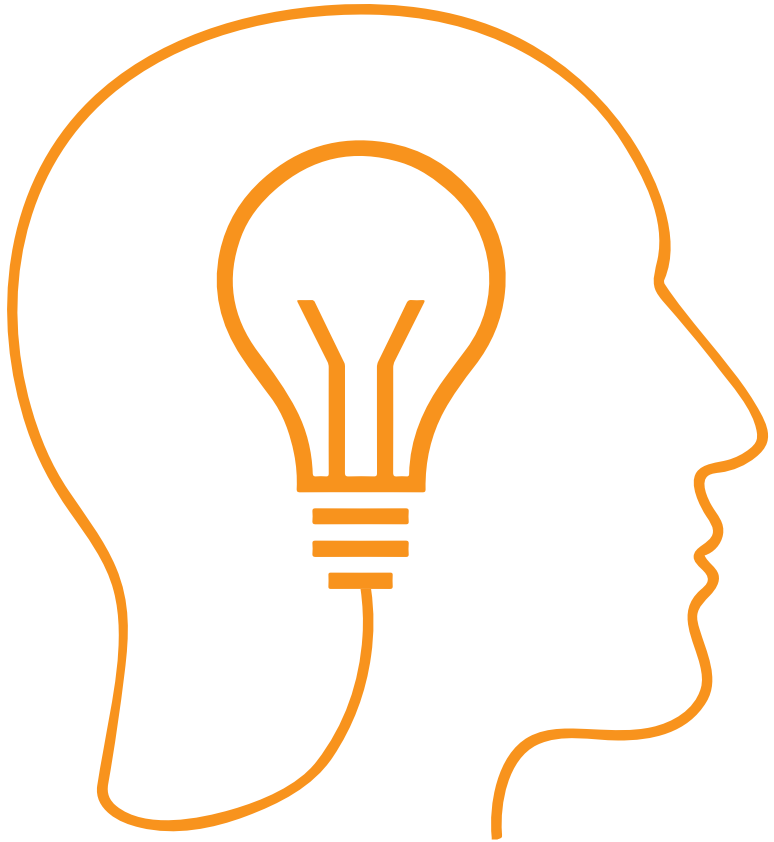
Vise à vérifier la validité du modèle en le testant sur des données réelles ou simulées. Si des écarts ou incohérences apparaissent, le modèle est ajusté et raffiné pour mieux représenter la réalité.

Déploiement

Correspond à l'intégration du modèle dans l'organisation. Il implique sa mise en service, son suivi et son adaptation continue aux évolutions du contexte réel.

Formulation d'un problème d'optimisation

La formulation consiste à développer le système d'équations et des expressions mathématiques qui décrivent le problème.



Variables de décision

1

S'il y a ***n*** décisions quantifiables à prendre, elles sont représentées par des variables de décision (x1,x2,...xn) dont les valeurs sont déterminées par la méthode de résolution

Fonction objectif

2

La mesure de performance est une fonction mathématique de ces variables de décision. Elle est appelée la fonction objective (objectif).

Contraintes

3

Toutes les restrictions concernant les valeurs à attribuer aux variables de décision sont aussi exprimées mathématiquement avec des inégalités ou des équations. Elles sont appelées contraintes.

Paramètres

4

Les constantes dans les contraintes et la fonction objective sont appelées les paramètres du modèle. Les valeurs des paramètres sont déterminées en collectant les données.

Formulation d'un problème d'optimisation

Exemple

Facebook (Meta) exploite de vastes datacenters pour faire fonctionner différents services. L'allocation des unités de calcul (CPU + RAM) doit être répartie entre deux services essentiels : Services de messagerie (Facebook Messenger, WhatsApp) et systèmes de recommandation IA (fil d'actualité, vidéos, publicités). Le datacenter dispose quotidiennement de **10 000 heures-CPU** et **8 000 Go-heures** de mémoire.

- Pour la messagerie, elle consomme **1 h-CPU** et 2 **Go-h RAM** et génère une valeur estimée de **50 $** (revenus + satisfaction utilisateurs).
- Pour le system de recommendation, il **consomme 2 h-CPU** et **1 Go-h RAM et génère une valeur estimée de 120 $.**
- Afin de respecter les engagements de disponibilité, Au moins **2 000 unités** de calcul doivent être affectées aux services de messagerie.
- Les systèmes de recommandation ne peuvent pas dépasser **2 500 unités** de calcul par jour, afin de limiter la consommation énergétique.



Facebook Datacenter

Formulation d'un problème d'optimisation

Exemple

Contraintes

CPU: **x1 + 2x2 ≤ 10000**

RAM: **2x1 + x2 ≤ 8000**

Dispo Messagerie: **x1 ≥ 2000**

Limite AI: **x2 ≤ 2500**

Non négativité: **x1 ≥ 0; x2 ≥ 0**

Objectif

max Z = 50X1 + 120X2

Variables de décision

X1: nombre d'unités de calcul allouées à la Messagerie.
X2: nombre d'unités de calcul allouées aux Recommandations IA.

Forme d'un programme linéaire

Forme générale

La forme générale d'un problème d'optimization est la suivante:

Max f(x) (ou min f(x))
sous:

gi(x) = 0; i ∈ I^0 , contraintes d'égalité
gi(x) ≤ 0; i ∈ I^- , contraintes d'inégalité
gi(x) ≥ 0; i ∈ I^+ , contraintes d'inégalité
Avec x = (x1, x2, ..., xn) ≥ 0

D'une manière plus détaillée, un PL est dit sous forme générale s'il s'écrit de la façon suivante : max Z = c1x1 + c2x2 + ... + cnxn

La fonction objectif peut s'exprimer par une sommation de *n* terme (variables) comme suit :

$$\max Z = \sum_{j}^{n} c_j x_j$$

Sous contraintes:

$$\begin{cases} \sum_{j}^{n} a_{ij} x_j = bi \\ \sum_{j}^{n} c_{kj} x_j \geq bk \\ \sum_{j}^{n} c_{rj} x_j \leq br \end{cases}$$

Forme d'un programme linéaire | Forme standard et canonique

Contraintes d'égalité

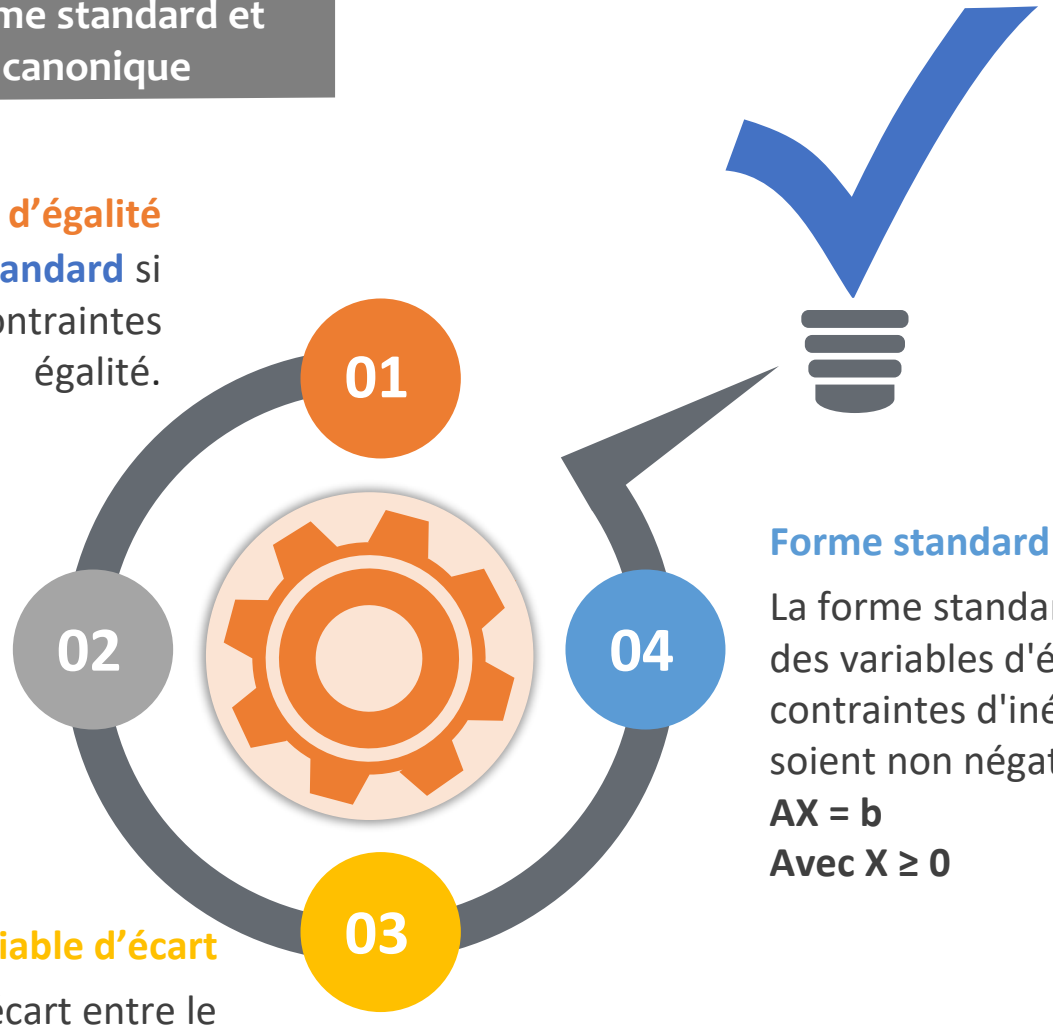
Un problème linéaire est sous **forme standard** si toutes les contraintes sont des contraintes égalité.

Transformation

Pour ce faire, il faut ajouter aux membres de gauche d'une contrainte d'inégalité, une quantité (une mesure) appelée variable d'écart.

Variable d'écart

La variable d'écart sert à absorber l'écart entre le membre gauche et le membre droit d'une contrainte si l'écart existe, sinon cette variable vaut zéro.



Forme standard

La forme standard est obtenue en introduisant des variables d'écart dans toutes les contraintes d'inégalité et que ces variables soient non négatives. Elle est de la forme:

AX = b

Avec X ≥ 0

Forme d'un programme linéaire

Forme standard et canonique

La forme canonique d'un programme linéaire peut être exprimée par un ensemble de vecteurs comme suit:

X = (x1, x2, ..., xn) ϵ $\mathbb{R}^n$, vecteur des variables de décision.
C = (c1, c2, ..., cn) ϵ $\mathbb{R}^n$, vecteur des coefficients de Z.
b = $(b1, b2, ..., bm)^T$ ϵ $\mathbb{R}^n$, vecteur-colonne des seconds membres.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, matrice des coefficients des variables dans les contraintes.

Z= CX est la fonction objective

Reprenons l'exemple du problème d'allocation des ressources dans Datacenter. Sous **forme générale**, le PL s'écrit :

$$\begin{cases} \max Z = 50X1 + 120X2 \\ x1 + 2x2 \leq 10000 \\ 2x1 + x2 \leq 8000 \\ x1 \geq 2000 \\ x2 \leq 2500 \end{cases}$$

Forme standard

$$\begin{cases} \max Z = 50X1 + 120X2 \\ x1 + 2x2 + x3 = 10000 \\ 2x1 + x2 + x4 = 8000 \\ x1 - x5 = 2000 \\ x2 + x6 = 2500 \\ x1, x2, x3, x4, x5, x6 \geq 0 \end{cases}$$

Forme d'un programme linéaire

Forme canonique

1. Le vecteur des variables dans le système est : X = (x1, x2, ..., xn)

2. Le vecteur des coefficients « *c* » est donné par *c*=(50 , 120 , 0 , 0 , 0 , 0) puisque max Z peut s'écrire comme suit :
max Z = 50X1 + 120X2 + 0X3 + 0X4 + 0X5 + 0X6

3. Le vecteur des coefficients *b* est donné par *b*=(10000 , 8000 , 2000, 2500)

4. La matrice A est donnée par:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Forme d'un programme linéaire

Forme canonique

Un PL est sous **forme canonique** si :

$$\text{Maximiser} \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\textit{sous contraintes} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

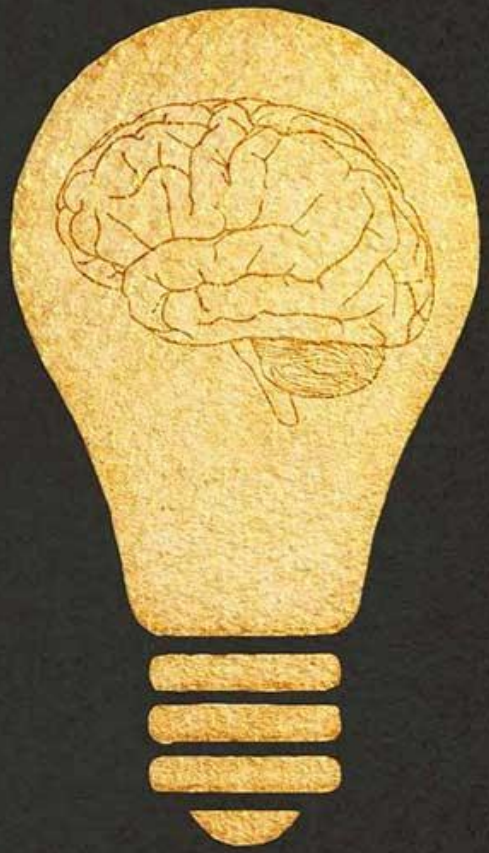
De manière symétrique, un PL est sous **forme canonique** pour une minimisation si :

$$\text{Minimiser} \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\textit{sous contraintes} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

Quelles sont les valeurs des variables de décision qui optimisent (maximisent ou minimisent) la fonction objectif tout en respectant l'ensemble des contraintes du problème ?



Base et Variables de base

On considère un problème de PL sous forme standard :
max $Z = C^T X$ sous contraintes: $A.X = b$, $X \geq 0$.

Avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ vecteur des variables; $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix}$ vecteur des coefficients de la function objectif.

et A est une matrice $m \times n$ (m équations, n variables) et b est le vecteur colonnes des second membres.

On choisit un ensemble $B \subset \{1,2,\ldots,n\}$ de m indices (le même nombre que de contraintes).
Les colonnes de A correspondant à ces indices sont notées A_j, $j \in B$.
Si ces colonnes sont **linéairement indépendantes**, elles **forment une base**.

La matrice formée de ces colonnes est notée $\mathbf{A_B}$. C'est une matrice **carrée** de taille $m \times m$.
Elle est inversible (important pour calculer une solution)

Les variables $\mathbf{x_B} = (x_j ; j \in B)$ sont appelées **variables de base**.

Les variables $\mathbf{x_H} = (x_j ; j \notin B)$ sont appelées **variables hors-base**.

Base et Variables de base

Rappel

Deux vecteurs (ou colonnes) a_i et a_j sont :

- **Linéairement dépendants** si l'un est un multiple de l'autre, c'est-à-dire : $a_i = \lambda a_j$ avec $\lambda \in R$.
- **Linéairement indépendants** si aucun ne peut s'écrire comme combinaison linéaire de l'autre (autrement dit, si les vecteurs ne sont pas colinéaires).

Exemple

Soit le système:

$$\begin{cases} \max Z = 4X1 + 3X2 \\ x1 + x2 + x3 = 12 \\ 2x1 + 3x2 + x4 = 24 \\ x1, x2, x3, x4 \geq 0 \end{cases}$$

→

- Ici m = 2 (2 équations) et n = 4 (4 variables)
- La matrice A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Maintenant, on choisit une **base** B de **2 indices** (car m=2).
- Si B = {1,3} ⇒ Variables de base = **x1, x3**; Variable hors-base = **x2, x4**
- La matrice $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, les 2 colonnes de A: A1 et A2 sont linéairement indépendant

Solution de base

- On considère le PL (forme standard) :
  contraintes : $Ax=b$ avec $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, $b \in \mathbb{R}^m$,
  variables : $x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$.
- On choisit un ensemble d'indices $B \subset \{1,\ldots,n\}$ de **cardinal m** tel que les colonnes $\{Aj : j \in B\}$ soient linéairement indépendantes.
- A_B = matrice m×m faite des colonnes de A indexées par B (donc **carrée et inversible**).
  A_H = matrice m×(n−m) faite des colonnes indexées par H.
- On partitionne x en x = $\begin{pmatrix} X_B \\ X_H \end{pmatrix}$ (Variables de base / variables Hors base)
- Avec cette écriture par blocs : $Ax = b \Leftrightarrow A_B X_B + A_H X_H = b$

Par **définition** :
Une solution de base (associée à B) $\Leftrightarrow X_H = 0$ et $A_B X_B = b$
Autrement dit, on met à zéro les $n-m$ variables hors-base et on résout le système $A_B X_B = b$.

Solution de base réalisable

Une solution de base réalisable c'est **toute solution de base** qui satisfait aux contraintes d'un PL. Autrement dit, $X_H = 0$ et $A_B X_B = b$. C'est une solution de base qui respecte $X \geq 0$, **donc** $X_B \geq 0$, puisque $X_H = 0$

On déduit facilement qu'une solution de base $X = \begin{pmatrix} x_B \\ x_H \end{pmatrix}$ **est réalisable** si et seulement si :

$$X_B = A_B^{-1} B \geq 0$$

Le terme réalisable est utilisé pour dire que c'est une solution qui respecte les contraintes

Comme A_B est inversible, il y a **une unique solution** $X_B = A_B^{-1} B$, **par rapport à la base B**.

Exemple

Reprenons le système précèdent:

$$\begin{cases} \max Z = 4X1 + 3X2 \\ x1 + x2 + x3 = 12 \\ 2x1 + 3x2 + x4 = 24 \\ x1, x2, x3, x4 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow$$

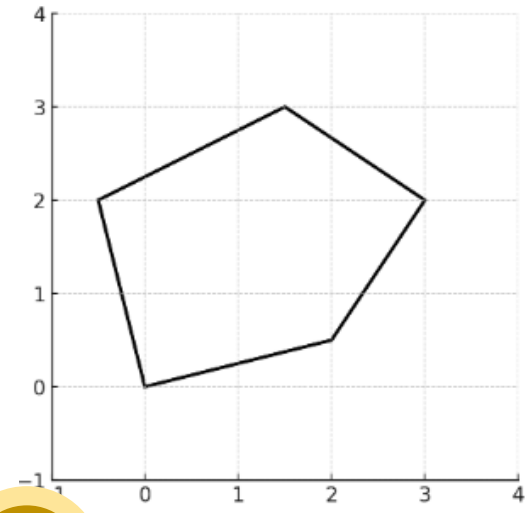
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Si B = {1,3} $\Rightarrow A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$A_B^{-1} = \frac{1}{0-2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

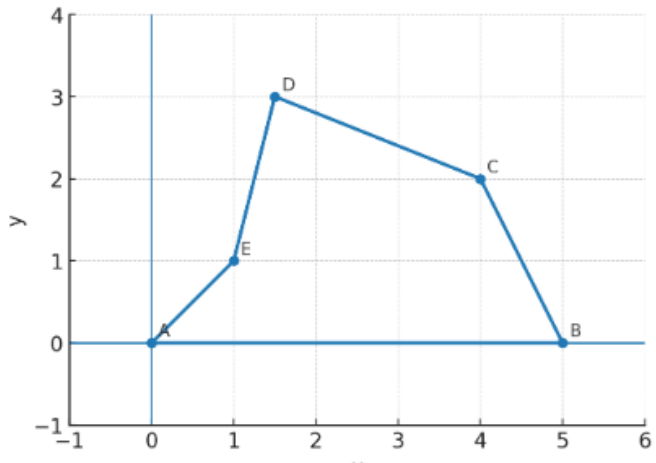
$X_B = A_B^{-1}.b = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix} = (12, 0) \Rightarrow$ **x1 = 12, x2 = 0**

Solution de base réalisable

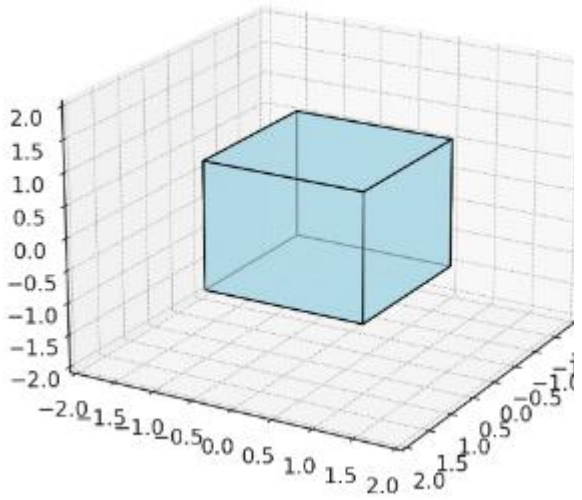
1. Proposition 1. x est une solution de base réalisable si et seulement si x est un point extrême de D_r (domaine des solutions réalisable).
2. L'ensemble $D_r = \{x \geq 0$ tel que $Ax \leq b\}$ s'il existe **est un polyèdre convexe**. (un polyèdre Q de R^n est un ensemble défini par $Q = \{x \in R^n$ tel que $Ax \leq b\}$). Si n=2 (deux variables), on parle de **polygone convexe**.
3. **Convexe** signifie que le polyèdre vérifie la propriété suivante :
   Pour **tout couple de points** A, B à l'intérieur du polyèdre, **le segment** [AB] est **entièrement contenu** dans le polyèdre



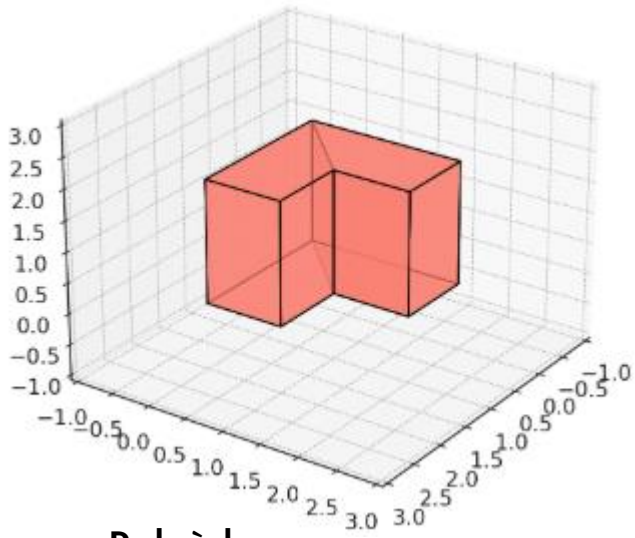
Polygone convexe



Polygone non convexe



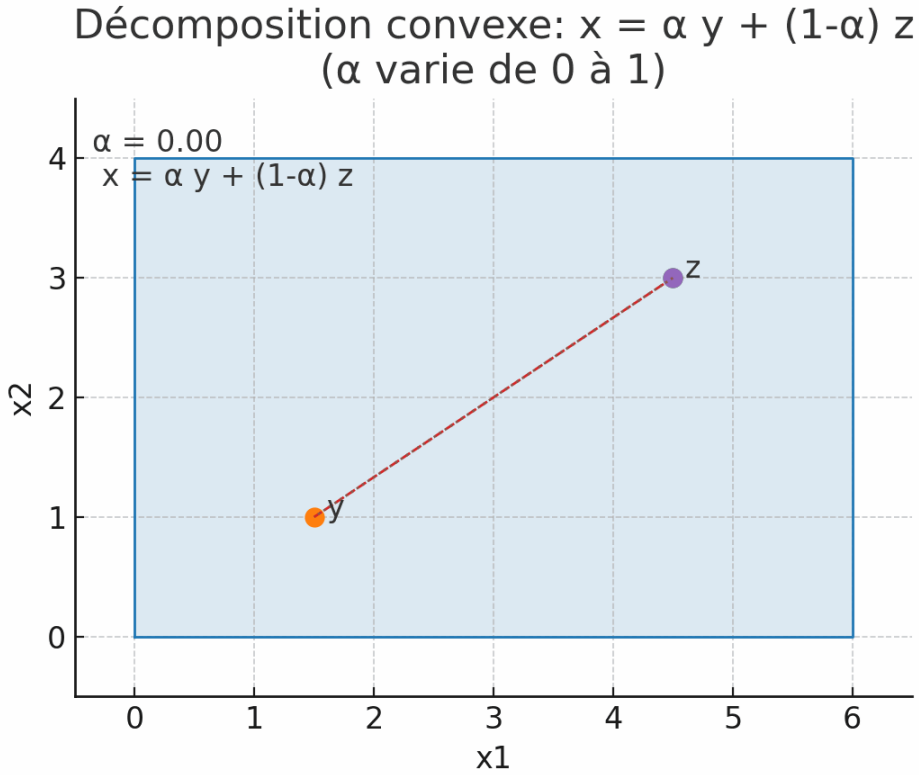
Polyèdre convexe



Polyèdre non convexe

Solution de base réalisable

- X est une solution de base réalisable c'est précisément **un sommet (extrémité)** du polyèdre réalisable. Ce dernier est formé par l'intersection de plusieurs contraintes ($X_B \geq 0$)
- Un point $x \in D_r$ est un point extrême ou un sommet si et seulement si il **ne peut pas s'ecrire** comme combinaison convexe de points de D_r. Autrement dit, il n'existe pas $y, z \in D_r$ ($y \neq z$) tel que $x = \alpha y + (1-\alpha) z$ avec $\alpha \in]0, 1[$



Solution de base réalisable

- X est une solution de base réalisable c'est précisément **un sommet (extrémité)** du polyèdre réalisable. Ce dernier est formé par l'intersection de plusieurs contraintes ($X_B \geq 0$)
- Un point $x \in D_r$ est un point extrême ou un sommet si et seulement si il **ne peut pas s'ecrire** comme combinaison convexe de points de D_r. Autrement dit, il n'existe pas $y, z \in D_r$ $(y \neq z)$ tel que $x = \alpha y + (1-\alpha) z$ avec $\alpha \in]0, 1[$

Preuve (Par absurde)

Supposons par l'absurde que X **n'est pas** un sommet.

Alors il existe deux points distincts $y \neq z$ dans D_r et un réel α avec $0<\alpha<1$ tels que: $x=\alpha y+(1-\alpha)z$.

Comme $y, z \in D_r$, on a : $Ay=b$, $Az=b$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Écrivons $\mathbf{y=(y_B, y_H)}$ et $z= \mathbf{(z_B, z_H)}$ selon la même partition en indices B et H. Alors la décomposition $x = \alpha y+(1-\alpha)z$ donne composante par composante : $\boldsymbol{x_H = \alpha y_H+(1-\alpha) z_H}$

Mais $x_H = 0$ donc : $\boldsymbol{\alpha y_H+(1-\alpha) z_H} = 0$

La seule façon pour une combinaison convexe positive d'être nulle est que **chaque composante** soit nulle. Donc:
$y_H = 0$ et $z_H = 0$

Autrement dit, **y et z ont aussi leurs composantes hors-base nulles** : ils sont de la forme : $y = (y_B, 0)$ et $z = (z_B, 0)$

Maintenant examinons les contraintes $Ax=b$:
Pour y et z on a: $A_B y_B = b$ et $A_B z_B = b$.

En soustrayant, on obtient :
$A_B(y_B - z_B) = 0$, mais A_B **est inversible**

Une matrice est inversible si et seulement si l'équation AX = 0 (où X est un vecteur colonne) n'admet que la solution triviale X=0

Donc $y_B - z_B = 0 \Rightarrow y_B = z_B$

Ainsi $y = (y_B, 0) = (z_B, 0) = z$, **ce qui contredit l'hypothèse $y \neq z$**

Solution optimale

- C'est toute solution x^* réalisable qui optimise Z. ie : $x^* \in D_r$ et $\forall x \in D_r$, ${}^t c x^* \geq {}^t c x$ (si c'est un Problème à max)
- Une solution optimale si elle existe, **est atteinte en au moins** une qui est de base réalisable (donc en un point extrême de C).

03 Cas possibles:

1. $D_r = \emptyset$ Le problème P n'a pas de solution.
2. $D_r \neq \emptyset$ et Z $est\ non\ majorée\ sur\ D_r$, max Z = $+\infty$, : $problème\ P\ est\ non\ borné$
3. $D_r \neq \emptyset$ et Z $est\ majorée\ sur\ D_r$: $problème\ P$ admet une solution optimale mais pas forcément unique (**plusieurs points** différents donnent la même valeur optimale.)

Méthode de résolutions d'un PL

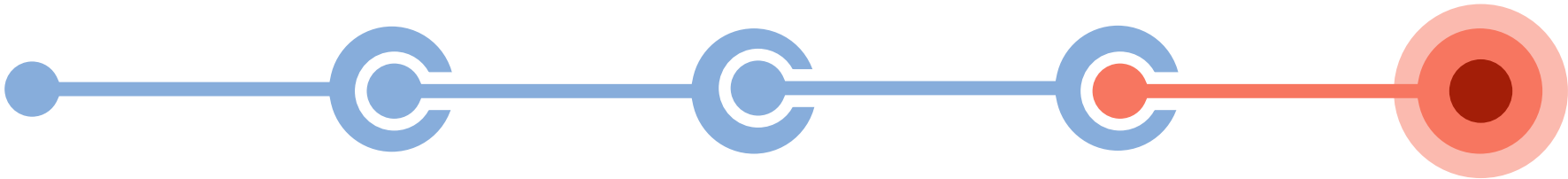
Résolution graphique

2

On conserve uniquement le demi-plan acceptable, c'est-à dire le demi-plan des solutions réalisables pour la contrainte.

3

L'intersection des différents demi-plans de toutes les contraintes (y compris les contraintes de positivité) forme le polyèdre des solutions, appelé "région des solutions admissibles.



1

La résolution graphique d'un problème linéaire consiste à tracer la droite qui sépare les demi-plans pour chaque contrainte.

4

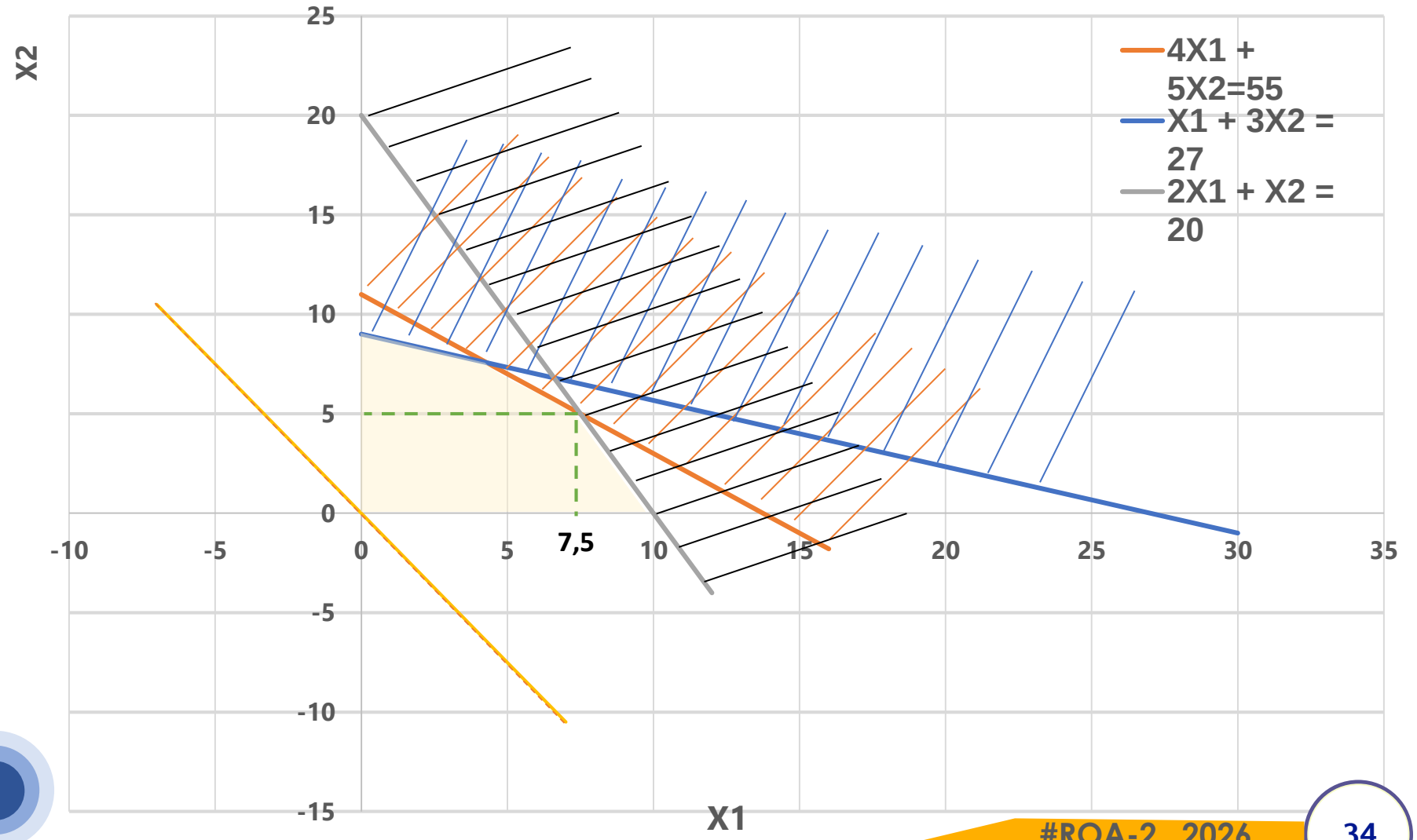
1. On calcule la valeur de la fonction objectif en chaque sommet du polyèdre. La solution optimale est le sommet où l'objectif est max/min.
2. On fait glisser la droite de la fonction objectif (pour Z=0 par ex.) parallèlement à elle-même dans le sens d'augmentation (si c'est un max) ou de diminution (si c'est un min). Le dernier point de contact de cette droite avec la région réalisable donne la solution optimale.

Méthode de résolutions d'un PL | Résolution graphique | Exemple 1

Soit le PL suivant:

$$\begin{cases} \max Z = 600X_1 + 400X_2 \\ 4X_1 + 5X_2 \leq 55 \\ X_1 + 3X_2 \leq 27 \\ 2X_1 + X_2 \leq 20 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

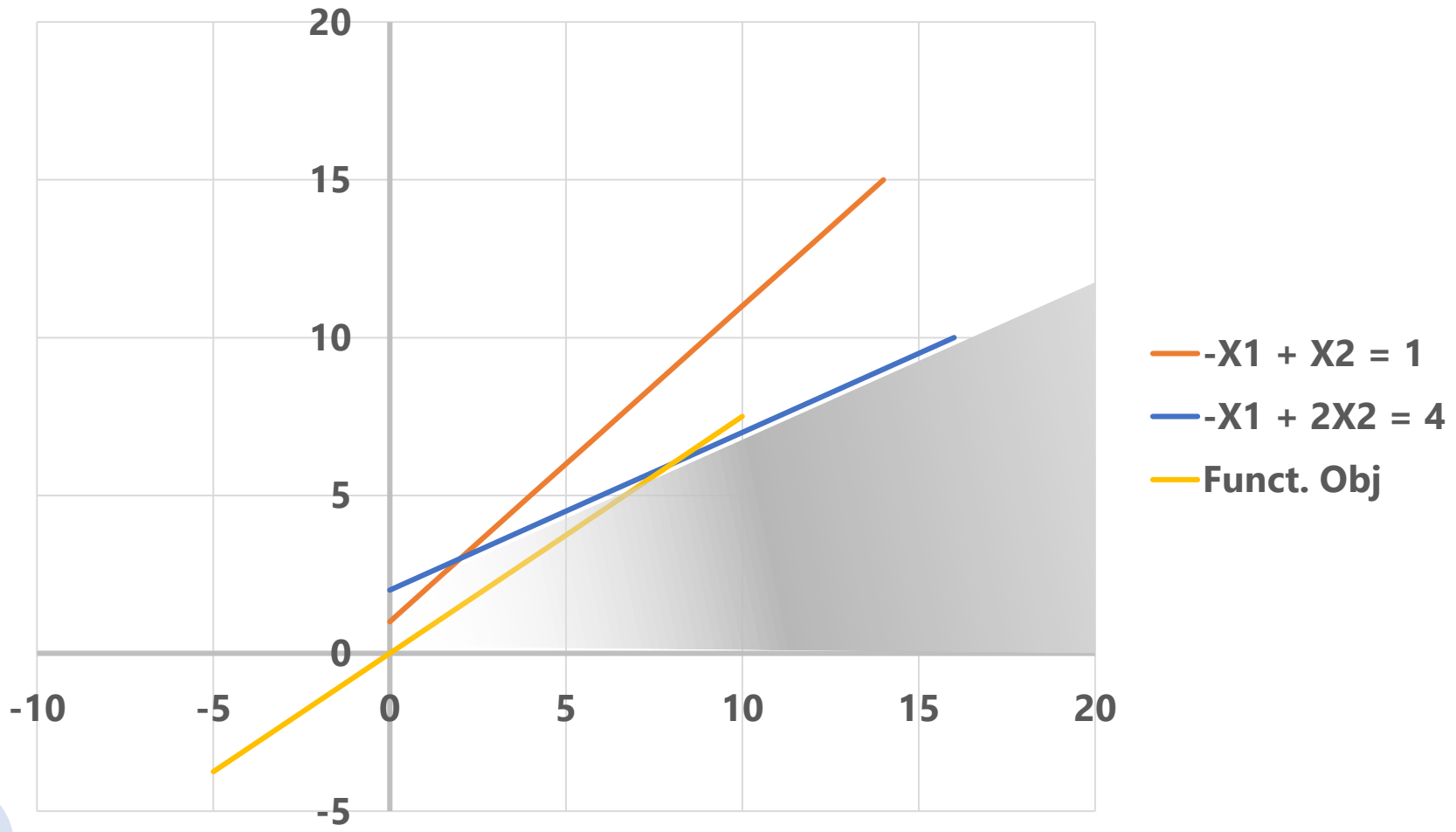
Problème borné avec solution unique



Soit le PL suivant:

$$\begin{cases} \max Z = -3X_1 + 4X_2 \\ -X_1 + X_2 \leq 1 \\ -X_1 + 2X_2 \leq 4 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

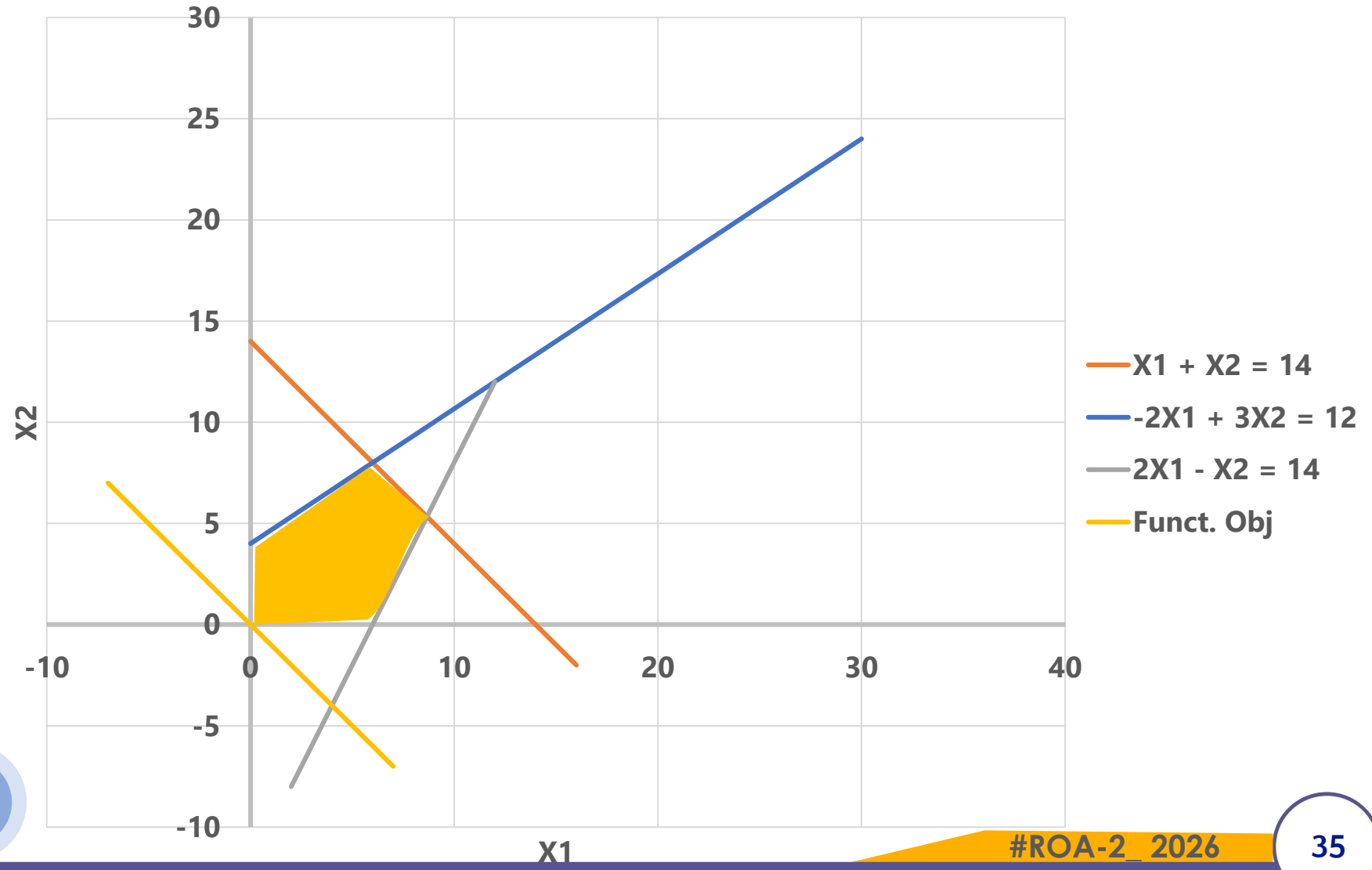
Polyèdre réalisable non borné avec solution optimale unique : (2,3)



Soit le PL suivant:

$$\begin{cases} \max Z = X_1 + X_2 \\ X_1 + X_2 \leq 14 \\ -2X_1 + 3X_2 \leq 12 \\ 2X_1 - X_2 \leq 12 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

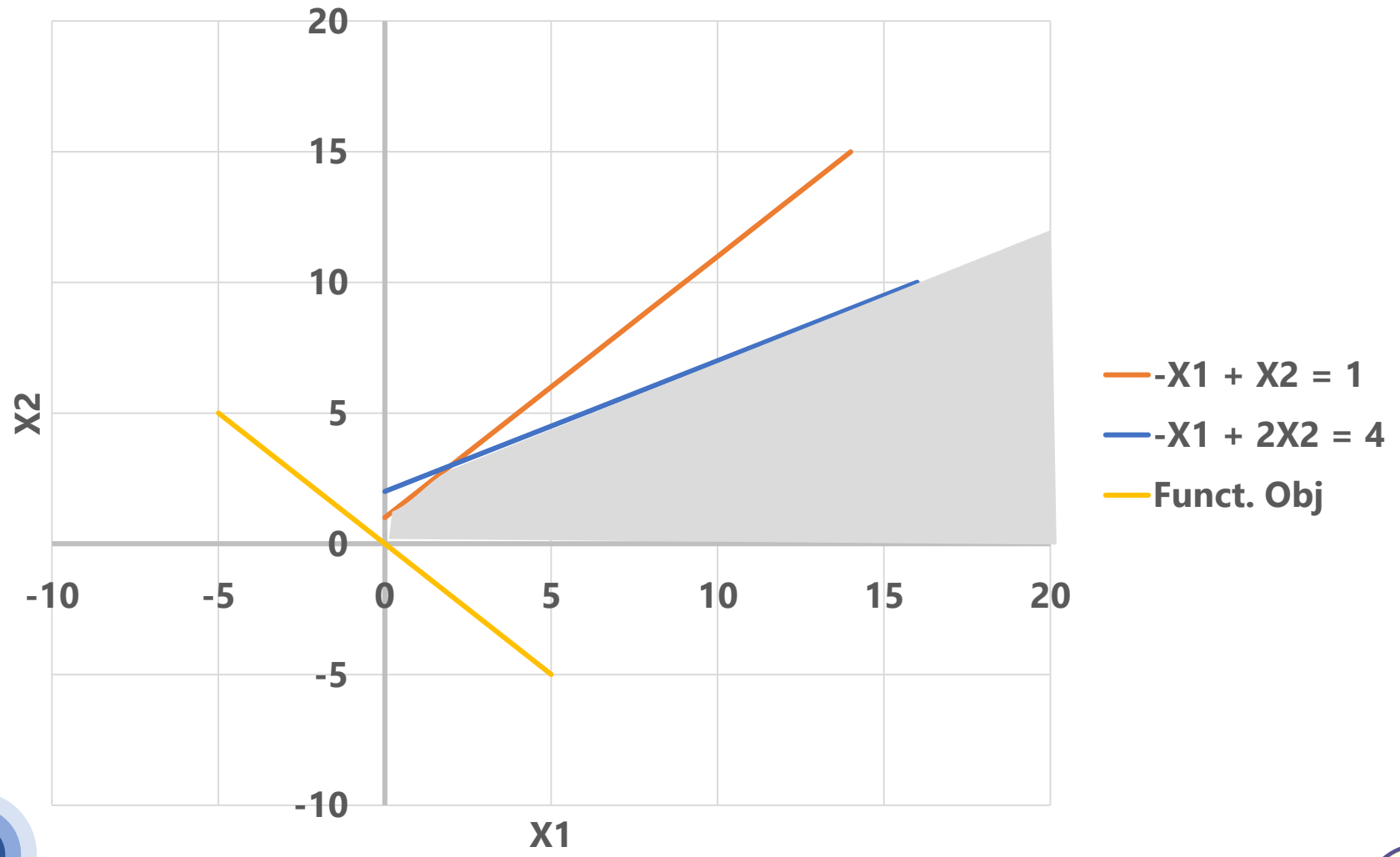
Problème borné avec une infinite de solutions



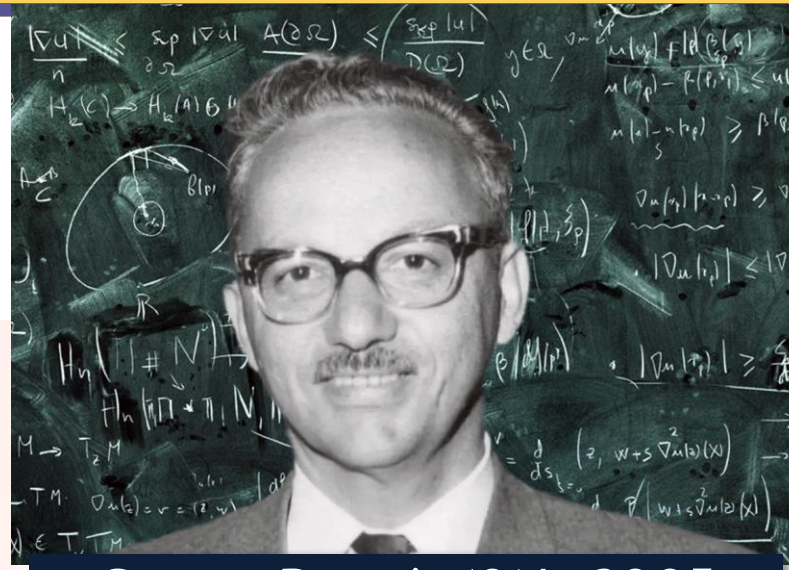
Soit le PL suivant:

$$\begin{cases} \max Z = X_1 + X_2 \\ -X_1 + X_2 \leq 1 \\ -X_1 + 2X_2 \leq 4 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

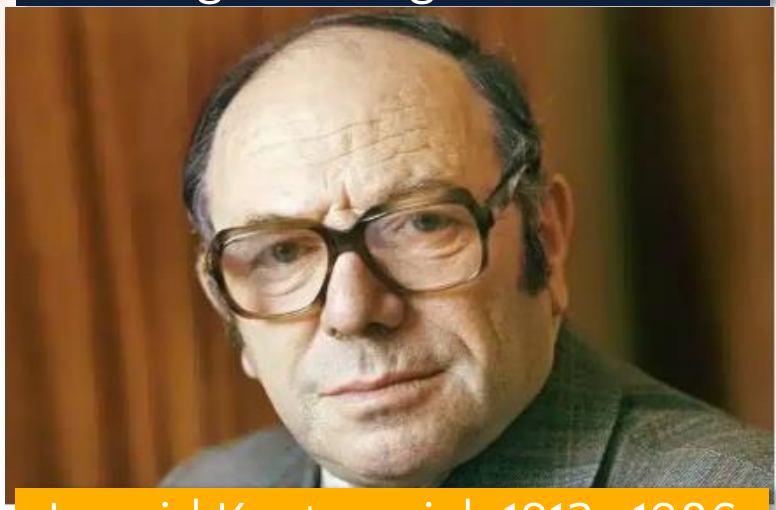
Problème non borné sans solution (pas de maximum fini)



L'algorithme du simplexe a été mis au point par George Dantzig en 1947. Il consiste à améliorer progressivement une solution de base **non dégénérée** (correspondant à l'une des extrémités du polyèdre), en se déplaçant le long des arêtes du polyèdre des solutions réalisables.



George Dantzig 1914 -2005



Leonid Kantarovich 1912 -1986

Une **solution de base non dégénérée** est une solution de base faisable dans laquelle **toutes les variables de base sont strictement positives**, c'est-à-dire :

$$x_B > 0$$

Cela signifie que **chaque contrainte d'égalité est active** et qu'aucune variable de base ne vaut zéro.

Chaque **solution de base faisable** correspond à un **sommet (ou coin)** de la région réalisable (le polygone ou polytope défini par les contraintes).
Si la solution est **non dégénérée**, c'est un coin "normal" : l'intersection exacte de ***m*** contraintes.

Si la solution est **dégénérée**, plusieurs contraintes supplémentaires passent aussi par ce même point.
On est donc "bloqué" sur le même sommet malgré un changement de base

Méthode de résolutions d'un PL

Méthode du simplexe

La méthodologie proposée pour cette technique consiste à visiter **tous les états possibles** dans un système en partant d'un sommet vers un sommet adjacent de manière à réviser et améliorer la fonction objective.

1. La première démarche consiste à **transformer les contraintes d'inégalité en contraintes d'égalité** en ajoutant les variables d'écart.

2. Les variables originales sont mises **hors-base** et **les variables d'écart en base**. On échange ensuite une variable hors-base avec une variable de base, en choisissant comme entrante celle qui possède **le coefficient le plus élevé** dans la fonction objectif.

3. La variable sortante est **la première à s'annuler**. On répète le processus jusqu'à ce que **tous les coefficients de la fonction objective soient négatifs ou nuls**. Dans ce cas, on arrête et la solution optimale est trouvée.

- Dans la méthode dite «**des tableaux de simplexe**», on présente à la fois les données et contraintes du problème, et la solution en cours d'optimisation, sous forme d'un tableau.
- Chaque **ligne** correspond à une équation du système des contraintes, écrite sous forme **canonique** (avec les variables de base isolées).
- La **dernière ligne** correspond à l'équation de la fonction objectif Z.

Variables de base		b
⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮
Z		c

- Les variables hors base sont fixées à 0.
- Les variables de base prennent les valeurs données dans la colonne b.
- La valeur courante de l'objectif est donnée dans la dernière case c.
  Exemple : si la base est **{x3,x4}**, alors x1=x2=0, et x3=b3, x4=b4.

Variables de base		b
⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮
Z		c

Méthode de résolutions d'un PL | Méthode du simplexe (Par Tableaux)

Condition d'optimalité

- La dernière ligne (ligne de Z) s'écrit :
  $Z = c - \sum_{variables\ hors\ base} z_j x_j$

Les coefficients z_j mesurent **l'amélioration possible de Z** si la variable x_j entre dans la base :

1. Si **tous les** $z_j \leq 0$, aucune amélioration n'est possible → la solution courante est **optimale**.
2. Si un $z_j > 0$, on peut encore augmenter Z → on choisit la variable correspondante comme **variable entrante**.

Règles de pivot

Variable entrante :

- On choisit la variable hors base dont le coefficient z_j est le **plus grand positif** (c'est celle qui augmente le plus vite Z et ça correspond à la colonne pivot).

Variable sortante :

- On applique le **test du rapport minimum** : $min_i = \frac{b_i}{a_{ij}}$

Méthode de résolutions d'un PL | **Méthode du simplexe (Par Tableaux)**

Pivotage

- On exprime la nouvelle variable entrante en fonction des autres (on met son coefficient pivot à 1, et on élimine sa colonne dans les autres lignes). Ainsi, on obtient un nouveau tableau représentant la nouvelle base.

- On garde toujours le système sous la forme :
  $x_i + \sum_j a_{ij}x_j = b_i$, $i \in$ base.
  Le coefficient de sa propre variable (à gauche) est **1**, toutes les autres variables de base apparaissent avec coefficient **0**.
  Autrement dit, chaque variable de base est déjà **isolée** dans son équation, comme si on écrivait un système "prêt à l'usage".

Mise à jour des équations

- Supposons que la variable entrante est x_r , et que la variable sortante est x_s.
  À partir de l'équation de x_s : $x_s + a_{sr}\, x_r + \sum_{j\neq r} a_{sj}x_j = b_s \Rightarrow x_r = \frac{1}{a_{sr}} (b_s - x_s - \sum_{j\neq r} a_{sj}x_j)$

- En substituant cette expression dans toutes les autres lignes du tableau (y compris celle de Z), on obtient un nouveau système sous forme canonique, donc un nouveau tableau du simplexe

Mise à jour des équations

- L'expression de la variable entrante x_r : $x_r = \frac{1}{a_{sr}} (b_s - x_s - \sum_{j \neq r} a_{sj} x_j)$, peut être réécrite comme une nouvelle équation pour x_r : $x_r + \frac{1}{a_{sr}} x_s + \sum_{j \neq r} \frac{a_{sj}}{a_{sr}} x_j = \frac{b_s}{a_{sr}}$, c'est la nouvelle ligne pivot et ça correspond à :

$$\text{Nouvelle ligne pivot} = \frac{\textit{Ancienne ligne de } x_s}{a_{sr}}$$

- Considérons une autre équation, celle de la variable x_i:
  $x_i + a_{ir} x_r + \sum_j a_{ij} x_j = b_i$, $i \in$ base.

- Substituons x_r par l'expression isolée ci-dessus :
  $x_i + a_{ir} (\frac{1}{a_{sr}} (b_s - x_s - \sum_{j \neq r} a_{sj} x_j) + \sum_j a_{ij} x_j = b_i$

- Développons et regroupons les termes on trouve:
  $x_i - \frac{a_{ir}}{a_{sr}} x_s - \sum_{j \neq r} (a_{ij} - \frac{a_{ir} a_{sj}}{a_{sr}}) x_j = b_i - \frac{a_{ir}}{a_{sr}} b_s$

Mise à jour des équations

- Observons maintenant **la nouvelle ligne pivot** :

$$x_r + \frac{1}{a_{sr}} x_s + \sum_{j \neq r} \frac{a_{sj}}{a_{sr}} x_j = \frac{b_s}{a_{sr}}$$

- Multiplions cette nouvelle ligne pivot par a_{ir} (l'élément de la colonne pivot dans la ligne *i*):

$$a_{ir}\, x_r + \frac{a_{ir}}{a_{sr}} x_s + \sum_{j \neq r} \frac{a_{ir}\, a_{sj}}{a_{sr}} x_j = \frac{a_{ir} b_s}{a_{sr}}$$

- Soustrayons cette expression de l'ancienne équation de x_i :

$$(x_i + a_{ir} x_r + \sum_j a_{ij} x_j) - (a_{ir}\, x_r + \frac{a_{ir}}{a_{sr}} x_s + \sum_{j \neq r} \frac{a_{ir}\, a_{sj}}{a_{sr}} x_j = \frac{a_{ir} b_s}{a_{sr}})$$

- Simplifions, ça donne:

$$x_i - \frac{a_{ir}}{a_{sr}} x_s - \sum_{j \neq r} (a_{ij} - \frac{a_{ir} a_{sj}}{a_{sr}})\, x_j = b_i - \frac{a_{ir} b_s}{a_{sr}};$$ **C'est exactement le même résultat que celui obtenu par substitution**

Conclusion:

Nouvelle ligne *i* = Ancienne ligne *i* − a_{ir} × (Nouvelle ligne **pivot**)

Soit le PL suivant:

$$\begin{cases} Z_{max} = 6X_1 + 12X_2 \\ 5X_1 + 3X_2 \leq 300 \ldots\ldots\ldots (1) \\ 2X_1 + 3X_2 \leq 240 \ldots\ldots\ldots (2) \\ X_1 + 3X_2 \leq 180 \ldots,,\ldots (3) \end{cases}$$

Forme standard

$$Z_{max} = 6X_1 + 12X_2 + 0.X_3 + 0.X_4 + 0.X_5$$
$$5X_1 + 3X_2 + X_3 = 300$$
$$2X_1 + 3X_2 + X_4 = 240$$
$$X_1 + 3X_2 + X_5 = 180$$

1ère Itération:

$Z = 6X_1 + 12X_2 = 0$ / variables de base = 0

$Z - 6X_1 - 12X_2 = 0 \Rightarrow -Z + 6X_1 + 12X_2 = 0$ (pour travailler avec des coeff positifs)

	X1	X2	X3	X4	X5	b
X3	5	3	**1**	**0**	**0**	**300**
X4	2	3	**0**	**1**	**0**	**240**
X5	1	3	0	0	1	180
-Z	6	12	**0**	**0**	**0**	**0**

1. Variable entrante c'est X_2 et c'est la colonne pivot (plus grand coef dans Z).
2. Variable sortante X_5 et c'est **la ligne pivot** (plus petit rapport **b/**élément correspondant **dans la colonne pivot**)

Tableau de l'itération précédente

	X1	X2	X3	X4	X5	b
X3	5	3	1	0	0	300
X4	2	3	0	1	0	240
X5	1	3	0	0	1	180
-Z	6	12	0	0	0	0

2ème Itération:

i. Ligne pivot = ancienne ligne / **Pivot**.

ii. Autres lignes = ligne actuelle – (**élément de sa colonne pivot** * **nouvelle ligne pivot**).

	X1	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**b**
X3	4	0	1	0	-1	120
X4	1	**0**	**0**	**1**	**-1**	**60**
X2	1/3	**1**	**0**	**0**	**1/3**	**60**
-Z	2	**0**	**0**	**0**	**-4**	**-720**

1. Variable entrante c'est X_1 et c'est la colonne pivot (plus grand coef dans Z).
2. Variable sortante X_3 et c'est **la ligne pivot** (plus petit rapport **b/**élément correspondant **dans la colonne pivot**)

Tableau de l'itération précédente

	X1	X2	X3	X4	X5	b
X3	4	0	1	0	-1	120
X4	1	0	0	1	-1	60
X2	1/3	1	0	0	1/3	60
-Z	2	0	0	0	-4	-720

3ème Itération:

i. Ligne pivot = ancienne ligne / **Pivot**.

ii. Autres lignes = ligne actuelle – (**élément de sa colonne pivot** * **nouvelle ligne pivot**).

	X1	X2	X3	X4	X5	b
X1	1	0	1/4	0	-1/4	30
X4	0	0	-1/4	1	-3/4	30
X2	0	1	-1/12	0	5/12	50
-Z	0	0	-1/2	0	-7/2	-780

Les coefficients z_j sont tous deux négatifs : le maximum est atteint.
On retrouve ainsi la
solution **X1 = 30**, **X2 = 50**, **Z= 780**.

Cas de solution multiple…

Soit le PL suivant:

$$\begin{cases} \max Z = X_1 + X_2 \\ X_1 + X_2 \leq 14 \\ -2X_1 + 3X_2 \leq 12 \\ 2X_1 - X_2 \leq 12 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Forme standard:

$$\begin{cases} \max Z = X_1 + X_2 + 0.X_3 + 0.X_4 + 0.X_5 \\ X_1 + X_2 + X_3 = 14 \\ -2X_1 + 3X_2 + X_4 = 12 \\ 2X_1 - X_2 + X_5 = 12 \\ X_1, X_2; X_3; X_4; X_5 \geq 0 \end{cases}$$

1ère Itération:

	X1	X2	X3	X4	X5	b
X3	1	1	1	0	0	14
X4	-2	3	0	1	0	12
X5	2	-1	0	0	1	12
-Z	1	1	0	0	0	0

1. Variable entrante c'est X_1 et c'est la colonne pivot (plus grand coef dans Z, **choix arbitraire en X1 et X2**).
2. Variable sortante X_5 et c'est **la ligne pivot** (plus petit rapport **12/2, on ignore X4 car coeff < 0**)

Cas de solution multiple…

Itération précédente:

	X1	X2	X3	X4	X5	b
X3	1	1	1	0	0	14
X4	-2	3	0	1	0	12
X5	2	-1	0	0	1	12
-Z	1	1	0	0	0	0

2ème Itération:

	X1	X2	X3	X4	X5	b
X3	0	3/2	1	0	-1/2	8
X4	0	2	0	1	1	24
X1	1	-1/2	0	0	1/2	6
-Z	0	3/2	0	0	-1/2	-6

1. Variable entrante c'est $\mathbf{X_2}$ et c'est la colonne pivot (plus grand coef dans Z).
2. Variable sortante $\mathbf{X_3}$ et c'est **la ligne pivot.**

Cas de solution multiple…

Itération précédente:

	X1	X2	X3	X4	X5	b
X3	0	3/2	1	0	-1/2	8
X4	0	2	0	1	1	24
X1	1	-1/2	0	0	1/2	6
-Z	0	3/2	0	0	-1/2	-6

3ème Itération:

	X1	X2	X3	X4	X5	b
X2	0	1	2/3	0	-1/3	16/3
X4	0	0	-4/3	1	5/3	40/3
X1	1	0	1/3	0	1/3	26/3
-Z	0	0	-1	0	0	-14

1. Les coefficients z_j sont tous deux ≤ 0, le maximum est atteint. On retrouve ainsi la solution **X1 = 26/3**, **X2 = 16/3**, **Z= 14**.

2. La variable **X5 non basique** a un coefficient nul dans la ligne Z, alors cette variable peut entrer dans la base sans changer la valeur de l'objectif

Cas de solution multiple…

Itération précédente:

	X1	X2	X3	X4	X5	b
X2	0	1	2/3	0	-1/3	16/3
X4	0	0	-4/3	1	5/3	40/3
X1	1	0	1/3	0	1/3	26/3
-Z	0	0	-1	0	0	-14

4ème Itération:

	X1	X2	X3	X4	X5	b
X2	0	1	2/5	1/5	0	8
X5	0	0	-4/5	3/5	1	8
X1	1	0	3/5	-1/5	0	6
-Z	0	0	1	0	0	-14

1. Donc la 2ème base optimale adjacente c'est **X1 = 6**, **X2 = 8**, **Z= 14** (inchangée).

2. **Tous les points du segment qui relie les 2 solutions A=(6,8) et B=(26/3, 16/3)** sont également optimaux.

3. L'équation de la droite affine reliant ces 2 point A et B est :
ax1 + bx2 = c avec a = $(x2_A - x2_B)$; b=$(x1_B - x2_A)$ et c= a.$x1_A$ + b$x2_A$
Ça donne **x1 + x2 = 14**

Soit le PL suivant:

$$\begin{cases} \max Z = X_1 + X_2 \\ -X_1 + X_2 \leq 1 \\ -X_1 + 2X_2 \leq 4 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Forme standard:

$$\begin{cases} \max Z = X_1 + X_2 \\ -X_1 + X_2 + X_3 = 1 \\ -X_1 + 2X_2 + X_4 = 4 \\ X_1, X_2; X_3; X_4 \geq 0 \end{cases}$$

1ère Itération:

	X1	X2	X3	X4	b
X3	-1	1	1	0	1
X4	-1	2	0	1	4
-Z	1	1	0	0	0

1. Variable entrante c'est $\mathbf{X_2}$ et c'est la colonne pivot (exæquo avec X1, on choisi celle ayant des coeff positifis).
2. Variable sortante $\mathbf{X_3}$ et c'est **la ligne pivot.**

Itération précédente:

	X1	X2	X3	X4	b
X3	-1	1	1	0	1
X4	-1	2	0	1	4
-Z	1	1	0	0	0

2ème Itération:

	X1	X2	X3	X4	b
X2	-1	1	1	0	1
X4	1	0	-2	1	2
-Z	2	0	-1	0	-1

1. Variable entrante c'est $\mathbf{X_1}$ et c'est la colonne pivot.
2. Variable sortante $\mathbf{X_4}$ et c'est **la ligne pivot.**

Itération précédente:

	X1	X2	X3	X4	b
X2	-1	1	1	0	1
X4	1	0	-2	1	2
-Z	2	0	-1	0	-1

3ème Itération:

	X1	X2	X3	X4	b
X2	0	1	-1	1	3
X1	1	0	-2	1	2
-Z	0	0	3	-2	-5

- **Toutes** les composantes de la colonne x3 sont ≤ 0, donc **aucun** ratio possible → on **ne peut pas** trouver une variable sortante.
- Cela signifie que l'on peut augmenter x3 indéfiniment et la valeur de Z augmentera sans borne.
- Une variable entrante avec zj > 0 dont la colonne a **tous** coefficients ≤ 0 ⇒ le problème est **non borné** (la fonction objectif peut tendre vers +∞ sur le domaine réalisable).

Méthode de résolutions d'un PL

Méthode des deux phases

Soit le PL suivant:

$$\begin{cases} \max Z = 5X_1 + 4X_2 \\ X_1 + X_2 \leq 6 \\ X_1 + 2X_2 \geq 6 \\ 3X_1 + 2X_2 \geq 12 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Variables d'écart}} \begin{cases} \max Z = 5X_1 + 4X_2 \\ X_1 + X_2 + X_3 = 6 \\ X_1 + 2X_2 - X_4 = 6 \\ 3X_1 + 2X_2 - X_5 = 12 \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Si le problème initial **n'est pas sous la forme canonique**, même en introduisant des variables d'écart, **on n'obtiendra pas aisément** une solution de base **de départ.** En effet, certaines des variables introduites figureront avec le coefficient –1 du fait du changement du sens de l'inégalité dans la contrainte correspondante.
- On sera donc amené à introduire de nouvelles variables, **dites variables artificielles** qui figureront provisoirement dans la formulation du PL jusqu'à l'obtention, si possible, **d'une base de départ** avec les variables initiales.
- G. Dantzig et d'autres chercheurs de RAND Corporation ont mis au point **la méthode de deux phases** dans le but de répondre à ce problème.

Méthode de résolutions d'un PL

Méthode des deux phases

Début

- Mettre les contraintes sous forme d'égalités ;
- Rendre positif le second membre des contraintes ;
- Introduire les variables artificielles v_i dans les contraintes :
  $\Sigma_j\ a_{ij}\ x_j + v_i = b_i, \quad x_j, v_i \geq 0$
- Sous ces contraintes, résoudre le PL :
  $\max W = -\Sigma_i\ v_i$
- **Si $\forall i \in \{1,\dots,m\}$, $v_i = 0$**
  - Résoudre le PL initial en prenant comme solution de base de départ.
  - la solution obtenue à l'issue de la première phase.
  - **Sinon**
    - Il n'y a pas de solution réalisable.
- **Fin**

- On n'introduira que le nombre nécessaire de variables artificielles (≤ m), c'est à dire dans les contraintes qui le nécessitent.
- Lorsqu'une variable artificielle sort de base, cette sortie est définitive et on la raye de la liste des variables.
- Le premier tableau du simplexe de la deuxième phase est identique au dernier tableau de la première phase.

Reprenant l'exemple précédent. Les deux dernières équations nécessitent l'introduction de deux variables artificielles a_1, a_2

$$\begin{cases} \max Z = 5X_1 + 4X_2 \\ X_1 + X_2 + X_3 = 6 \\ X_1 + 2X_2 - X_4 = 6 \\ 3X_1 + 2X_2 - X_5 = 12 \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0 \end{cases}$$

Variables artificielles ⟶

$$\begin{cases} \max W = -a_1 - a_2 \\ X_1 + X_2 + X_3 = 6 \\ X_1 + 2X_2 - X_4 + a_1 = 6 \\ 3X_1 + 2X_2 - X_5 + a_2 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a_1, a_2 \geq 0 \end{cases}$$

1ère Phase (Itération 1):

$$\begin{cases} \max W = -a_1 - a_2 \\ X_1 + X_2 + X_3 = 6 \\ X_1 + 2X_2 - X_4 + a_1 = 6 \\ 3X_1 + 2X_2 - X_5 + a_2 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a_1, a_2 \geq 0 \end{cases}$$

Nous avons : $\max W = -a_1 - a_2$

$a_1 = 6 - X_1 - 2X_2 + X_4$

$a_2 = 12 - 3X_1 - 2X_2 + X_5$

$a_1 + a_2 = -4X_1 - 4X_2 + X_4 + X_5 + 18$

$W = 4X_1 + 4X_2 - X_4 - X_5 - 18$

$-W + 4X_1 + 4X_2 - X_4 - X_5 = 18$

	X1	X2	X3	X4	X5	a1	a2	b
X3	1	1	1	0	0	0	0	6
a1	1	2	0	-1	0	1	0	6
a2	3	2	0	0	-1	0	1	12
	4	4	0	-1	-1	0	0	18

Variable entrante c'est $\mathbf{X_1}$ et c'est la colonne pivot (plus grand coef dans Z, 4, ex æquo avec $\mathbf{X_2}$).
Variable sortante $\mathbf{a_3}$ et c'est **la ligne pivot.**

1ère Phase (Itération 2):

Itération précédente:

	X1	X2	X3	X4	X5	a1	a2	b
X3	1	1	1	0	0	0	0	6
a1	1	2	0	-1	0	1	0	6
a2	3	2	0	0	-1	0	1	12
	4	4	0	-1	-1	0	0	18

	X1	X2	X3	X4	X5	a1	a2	b
X3	0	1/3	1	0	1/3	0	-1/3	2
a1	0	4/3	0	-1	1/3	1	-1/3	2
X1	1	2/3	0	0	-1/3	0	1/3	4
	0	4/3	0	-1	1/3	0	-4/3	2

Variable entrante c'est X_2 et c'est la colonne pivot (plus grand coef dans Z, 4/3). Variable sortante a_1 et c'est **la ligne pivot.**

1ère Phase (Itération 3):

Itération précédente:

	X1	X2	X3	X4	X5	a1	a2	b
X3	0	1/3	1	0	1/3	0	-1/3	2
a1	0	4/3	0	-1	1/3	1	-1/3	2
X1	1	2/3	0	0	-1/3	0	1/3	4
	0	4/3	0	-1	1/3	0	-4/3	2

	X1	X2	X3	X4	X5	a1	a2	b
X3	0	0	1	1/4	1/4	-1/4	-1/4	3/2
X2	0	1	0	-3/4	1/4	3/4	-1/4	3/2
X1	1	0	0	1/2	-1/2	-1/2	1/2	3
	0	0	0	0	0	-1	-1	0

Comme W=0 et **aucune variable artificielle n'est en base**, on a réussi à obtenir une base réalisable {x1,x2,x1}

Méthode de résolutions d'un PL | Méthode des deux phases | Exemple 1

2ème Phase (Itération 1):

Phase précédente:

	X1	X2	X3	X4	X5	a1	a2	b
X3	0	0	1	1/4	1/4	-1/4	-1/4	3/2
X2	0	1	0	-3/4	1/4	3/4	-1/4	3/2
X1	1	0	0	1/2	-1/2	-1/2	1/2	3
	0	0	0	0	0	-1	-1	0
Z	**-5**	**-4**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

max Z = 5X1 + 4X2

On **retire** les colonnes a1, a2 et on reconstruit la ligne Z

X1, X2 sont **dans la base**, on doit **éliminer leurs coefficients de la ligne Z, en faisant (**5 x ligne x1) + (4 x ligne x2) + Z (**Z – 5X1 – 4X2 = 0**), ça donne:

	X1	X2	X3	X4	X5	b
X3	0	0	1	1/4	1/4	3/2
X2	0	1	0	-3/4	1/4	3/2
X1	1	0	0	1/2	-1/2	3
Z	0	0	0	-1/2	-3/2	21
-Z	0	0	0	1/2	3/2	-21

Variable entrante c'est X_5 et c'est la colonne pivot (plus grand coef dans Z, 4/3). Variable sortante X_3 (au choix entre X2 et X3).

2ème Phase (Itération 2):

Phase précédente:

	X1	X2	X3	X4	X5	b
X3	0	0	1	1/4	1/4	3/2
X2	0	1	0	-3/4	1/4	3/2
X1	1	0	0	1/2	-1/2	3
Z	0	0	0	-1/2	-3/2	21
-Z	0	0	0	1/2	3/2	-21

	X1	X2	X3	X4	X5	b
X5	0	0	4	1	1	6
X2	0	1	-1	-1	0	0
X1	1	0	2	1	0	6
-Z	0	0	-6	-1	0	-30

Tous les coeff sont ≤ 0 ⇒ optimalité atteinte:

X1 = 6; X2 = 0 et Z = 30

Soit le PL suivant:

$$\begin{cases} \max Z = 5X_1 + 7X_2 \\ X_1 + X_2 \geq 6 \\ X_1 \geq 4 \\ X_2 \leq 3 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Variables d'écart et artificielles →

$$\begin{cases} \max W = -a_1 - a_2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + a_1 = 6 \\ x_1 - x_4 + a_2 = 4 \\ x_2 + x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a_1, a_2 \geq 0 \end{cases}$$ →

Nous avons :

$a_1 = 6 - X_1 - X_2 + X_3$

$a_2 = 4 - X_1 + X_4$

$a_1 + a_2 = -2X_1 - X_2 + X_3 + X_4 + 10$

$-W + 2X_1 + X_2 - X_3 - X_4 = 10$

1ère Phase (Itération 1):

	X1	X2	X3	X4	X5	a1	a2	b
a1	1	1	-1	0	0	1	0	6
a2	1	0	0	-1	0	0	1	4
x5	0	1	0	0	1	0	0	3
	2	1	-1	-1	0	0	0	10

Variable entrante c'est **X_1** et c'est la colonne pivot (plus grand coef dans Z, 2). Variable sortante **a_2** et c'est **la ligne pivot.**

1ère Phase (Itération 2):

Itération précédente:

	X1	X2	X3	X4	X5	a1	a2	b
a1	1	1	-1	0	0	1	0	6
a2	1	0	0	-1	0	0	1	4
x5	0	1	0	0	1	0	0	3
	2	1	-1	-1	0	0	0	10

	X1	X2	X3	X4	X5	a1	a2	b
a1	0	1	-1	1	0	1	-1	2
x1	1	0	0	-1	0	0	1	4
x5	0	1	0	0	1	0	0	3
	0	1	-1	0	0	0	-1	2

Variable entrante c'est X_2 et c'est la colonne pivot (plus grand coef dans Z, 1). Variable sortante a_1 et c'est **la ligne pivot.**

1ère Phase (Itération 3):

Itération précédente:

	X1	X2	X3	X4	X5	a1	a2	b
a1	0	1	-1	1	0	1	-1	2
x1	1	0	0	-1	0	0	1	4
x5	0	1	0	0	1	0	0	3
	0	1	-1	0	0	0	-1	2

	X1	X2	X3	X4	X5	a1	a2	b
x2	0	1	-1	1	0	1	-1	2
x1	1	0	0	-1	0	0	1	4
x5	0	0	1	-1	1	-1	1	1
	0	0	0	-1	0	-1	0	0

On a $W = 0$ et **les artificielles ne sont plus dans la base** (les variables de base sont x2, x1, x5). On a une solution réalisable pour le problème original.

Méthode de résolutions d'un PL | Méthode des deux phases | Exemple 2

2ème Phase (Itération 1):

Phase précédente:

	X1	X2	X3	X4	X5	a1	a2	b
x2	0	1	-1	1	0	1	-1	2
x1	1	0	0	-1	0	0	1	4
x5	0	0	1	-1	1	-1	1	1
	0	0	0	-1	0	-1	0	0
Z	**-5**	**-7**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

max Z = $5X_1 + 7X_2$.

On **retire** les colonnes a1, a2 et on reconstruit la ligne Z.

X1, X2 sont **dans la base**, on doit **éliminer leurs coefficients de la ligne Z, en faisant (**5 x ligne x1) + (7 x ligne x2) + Z (**Z – 5X1 – 7X2 = 0**), ça donne:

	X1	X2	X3	X4	X5	b
x2	0	1	-1	1	0	2
x1	1	0	0	-1	0	4
x5	0	0	1	-1	1	1
Z	0	0	-7	2	0	34
-Z	0	0	7	-2	0	-34

Variable entrante c'est $\mathbf{X_3}$ et c'est la colonne pivot (plus grand coef dans Z, 7). Variable sortante $\mathbf{X_5}$ et c'est **la ligne pivot.**

2ème Phase (Itération 2):

Itération précédente:

	X1	X2	X3	X4	X5	b
x2	0	1	-1	1	0	2
x1	1	0	0	-1	0	4
x5	0	0	1	-1	1	1
Z	0	0	-7	2	0	34
-Z	0	0	7	-2	0	-34

	X1	X2	X3	X4	X5	b
x2	0	1	0	0	1	3
x1	1	0	0	-1	0	4
x3	0	0	1	-1	1	1
-Z	0	0	0	5	-7	-40

pour que la variable X4 (coeff positif dans Z) entre en base il faut que sa colonne comporte au moins un coefficient strictement positif (sinon on ne peut pas limiter sa augmentation), **donc le problème est non borné**