الفائدة المركبة.

يعتبر المال أساس الحياة الاقتصادية وهو الأساس المنطقي والمتفق عليه للتبادل التجاري سواء كان سلعيًا أو خدميًا، وكذلك فهو الأساس المقبول لتقدير قيم السلع والخدمات.

الادخار

يُعرف الادخار بأنه عدم استخدام الأموال المملوكة في الاستهلاك بل يتم الاحتفاظ بها لوقت الاحتياج إليها. كما أن الادخار غالبًا ما يأخذ إحدى الصورتين التاليتين:

- الاكتناز: أي الاحتفاظ بالأموال المملوكة لدى الشخص المالك لها دون أي توظيف لها.
- الاستثمار: أي توظيف وتشغيل هذه الأموال في المجالات الاقتصادية المختلفة.

في الرياضيات المالية، الفائدة المركبة هي العائد على رأس المال المستثمر الذي يتم حسابه في نهاية مدة الاستثمار، ويتم حساب هذا العائد في نهاية كل فترة زمنية على أساس أصل المبلغ المستثمر مضافًا إليه الفوائد المحققة في الفترات الزمنية السابقة.

ومن هذا التعريف نستنتج أن:

- الفائدة المركبة هي ثمن تشغيل رأس المال كعامل من عوامل الإنتاج.
- الفائدة المركبة تُحسب على أساس المبلغ الأصلي المستثمر بالإضافة للفوائد التي تم حسابها عن الفترات السابقة.

ومن هذا التعريف نجد أن المبلغ الذي يُحسب على أساسه الفائدة المركبة في تزايد مستمر بقيمة الفوائد المحققة عن الفترات السابقة، وذلك بعكس الفائدة البسيطة التي تتسم بثبات المبلغ الذي يُحسب على أساسه الفائدة وهو أصل المبلغ المستثمر فقط.

بمعنى آخر، يمكن القول أن الفائدة المركبة هي التي يتم فيها الحصول على فائدة على المبلغ الأصلي والفائدة معًا، أي الحصول على فائدة على الفائدة.

مثال توضيحي: في 2018/01/01 تم اقتراض مبلغ 200000دج من احد البنوك بمعدل فائدة 7%.

الفوائد المترتبة عن هذا المبلغ في 2019/01/01:

$$I = 200000 * 0.07 * \left(\frac{1}{1}\right) = 200000 * 0.07 = 14000$$

في بداية السنة الثانية (2019) يكون المبلغ الجديد المتحصل عليه (200000دج+14000دج=214000دج) هو المبلغ الاصلي لحساب فائدة هذه السنة:

$$I = 2140000 * 0.07 = 14980$$

في بداية السنة الثالثة (2020) يكون المبلغ الجديد المتحصل عليه (2014000دج+14980دج= 228980دج) هو المبلغ الاصلي لحساب فائدة هذه السنة:

$$I = 228980 * 0.07 = 16028{,}6$$

وهكذا السنة الرابعة والخامسة الى غاية نهاية مدة الاقتراض.

ملاحظة: الرموز المُستخدمة في الفائدة البسيطة هي نفسها المستخدمة في الفائدة المركبة.

- المبلغ أو الأصل المستثمر، ويُرمز له بالرمز (C).
- معدل الفائدة ويُرمز له بالرمز (t).
- مدة الاستثمار، ويُرمز له بالرمز (n).
- جملة المبلغ المستثمر في نهاية مدة الاستثمار (At).

قانون حساب الجملة بفائدة المركبة

من خلال محددات الفائدة المركبة التي تطرقنا إليها أعلاه، يمكننا استنتاج قانون الفائدة المركبة من خلال الجدول التالي:

الفترة (n)	المبلغ المستثمر لكل فترة (n)	الفائدة (I) لكل فترة (n)	الجملة المحصلة (At) في الفترة (n)	
1	C	$C*t$	$C+I_1=C+(C*t)$	$C(1+t)^1$
2	$C(1+t)$	$[C(1+t)]*t$	$C(1+t)+I_2=\{C(1+t)+[C(1+t)*t]\}$ عامل مشترك $C(1+t)$ $=C(1+t)(1+t)$	$C(1+t)^2$
3	$C(1+t)^2$	$[C(1+t)^2]*t$	$C(1+t)^2+I_3=C(1+t)^2+[C(1+t)^2*t]$ عامل مشترك $C(1+t)^2$ $=C(1+t)^2(1+t)$	$C(1+t)^3$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n-1	$C(1+t)^{n-2}$	$[C(1+t)^{n-2}]*t$	$C(1+t)^{n-2}+I_3=C(1+t)^{n-2}+[C(1+t)^{n-2}*t]$ عامل مشترك $C(1+t)^{n-2}$ $=C(1+t)^{n-2}(1+t)$	$C(1+t)^{n-1}$
n	$C(1+t)^{n-1}$	$[C(1+t)^{n-1}]*t$	$C(1+t)^{n-1}+I_3=C(1+t)^{n-1}+[C(1+t)^{n-1}*t]$ عامل مشترك $C(1+t)^{n-1}$ $=C(1+t)^{n-1}(1+t)$	$C(1+t)^n$

من خلال الجدول أعلاه نستنتج قانون الفائدة المركبة(قانون الجملة (At)) المحصلة عن توظيف المبلغ(C) لمدة(n) بمعدل فائدة فتر(t)، تحسب وفقا للعلاقة التالية:

$$\boxed{At=C(1+t)^n}$$

ومنه تحسب الفائدة في نهاية مدة الاستثمار بالعلاقة التالية:

$$I=At-C=[C(1+t)^n-C]$$

$$\boxed{I=C[(1+t)^n-1]}$$

مثال01:

أحسب جملة وفائدة مبلغ 150000دج وظف بمعدل فائدة 8% لمدة خمس سنوات.

الحل:

الجملة (At)=

$$At = C(1+t)^n = 150000(1+0.08)^5 = 220399{,}21$$

الفائدة (I)=

الطريقة (01):

$$I = At - C = 220399{,}21 - 150000 = 70399{,}21$$

الطريقة (02):

$$I = C[1-(1+t)^n] = 150000(1.08^5 - 1) = 70399{,}21$$

<u>عمليات على قانون الفائدة المركبة.</u>

1- **<u>حساب المبلغ الاصلي (C):</u>**

- **حساب المبلغ المستثمر (C) من جملة (At):**

$$At = C(1+t)^n \Leftrightarrow C = \frac{At}{(1+t)^n}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow C = At(1+t)^{-n}}$$

- **حساب المبلغ المستثمر (C) من الفائدة (I):**

$$I = C[(1+t)^n - 1]$$

$$\boxed{\Leftrightarrow C = \frac{I}{[(1+t)^n - 1]}}$$

مثال02: احسب اصل مبلغ مقترض لمدة 5 سنوات بمعدل فائدة مركبة 8 %، حيث نتج عنه في نهاية مدة الاقتراض فوائد بقيمة 46932,80768دج.

الحل:

$$C = \frac{I}{[(1+t)^n - 1]} = \frac{46932{,}80768}{(1.08^5 - 1)} = 100000$$

2- **<u>حساب المعدل (t):</u>**

$$At = C(1+t)^n \Leftrightarrow (1+t)^n = \frac{At}{C} \Leftrightarrow (1+t) = \sqrt[n]{\frac{At}{C}}$$

$$\Leftrightarrow t = \left(\sqrt[n]{\frac{At}{C}} - 1\right) = \left(\sqrt[n]{\frac{C+I}{C}} - 1\right)$$

مثال03: احسب معدل الفائدة المركبة السنوي الذي تم توظيف على اساسه مبلغ 500000دج لمدة 5 سنوات فأنتج في نهاية مدة التوظيف قدرها 234664,0384دج.

الحل:

$$t = \left(\sqrt[n]{\frac{C+I}{C}} - 1\right) = \sqrt[5]{\frac{500000 + 234664{,}0384}{500000}} - 1 = 0.08 = 8\%$$

3- <u>**حساب المدة (n):**</u>

$$At = \mathrm{C}(1+\mathrm{t})^{\mathrm{n}} \Leftrightarrow \frac{At}{C} = (1+\mathrm{t})^{\mathrm{n}}$$

$$log\left(\frac{At}{C}\right) = log(1+\mathrm{t})^{\mathrm{n}} \Leftrightarrow log\left(\frac{At}{C}\right) = n * log(1+\mathrm{t})$$

$$n = \frac{log\left(\frac{At}{C}\right)}{log(1+\mathrm{t})}$$

مثال04: احسب المدة التي اقترض بها مبلغ 250000دج بمعدل فائدة مركبة 12% فأنتج عنه جملة قدرها 393379,84دج.

الحل:

$$n = \frac{log\left(\frac{At}{C}\right)}{log(1+\mathrm{t})} = \frac{log\left(\frac{393379{,}84}{250000}\right)}{log(1+0.12)} = 4_{\text{سنوات}}$$

المعدلات المتناسبة والمعدلات المتكافئة

❖ **المعدلات المتناسبة.**

معدل الفائدة غالبا ما يحدد سنويا، ولكن من الممكن أن تطبق معدلات الفائدة يوميا أو شهريا أ أو فصليا أو سداسيا.

يكون المعدل(t_k) متناسبا مع المعدل السنوي(t) اذا كان حاصل قسمة المعدل السنوي على عدد فترات الرسملة(K) يساوي (t_k)، حيث يحسب المعدل المتناسب وفق العلاقة التالية:

$$t_k = t/_k$$

حيث (K) عدد مرات التوظيف خلال السنة الواحدة.

مثلا: المعدل السنوي 12% تقابله المعدلات المتناسبة التالية:

المعدل السداسي (k=2) لأن السنة فيها سداسيين:

$$t_2 = t/_2 = 12/_2 = 6\%$$

المعدل الثلاثي (k=4) لأن السنة فيها 4 ثلاثيات:

$$t_4 = t/_4 = 12/_4 = 3\%$$

المعدل الشهري (k=12) لأن السنة فيها 12شهر :

$$t_2 = t/_{12} = 12/_2 = 1\%$$

ملاحظة:

المعدلات المتناسبة مع المعدلات السنوية لا تؤدي إلى نفس الجملة لنفس المدة.

مثال05: احسب جملة المبلغ 400000دج وظف لمدة 5 سنوات بمعدل سنوي 6% و مرة ثانية بمعدله التناسبي سداسي الذي يساوي 3%.

الحل:

المعدل السنوي: عدد الفترات الرسملة (n_1=5).

$$At = C(1 + t_{\text{سنوي}})^{n_1} = 400000(1.06)^5 = 535290{,}23$$

المعدل السداسي: بما أن السنة فيها سداسيين (K) لمدة 5 سنوات، يصبح عدد الفترات الرسملة ($n_2=n_1$*K=5*2=10).

$$At = C(1 + t_{\text{سداسي}})^{n_2} = 400000(1.03)^{10} = 537566{,}55$$

❖ **المعدلات المتكافئة:**

المعدلات المتكافئة أو المتعادلة هي عكس المعدلات المتناسبة، إذ تؤدي إلى نفس الجملة لنفس المدة. فنقول عن معدلين أنهما متكافئان إذا اختلفا في قيمتهما وفي فترة رسملتهما، لكنهما ينتجان نفس الجملة المكتسبة لأي فترة زمنية مشتركة محددة .

فالمعدل السنوي (t) بالرسملة السنوية يكون مكافؤ للمعدل السداسي (t2) ذو الرسملة نصف السنوية، اذا انتجا نفس الجملة لنفس المدة.

$$C(1 + t)^n = C(1 + t_k)^{n*k}$$

ومنه يمكن كتابة العلاقة بين المعدل السنوي وأي معدل مكافئ له كمايلي:

$$C(1+t)^{\frac{n}{n}} = C(1+t_k)^{\frac{n*k}{n}} \Leftrightarrow \cancel{C}(1+t)^1 = \cancel{C}(1+t_k)^k$$

$$\Leftrightarrow t_k = \sqrt[k]{(1+t)} - 1$$

$$\boxed{\Leftrightarrow t_k = (1+t)^{\frac{1}{k}} - 1}$$

مثال06: احسب المعدل المكافئ للمعدل السداسي 10.5%.

الحل:

$$t_k = (1+t)^{\frac{1}{k}} - 1 = (1.105)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,05119 = 5.119\%$$

الان عند توظيف أي مبلغين متساويين (مثلا 10000 دج) لأي مدتين متساوين (مثلا 12 سنة) واحد بمعدل سنوي 10.5%، والاخر بمعدل سداسي 5.119 %، ستكون جملتهما متساويتين.

$$10000(1+0.105)^{12} = 10000(1+0.05119)^{24} = 331396,05657$$