المحور الرابع: نظرية الألعاب (المباريات)

1-مقدمة:

تعتبر نظرية الألعاب إحدى الوسائل الحديثة لبحوث العمليات التي تستخدم لاتخاذ القرارات في الحالات والمواقف التي تتميز بوجود صراع بين الوحدات المتنافسة بحيث يسعى كل طرف لتحقيق مصلحته على حساب الآخر وهنا لا يستطيع متخذ القرار أن يسيطر على العوامل المؤثرة عليه في ظل التغيرات الحاصلة وتهدف نظرية الألعاب إلى الوصول إلى استراتيجية معينة ترضي جميع الأطراف ويحاول كل طرف في القيام بأفضل أداء ممكن للحصول على أفضل العوائد وتكمن الصعوبة هنا في أن كلا المتنافسين يرغب بجعل عوائده أفضل ما يمكن مع مراعاة ردود فعل الأطراف المنافسة الأخرى وتعتبر هذه النظرية وسيلة للنظر في مسائل الصراع الأكثر إثارة في الحاضر والمستقبل إلا أنها لا تضمن تقديم الحلول لجميع مسائل الصراع لكنها تقدم الطرق والوسائل الأكثر فاعلية للتحليل.

ترجع البدايات الأولى لنظرية المباريات إلى بداية القرن العشرين ومع ذلك تعتبر إحدى الوسائل الحديثة التي تُستخدم لاتخاذ القرارات في الحالات والمواقف التي تتميز بوجود الصراع بين الوحدات المتنافسة المستقلة يعتبر العالم الفرنسي (Emil Borel) أول من طرح فكرة نظرية الألعاب سنة 1921م إلا أن الفضل الكبير لبرهنة النتائج الأساسية لهذه النظرية يرجع للعالمين (John Von Neumann) و (Oskar Morgenstern) بعد أن أثبتا القانون الأساسي في نظرية الأدنى الأعظم سنة 1928 وتعاونا في تقديم هذه النظرية كأداة لتحليل المواقف التنافسية المتعارضة في المجالات الاقتصادية.

2-أسس وفرضيات نظرية الألعاب:

لكي تقوم هذه النظرية لابد من توافر شروط معينة وهي: وجود لاعبين (طرفين) أو أكثر ولكل منهما أهدافه وإمكانياته وأيضًا امتلاك كل لاعب استراتيجية خاصة في مواجهة استراتيجية خصمه وهذا ضمن البيئة التي تتم فيها المباراة وعندما تتوفر هذه الشروط يصبح كل من الطرفان على جاهزية لبدء المباراة، وهناك فرضيات يجب تحقيقها لتشكل المنهج الذي يخطوه كل طرف وهي بمثابة أسس هذه النظرية وهي :

- **الخيارات**: تفترض هذه النظرية أن كل لاعب أو طرف لديه مجموعة من البدائل يختار أحدها بصفة عقلانية أي الخيار الذي يتوقع أن تكون نتائجه عالية الربح ومنخفضة الأضرار والتكاليف.
- **الأهداف**: هذه الأساس مرتبط بسابقه حيث أن اختيار البديل قائم على طبيعة الأهداف التي يحددها اللاعب مسبقًا ويعمل على الوصول إليها فالأهداف هي التي توجه اللاعب نحو خيار معي.
- **العقلانية**: على اعتبار أن كل لاعب يسلك الخيار الذي يمكنه من السيطرة أو البقاء على قيد الحياة فسلوك اللاعب ليس استجابة انفعالية بقدر ما هو تصرف قائم على حسب الخسائر والأرباح لكل البدائل المطروحة أمامه وترجيح كفة الخيار الذي علت كفة أرباحه على كفة أضراره.
- **المنفعة**: ترتبط عقلانية وأهداف اللاعب بما يحاول أن يجنيه من هذه العملية فتُعتبر المنفعة هي المنطلق وهي الغاية من هذا الصراع.

❖ **المعلومات**: إن المظهر الحاسم لخصوصية المباراة هو توفير المعلومات والتي تجعل اللاعبين يختارون استراتيجيتهم بدقة فبمجرد توفرها يستطيع اللاعب أن يحدد موقفه من خصمه ومن سير المباراة.

3-أنواع المباريات: تنقسم المباراة حسب النتيجة إلى:

- **مباراة الصفرية:** بالنّسبة لهذه الصّراعات فإنّ الربح الّتي يحققها أحدهما، يمثّل في الوقت نفسه خسارة للطّرف الآخر. ولو افترضنا أنّ طرفاً ما حقق انتصارا ثمّ مُنّي بهزيمة أو بخسارة، فإنّ الحصيلة النّهائية تكون صفرًا في مجموعها.
- **مباراة غير الصفرية:** في هذه الحالة مصالح أطرافها لا تكون متعارضة بالصّورة السّابقة نفسها، وإنّما تتداخل إلى حدّ يسمح بالمساومة وتقديم التّنازلات المتبادلة للوصول إلى نقطة اتفاق، مما يدفع أطراف تلك المواقف إلى تبنّي سياسة التّعاون بحيث تتوزّع نتائج المباراة بين الطّرفين.

أولا: مباراة الصفرية (المباراة ذات العائد الصفري).

هي مباراة بين لاعبين فقط والتي يكون فيها مجموع عوائد اللاعب ين في نهاية المباراة يساوي صفر. أي أن ما يربحه اللاعب الأول يخسره اللاعب الثاني .

ولغرض توضيح المباراة بين طرفين ذات المجموع الصفري نأخذ المثال الآتي:

مثال01: تقابل اللاعبان أحمد ومراد في مباراة معينة، اللاعب أحمد لديه ثلاث استراتيجيات هي A,B,C واللاعب مراد لديه استراتيجيتين وهي D,E وكان جدول العوائد كالآتي:

اللاعبان		أحمد		
	الاستراتيجيات	C	B	A
مراد	D	3	4	1
	E	2	-2	-3

تبين المصفوفة أعلاه ربح وخسارة كل من اللاعبين أحمد ومراد عند استخدامه لأية استراتيجية، حيث تمثل القيم الموجبة أرباح اللاعب مراد وخسائر اللاعب أحمد، والعكس بالنسبة للقيم السالبة فهي تعبر عن خسارة اللاعب مراد وربح اللاعب أحمد.

ولاستخراج نقطة الاستقرار هنالك طريقتين:

الطريقة 01: طريقة (MIN-max) و(MAX-min).

من أجل استخدام هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

الخطوة 01: نستخرج أقل قيمة في كل صف من صفوف المصفوفة وكالآتي:

1	3	4	1
3-	2	-2	-3

الخطوة 02: نستخرج أكبر قيمة في كل عمود من صفوف المصفوفة وكالآتي:

1	4	3	1
-3	-2	2	3-
1	4	3	

الخطوة 03: نحدد أكبر قيمة من القيم التي تم استخراجها في الخطوة 01، ثم نحدد أقل قيمة من القيم التي تم استخراجها في الخطوة 02 أعلاه.

1	4	3	1
-3	-2	2	3-
1	4	3	

إذا تساوت القيمتين المستخرجتين في الخطوة 03 فهذا يعني وجود نقطة استقرار تقطع هذين السهمين داخل المصفوفة، هذا يعني أن المباراة مستقرة وأن نقطة الاستقرار تقع في الصف (D) والعمود (A)، أي أن قيمة المباراة هي 1.

- ✓ الاستراتيجية المثلى لأحمد هي: A
- ✓ الاستراتيجية المثلى لمراد هي: B

ونتيجة المباراة هي فوز مراد لان النتيجة موجبة.

الطرقة 02: طريقة الاختزال.

في حالة المصفوفات للمباريات ذات الأبعاد الكبيرة وفي حالة كون المباريات تحتوي أو لا تحتوي على نقطة استقرار نستطيع تحت ظروف معينة نختصر حجم المصفوفة المعطاة إلى حجم أصغر بأسلوب الاختزال.

ويقصد بالاختزال هي هيمنت بعض الاستراتيجيات من حيث الأفضلية التي تتميز بها اللاعب (أحمد) أو اللاعب (مراد) على غيرها من الاستراتيجيات ولنفس اللاعب. أما الاستراتيجيات التي يتم الهيمنة عليها (المختزلة أو المحذوفة) فهي الاستراتيجيات التي لا يستخدمها اللاعب مهما كانت الاستراتيجية التي يلعبها خصمه.

تتمثل خطوات طريقة الاختزال فيما يلي:

- ➢ اختيار أحد الصفوف وليكن الصف الأول (D) ومقارنة كل قيمه مع قيم باقي الصفوف واحد تلو الآخر والتحقق من الشرط التالي:
- ❖ إذا كانت كل قيم الصف المختار (D) أكبر أو مساوية لكل قيم أحد الصفوف المقارنة، فنقول أن الصف المختار (D) هيمن على الصف المقارن وبذلك نقوم باختزال (حذف) الصف المقارن.
- ❖ وهكذا نقارن كل الصفوف مع بعضها إلى غاية انتهاء من كل الصفوف.

➢ بعد الانتهاء من الصفوف نقوم بمقارنة الأعمدة بطريقة عكسية، وذلك باختيار أحد الأعمدة وليكن الصف الأول (A) ومقارنة كل قيمه مع قيم باقي الأعمدة واحد تلو الأخر والتحقق من الشرط التالي:

❖ إذا كانت كل قيم العمود المختار (A) أقل أو مساوية لكل قيم أحد الصفوف المقارنة، فنقول أن العمود المختار (A) قد هيمن على العمود المقارن وبذلك نقوم باختزال (حذف) المقارن.

❖ وهكذا نقارن كل الصفوف مع معضها إلى غاية انتهاء من كل الأعمدة.

مثال02: نفس المثال السابق.

بالنسبة للصفوف:

الاستراتيجيات	C	B	A
D	3	4	1
E	2	-2	-3

اختيار الصف (D) ومقارنته مع باقي الصفوف (في المثال متبقي صف واحد فقط) نلاحظ كل قيم الصف (D) أكبر من قيم الصف (E)، لذا سنقوم بحذف الصف (E):

$$1 \geq -3$$
$$4 \geq -2$$
$$3 \geq 2$$

الاستراتيجيات	C	B	A
D	3	4	1
E	2	-2	-3

يحذف

بالنسبة للأعمدة:

اختيار العمود (D) ومقارنته مع باقي الأعمدة، وليكن في البداية (B) نلاحظ كل قيم الصف (A) أقل من قيم الصف (B)، لذا سنقوم بحذف العمود (B). ونكمل المقارنة باقي الأعمدة.

$$1 \leq 4$$

الاستراتيجيات	C	B	A
D	3	4	1

نكمل مع العمود (D) ومقارنته مع باقي الأعمدة، (متبقي العمود C) نلاحظ كل قيم الصف (A) أقل من قيم الصف (C)، لذا سنقوم بحذف العمود (C).

$$1 \leq 3$$

الاستراتيجيات	C	A
D	3	1

نلاحظ انه بقيت قيمة واحدة فقط، ومنه يمكن القول أن المباراة مستقرة وأن نقطة الاستقرار تقع في الصف (D) والعمود (A)، أي أن قيمة المباراة هي 1.

- ✓ الاستراتيجية المثلى لأحمد هي: A
- ✓ الاستراتيجية المثلى لمراد هي: B

ونتيجة المباراة هي فوز مراد لان النتيجة موجبة، (نفس نتيجة طريقة (MIN-max) و(MAX-min)).

الاستراتيجيات	A
D	1

ثانيا: المباراة غير الصفرية (حالة عدم وجود نقطة استقرار).

المباراة لا يمكن أن تكو ن في جميع الحالات مستقرة، أي احتوائها على نقطة الاستقرار والذي يعني أن الاستراتيجيات المستخدمة من قبل كلا اللاعبين هي استراتيجيات صافية. فإذا كانت المباراة لا تحتوي على نقطة استقرار أي أن أعلى قيمة من القيم الصغرى للصفوف لا تساوي أصغر قيمة من القيم الكبرى للأعمدة في حالة استعمال طريقة (MIN-max) و(MAX-min)، أو عدم الوصول إلى قيمة واحدة فقط في حالة استخدام طريقة الاختزال، تكون استراتيجيات اللاعبين استراتيجيات مختلطة، وإن كل لاعب سيوزع اهتمامه بين ما هو متاح له من استراتيجيات ولن يركز على استراتيجية واحدة فقط وإنما سيخصص جزء من وقت المباراة للعب الاستراتيجية الأولى وجزء آخر من وقت المباراة للعب الاستراتيجية الثانية وهكذا...

❖ **حل المباراة في حالة الاستر اتيجيات المختلطة.**

من الممكن حل المباراة في حالة الاستراتيجيات المختلطة باستخدام إحدى الطرقتين:

الطريقة الجبرية في حالة المصفوفة زوجية بحجم (2x2).

البرمجة الخطية في حالة المصفوفة غير الزوجية بحجم (NxM).

✓ **الطريقة الجبرية**

تستخدم هذه الطريقة عندما تكون المباراة بين لاعبين فقط وكل لاعب له استراتيجيتين فقط ويكون ذلك عندما تكون المصفوفة الأصلية بحجم (2x2) أو في حالة اختزال مصفوفة كبيرة إلى غاية الوصول إلى مصفوفة بحجم (2x2).

ولغرض توضيح هذه الطريقة نأخذ المثال التالي:

مثال04: لتكن مصفوفة العائد هي:

الاستراتيجيات	D	C	
A	4	1	1
B	-2	3	2-
	4	3	

نلاحظ أن هذه المصفوفة لا يمكن اختزالها أكثر مما هي عليه، وكذلك لا تحتوي على نقطة استقرار.

تقوم هذه الطريقة على الاحتمالات حيث أن احتمال اختيار اللاعب الأول الاستراتيجية (A) هو P_1، واحتمال اختيار نفس اللاعب الاستراتيجية (B) هو P_2 حيث:

$$P_1 + P_2 = 1 \Leftrightarrow P_2 = 1 - P_1$$

ونفس الشيء بالنسبة للاعب الثاني حيث أن احتمال اختيار هدا اللاعب الاستراتيجية (C) هو Q_1، واحتمال اختيار نفس اللاعب الاستراتيجية (D) هو Q_2 حيث:

$$Q_1 + Q_2 = 1 \Leftrightarrow Q_2 = 1 - Q_1$$

C (Q)	D (1-Q)	الاستراتيجيات
1	4	(P) A
3	-2	(1-P) B

يتم إيجاد استراتيجية اللاعب الأول من خلال الصيغ الرياضية التالية:

$$(4)(P_1) + (-2)(1 - P_1) = 6P_1 - 2 \dots\dots\dots (1)$$
$$(1)(P_1) + (3)(1 - P_1) = -2P_1 + 3 \dots\dots\dots (2)$$

نقوم بمساواة (1) مع (2) فنجد:

$$6P_1 - 2 = -2P_1 + 3 \Leftrightarrow P_1 = {}^{5}/_{8} \Rightarrow P_2 = {}^{3}/_{8}$$

أي أن اللاعب الأول سيلعب الاستراتيجية (A) بـ (8/5) من الوقت المخص للمباراة وبالاستراتيجية (B) بـ (8/3).

وبنفس الطريقة يتم إيجاد استراتيجية اللاعب الثاني من خلال الصيغ الرياضية التالية:

C (Q)	D (1-Q)	الاستراتيجيات
1	4	(P) A
3	-2	(1-P) B

$$(1)(Q_1) + (4)(1 - Q_1) = -3Q_1 + 4 \dots\dots\dots (3)$$
$$(3)(Q_1) + (-2)(1 - Q_1) = 5Q_1 - 2 \dots\dots\dots (4)$$

نقوم بمساواة (3) مع (4) فنجد:

$$-3Q_1 + 4 = 5Q_1 - 2 \Leftrightarrow Q_1 = {}^{6}/_{8} \Rightarrow Q_2 = {}^{2}/_{8}$$

أي أن اللاعب الثاني سيلعب الاستراتيجية (C) بـ $(\frac{6}{8})$ من الوقت المخص للمباراة وبالاستراتيجية (D) بـ $(\frac{2}{8})$.

أما قيمة المباراة (V) فيتم حسابها بتعويض قيم (P1) أو (Q1) في إحدى المعادلات (1،2 أو 3،4):

$$(1)\ \dots\dots\dots 6P_1 - 2 = (6)\left(\frac{5}{8}\right) - 2 = \frac{7}{4}$$
$$(2)\ \dots\dots\dots -2P_1 + 3 = (-2)\left(\frac{5}{8}\right) + 3 = \frac{7}{4}$$
$$(3)\ \dots\dots\dots -3Q_1 + 4 = (-3)\left(\frac{6}{8}\right) + 4 = \frac{7}{4}$$
$$(4)\ \dots\dots\dots 5Q_1 - 2 = (5)\left(\frac{6}{8}\right) - 2 = \frac{7}{4}$$

النتيجة ربح للاعب الأول لان الإشارة موجبة بـ $(\frac{7}{4})$.

- ✓ **البرمجة الخطية**

تستخدم هذه الطريقة في جميع المباريات ذات المجموع الصفري أو غير الصفري بين لاعبين وخاصة تلك التي تكون بحجم (NxM)، حيث (M وN أكبر من 2)، حيث أنه في حالة عدم وجود نقطة استقرار وعدم إمكانية تقليـ إلى الدرجة الأدنى($2x2$) حتى نتمكن من حلها بالطرق السابقة، تقدم البرمجة الخطية أفضل حل لمثل هذه المشاكل.

تتكون هذه الطريقة من خطوتين أساسيتين:

الخطوة 01: تحويل المباراة إلى صيغة برمجة خطية وتمثل كل استراتيجية باحتمال معين.

الخطوة 02: حل البرنامج الخطي لإيجاد الحل.

والمثال الآتي يوضح هذه الطريقة:

المثال04:

اللاعبان		Y		
	الاستراتيجيات	F	E	D
X	A	4	-6	2
	B	1	4	-5
	C	-2	2	3

نلاحظ أن المصفوفة أعلاه غير مستقرة ولا يمكن اختزالها أكثر مما هي عليه.

الخطوة 01: تحويل المباراة إلى صيغة برمجة خطية.

بالنسبة للاعب (x):

نفرض أن احتمال اختيار اللاعب (X) الاستراتيجية (A) هو(X_1)، واحتمال اختيار نفس اللاعب الاستراتيجية (B) هو(X_2)، واحتمال اختيار نفس اللاعب الاستراتيجية (C) هو(X_3)، وهكذا ...

- ❖ نفرض أن قيمة المباراة هي (x_{n+1}) حيث أن (n) هو عدد الاستراتيجيات اللاعب في المثال ($n = 3$)،

إذا قيمة المباراة هي (x_{3+1}) وتساوي (x_4).

- ❖ دالة الهدف بالنسبة للاعب (x) هي تعظيم الأرباح إذا ستكون من النوع (Max).
- ❖ تكوين القيود سيكون على النحو التالي:

$$4X_1 + 1X_2 - 2X_3 - X_4 \geq 0$$
$$-6X_1 + 4X_2 + 2X_3 - X_4 \geq 0$$

$$2X_1 - 5X_2 + 3X_3 - X_4 \geq 0$$
$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0 \quad \text{قيد عدم السالبية}$$

اللاعبان		Y		
	الاستراتيجيات	F	E	D
X	(X_1) A	4	-6	2
	(X_2) B	1	4	-5
	(X_3) C	-2	2	3

يصبح البرنامج الخطي كله كمايلي:

$$\mathrm{Max}(Z) = X_4$$
$$4X_1 + 1X_2 - 2X_3 - X_4 \geq 0$$
$$-6X_1 + 4X_2 + 2X_3 - X_4 \geq 0$$
$$2X_1 - 5X_2 + 3X_3 - X_4 \geq 0$$
$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0 \quad \text{قيد عدم السالبية}$$

الخطوة 02: حل البرنامج الخطي لإيجاد الحل.

للتعرف على طريقة حل كل أنواع البرامج الخطية (الطريقة البيانية وطريقة السمبلكس) يمكن الرجوع إلى مقياس رياضيات المؤسسة سنة ثانية كل الشعب.

بالنسبة للاعب (y):

نفرض أن احتمال اختيار اللاعب (y) الاستراتيجية (D) هو(Y_1)، واحتمال اختيار نفس اللاعب الاستراتيجية (E) هو (Y_2)، واحتمال اختيار نفس اللاعب الاستراتيجية (F) هو (Y_3)، وهكذا ...

- ❖ نفرض أن قيمة المباراة هي (y_{n+1}) حيث أن (n) هو عدد الاستراتيجيات اللاعب في المثال ($n = 3$)، إذا قيمة المباراة هي (y_{3+1}) وتساوي (y_4).
- ❖ دالة الهدف بالنسبة للاعب (y) هي تدنية الخسائر إذا ستكون من النوع (Min).
- ❖ تكوين القيود سيكون على النحو التالي:

$$2Y_1 - 6Y_2 + 4Y_3 - Y_4 \leq 0$$
$$-5Y_1 + 4Y_2 + 1Y_3 - Y_4 \leq 0$$
$$3Y_1 + 2Y_2 - 2Y_3 - Y_4 \leq 0$$
$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$
$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0 \quad \text{قيد عدم السالبية}$$

اللاعبان		Y		
	الاستراتيجيات	F (Y_3)	E (Y_2)	D (Y_1)
X	A	4	-6	2
	B	1	4	-5

	C	-2	2	3

يصبح البرنامج الخطي كله كمايلي:

$$\mathrm{Min}(Z) = Y_4$$
$$2Y_1 - 6Y_2 + 4Y_3 - Y_4 \leq 0$$
$$-5Y_1 + 4Y_2 + 1Y_3 - Y_4 \leq 0$$
$$3Y_1 + 2Y_2 - 2Y_3 - Y_4 \leq 0$$
$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$
$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$ قيد عدم السالبية

الخطوة 02: حل البرنامج الخطي لإيجاد الحل.

للتعرف على طريقة حل كل أنواع البرامج الخطية يمكن الرجوع إلى مقياس رياضيات المؤسسة سنة ثانية كل الشعب.