مشكلة التخصيص (التعيين).

تعتبر مشكلة التخصيص من إحدى النماذج التي تخص مسألة النقل التي هي إحدى تطبيقات نماذج البرمجة الخطية والتي على أساسها نفترض أن لدينا عددا من المصادر يتطلب تخصيصها إلى نفس العدد من مراكز التوزيع، حيث أن المصادر قد تكون أفراد أو وظائف أو أماكن يتطلب **تخصيص** مراكز توزيعها والتي قد تكون مهمات أو آلات أو مخازن بما يهدف إلى تقليل الوقت أو التكلفة أو تعظيم الإرباح.

يهتم نموذج التخصيص مثلا بحالة أن عدد العمال (n) يمكن تعيينهم (تخصيصهم) على عدد من الآلات (m)، والتي تحتاج إلى تكلفة (C_{ij}) حيث: ($i = 1 \dots n$) و($j = 1 \dots m$).

ويظل الهدف لتخصيص وظائف العمال على الآلات لتحقيق أقل تكلفة إجمالية ممكنة أو تحقيق اكبر ربح ممكن.

أولا: حل مسالة التخصيص في حالة تدنية دالة الهدف.

يرجع حل هذه المسالة إلى حالة خاصة لمشكلة النقل، حيث العمال يعبرون عن العرض والآلات المستقبلة تعبر الطلب، وأن عرض العمال على أي آلة يساوى (1)، هذا يعني أن ($b_i=1$) (العامل لا يقبل العمل إلا في آلة واحدة)، وبالمثل فإن طلب الآلات لكل عامل يساوي (1)، هذا يعني أن ($a_i=1$) (الآلة لا تستقبل إلا عامل واحد فقط)، وبهذا يصبح جدول التكاليف الحادية في مشكلة التخصيص على النحو التالي:

جدول التكاليف الأحادية

العمال / الآلات	1	2	…	n	b_j
1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1n}	1
2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2n}	1
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
m	C_{m1}	C_{m2}	…	C_{mn}	1
a_i	1	1	…	1	$m(\leq,=,\geq)n$

وعليه يمكن صياغة نموذج التخصيص بصفة عامة رياضية على النحو التالي:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{اذا كان العامل } i \text{ لم يخصص الى الالة } j \\ 1 & \text{اذا كان العامل } i \text{ خصص الى الالة } j \end{cases}$$

وقبل البدء بحل مسألة التخصيص يجب أن نشير إلى أنه توجد ثلاث حالات لمسائل التخصيص كما يوضحه الجدول أعلاه (حالة (n = m) ، حالة (n > m) ، حالة (n < m))، لذا سنحاول حل بعض الأمثلة حسب كل حالة:

مثال (1) حالة (n = m): شركة لنقل البضائع تملك 5 شاحنات متواجدة في أماكن مختلفة يمكنها نقل البضائع إلى 5 مدن مختلفة، الجدول التالي يبين تكاليف نقل كل شاحنة متوفرة على كل مدينة من المدن الخمسة المخصصة لاستقبال البضائع:

5	4	3	2	1	رقم المدينة / رقم الشاحنة
40	13	33	27	53	0001
20	28	34	20	35	0002
36	47	44	17	32	0003
30	23	24	26	20	0004
135	113	125	100	120	0005

المطلوب: إيجاد التخصيص الأمثل للشاحنات على المدن بأقل تكلفة.

- لحل مشاكل التخصيص سنعتمد على طريقة تسمى "**الطريقة الهنغارية**"، وتمر هذه الطريقة بعدة مراحل تتكون من عدة خطوات كما هو موضح في الشرح التالي:

المرحلة الأولى:

❖ تحديد أصغر قيمة في كل صف من صفوف جدول معطيات التخصيص وطرحها من نفسها ومن كل قيم ذلك الصف.

27	0	20	14	40
0	8	14	0	15
19	30	27	0	15
10	3	4	6	0
35	13	25	0	20

❖ تحديد أصغر قيمة في كل عمود من أعمدة جدول التخصيص المحصل عليه من الخطوة الأولى وطرحها من نفسها ومن كل قيم ذلك العمود.

ملاحظة (1): العمود أو الصف الذي يوجد فيه (**صفر**) أو أكثر نبقي على قيمه كما هو.

27	0	16	14	40
0	8	10	0	15
19	30	23	0	15
10	3	0	6	0
35	13	21	0	20

المرحلة الثانية:

❖ نفحص كل صف (يمكن أن نبدأ بتفحص الأعمدة) من الأعلى إلى الأسفل (يمكن أن تكون العملية من الأسفل إلى الأعلى)، إذا وجد فيه (0) واحد فقط وغير مخصص وغير مشطوب، فنقوم بوضعه داخل مربع (تخصيصه)، ثم نقوم بشطب كل الاصفار الموجودة في العمود الذي ينتمي إليه الصفر الموضوع داخل المربع.

ملاحظة (2): الصف الذي فيه أكثر من صفر واحد غير مخصص وغير مشطوب لا تخصص أصفاره في المرحلة الأولى، ونتركهم للمرحلة الموالية.

27	$\boxed{0}$	16	14	40
0	8	10	$\cancel{0}$	15
19	30	23	$\boxed{0}$	15
10	3	0	6	0
35	13	21	$\cancel{0}$	20

- ❖ نفحص كل عمود من الجدول المحصل عليه من الخطوة السابقة من اليمين إلى اليسار (يمكن أن تكون العملية من اليسار إلى اليمين)، إذا وجد فيه (0) واحد فقط وغير مخصص وغير مشطوب، فنقوم بوضعه داخل مربع (تخصيصه)، ثم نقوم بشطب كل الاصفار الموجودة في الصف الذي ينتمي إليه الصفر الموضوع داخل المربع.
- ❖

27	$\boxed{0}$	16	14	40
$\boxed{0}$	8	10	$\cancel{0}$	15
19	30	23	$\boxed{0}$	15
10	3	$\cancel{0}$	6	$\boxed{0}$
35	13	21	$\cancel{0}$	20

- ❖ نعيد الخطوتين السابقتين من المرحلة الثانية عدة مرات حتى تكون كل الاصفار في الجدول إما مخصصة أو مشطوبة

ملاحظة (3): قبل المرور إلى المرحلة الثالثة من الحل يجب أن تكون كل الاصفار في الجدول إما مخصصة أو مشطوبة.

ملاحظة (4): عندما ننطلق في عملية التخصيص من الصفوف والأعمدة التي تحتوي على صفر واحد فقط، وننتهي من هذه العملية، ثم نلاحظ انه مازالت بعض الصفوف أو الأعمدة تحتوي على أكثر من صفر واحد غير مخصصة وغير مشطوبة ننطلق في عملية التخصيص من الصفوف والأعمدة ذات الصفرين، فنخصص الصفر الأول ونترك الصفر الأخر كما هو ونشطب كل الاصفار في العمود أو الصف الذي ينتمي إليه الصفر المشطوب، فإذا ما انتهت هذه المرحلة الأخيرة ننتقل إلى تلك التي تحتوي على ثلاثة أصفار وهكذا حتى تنتهي عملية التخصيص.

الملاحظة (5): تتطلب عملية التخصيص احترام إجراءات تسلسل عملية التخصيص، هذا يعني إما إجراء كل مراحل عملية التخصيص انطلاقا من الصفوف ثم الأعمدة أو العكس، ومن يمين الجدول إلى يساره أو العكس، وإما كلها من أعلى إلى أسفل الجدول أو العكس.

المرحلة الثالثة:

نفحص الجدول المحصل عليه من المرحلة الثانية:

جدول محاولة التخصيص الأولى

27	$\boxed{0}$	16	14	40
$\boxed{0}$	8	10	$\cancel{0}$	15
19	30	23	$\boxed{0}$	15
10	3	$\cancel{0}$	6	$\boxed{0}$
35	13	21	$\cancel{0}$	20

❖ إذا كان الجدول المحصل عليه يحتوي على عدد من الخانات المخصصة (الخانات الصفرية التي هي بداخل المربعات) يساوي عدد الصفوف أو الأعمدة، وإذا كان كل عمود وكل صف لا يحتوي إلا على خانة مخصصة واحدة، فيمكن القول أنه قد تم تحقق شرط الأمثلية، وأن الجدول المحصل عليه هو جدول الحل الأمثل، وللحصول على التكلفة الإجمالية نقوم بجمع القيم في الجدول الأول (جدول التكلفة الأحادية) والمقابلة للأصفار المخصصة في جدول الحل الأمثل.

❖ إذا كان أي عمود أو(و) صف أو أكثر يحتوي على أكثر من خانة مخصصة فإن هذا الحل يعتبر غير صحيح (خاطئ) ويجب إعادة مراجعته لأنه لا يحقق الشرط الأساسي لمنهج الطريقة الهنغارية في حل مسائل التخصيص وهو ضرورة تساوي عدد المهام المراد تخصيصها مع عدد المنفذين لهذه المهام.

❖ في حالة ما إذا كان عدد الخانات المخصصة أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة (حالة مثالنا السابق) نستمر في البحث عن الحل الأمثل وذلك بالانتقال إلى المرحلة الرابعة والخامسة.

المرحلة الرابعة:

❖ نحدد أي صف لا يحتوي على صفر مخصص بوضع علامة (x) على يمينه.

27	$\boxed{0}$	16	14	40	
$\boxed{0}$	8	10	$\cancel{0}$	15	
19	30	23	$\boxed{0}$	15	
10	3	$\cancel{0}$	6	$\boxed{0}$	
35	13	21	$\cancel{0}$	20	x

❖ نحدد أي عمود يحتوي على صفر مشطوب من الصفوف المحدد في الخطوة السابقة بوضع علامة (x) فوقه.

			x		
27	$\boxed{0}$	16	14	40	
$\boxed{0}$	8	10	$\cancel{0}$	15	
19	30	23	$\boxed{0}$	15	
10	3	$\cancel{0}$	6	$\boxed{0}$	
35	13	21	$\cancel{0}$	20	x

❖ نحدد أي صف يحتوي على صفر مخصص من الأعمدة المحدد في الخطوة السابقة بوضع علامة (x) على يمينهم.

			x		
27	$\boxed{0}$	16	14	40	
$\boxed{0}$	8	10	$\cancel{0}$	15	
19	30	23	$\boxed{0}$	15	x
10	3	$\cancel{0}$	6	$\boxed{0}$	
35	13	21	$\cancel{0}$	20	x

- نحدد أي عمود **إن وجد** يحتوي على صفر مشطوب من الصفوف المحدد في الخطوة السابقة بوضع علامة (x) فوقه.
- نحدد أي صف يحتوي على صفر مخصص من الأعمدة المحدد في الخطوة السابقة **إن وجد** بوضع علامة (x) على يمينهم.
- وهكذا نستمر في عملية التحديد حتى يصبح آخر صف تم تحديده لا يحتوي على صفر مشطوب (الجدول الأخير من مثالنا).
- نشطب كل صف غير محدد وبالعكس نشطب كل عمود محدد.

			x		
27	$\boxed{0}$	16	14	40	
$\boxed{0}$	8	10	0	15	
19	30	23	$\boxed{0}$	15	x
10	3	0	6	$\boxed{0}$	
35	13	21	0	20	x

المرحلة الخامسة:

- نحدد أقل قيمة من بين القيم المتبقية في الجدول (القيم الموجودة في الصفوف والأعمدة غير المشطوبة).

			x		
27	$\boxed{0}$	16	14	40	
$\boxed{0}$	8	10	0	15	
19	30	23	$\boxed{0}$	15	x
10	3	0	6	$\boxed{0}$	
35	13	21	0	20	x

- نطرح هذه القيمة من نفسها ومن القيم الأخرى غير المشطوبة.
- نضيف هذه القيمة إلى القيم التي تقع عند نقاط تقاطع أي خط من خطوط الشطب (مشطوبة مرتين) المشار إليها أعلاه.
- نبقي القيم المشطوبة مرة واحدة كما هي ونعيد كتابة كل القيم في جدول جديد .

27	0	16	27	40
0	8	10	13	15
6	17	10	0	2
10	3	0	19	0
22	0	8	0	7

- بعد ذلك نعيد تطبيق خطوات المرحلة الثانية والثالثة (نجري المحاولة ثانية للتخصيص)، فإذا لم نصل إلى الحل الأمثل نعيد تطبيق خطوات المرحلة الرابعة والخامسة وهكذا حتى نصل إلى الحل الأمثل.

- **تخصيص جدول المحاولة الثانية:**

جدول محاولة التخصيص الثانية

27	$\boxed{0}$	16	27	40
$\boxed{0}$	8	10	13	15
6	17	10	$\boxed{0}$	2
10	3	~~0~~	19	$\boxed{0}$
22	~~0~~	8	~~0~~	7

- **عدم تحقق شرط الامثلية (نواصل المرحلة الرابعة والخامسة).**

	x		x		
27	$\boxed{0}$	16	27	40	x
$\boxed{0}$	8	10	13	15	
6	17	10	$\boxed{0}$	2	x
10	3	~~0~~	19	$\boxed{0}$	
22	~~0~~	8	~~0~~	7	x

25	0	14	27	38
0	10	10	15	15
4	17	8	0	0
10	5	0	21	0
20	0	6	0	5

- **تخصيص جدول المحاولة الثالثة.**

جدول محاولة التخصيص الثالثة

25	$\boxed{0}$	14	27	38
$\boxed{0}$	10	10	15	15
4	17	8	~~0~~	$\boxed{0}$
10	5	$\boxed{0}$	21	~~0~~
20	~~0~~	6	$\boxed{0}$	5

- نلاحظ أن الجدول المحصل عليه يحتوي على عدد من الخانات المخصصة يساوي عدد الصفوف أو الأعمدة، (5=5)، وأن كل عمود وكل صف لا يحتوي إلا على خانة مخصصة واحدة، يمكن القول انه قد تم تحقق شرط الأمثلية، وان الجدول المحصل عليه هو جدول الحل الأمثل.

التخصيص:

5	4	3	2	1	رقم المدينة / رقم الشاحنة
50	**13**	33	27	53	0001
20	28	34	20	35	0002
36	47	44	17	**32**	0003
30	23	**24**	26	20	0004
135	113	125	**100**	120	0005

(الشاحنة 0001 مخصص للمدينة 4)(الشاحنة 0002 مخصص للمدينة 5)(الشاحنة 0003 مخصص للمدينة 1)
(الشاحنة 0004 مخصص للمدينة 3)(الشاحنة 0005 مخصص للمدينة 2).

اقل تكلفة ممكنة:

$$\mathbf{13 + 20 + 32 + 24 + 100 = 189.}$$

مثال (2) حالة ($m < n$): أحدى الشركات لديها أربع مناطق بيعيه مختلفة وتمتلك هذه الشركة خمسة رجال بيع، وتريد الشركة تعيين رجال البيع على مناطق الأربعة بطريقة مثلى، وبما أن رجال البيع ليس كلهم بنفس الخبرة ولا نفس المهارة ولا نفس اللغة مناطق البيع ومتطلباتها مختلفة تكلفة، قامت الشركة بتقدير التكاليف المصاحبة لتعيين كل رجل من رجال البيع على كل منطقة بيعيه كما في الجدول:

E	D	C	B	A	رجال البيع / المناطق
12	11	21	10	24	1
9	8	10	12	14	2
14	19	10	14	17	3
12	13	14	19	11	4

المطلوب: إيجاد التخصيص الأمثل لرجال البيع على مناطق البيع بأقل تكلفة.

من ضمن شروط استعمال الطريقة الهنغارية في حل مسائل التخصيص هو ضرورة تساوي الصفوف والأعمدة في جدول المعطيات وذلك لضرورة تساوي عدد المهام المطلوب تنفيذها مع عدد المنفذين، وفي مثالنا يوجد عدد المنفذين (n) اكبر من عدد المهام المطلوب بتنفيذها (m)، ولمعالجة هذا المشكل وكما رأينا سابقا في مسالة النقل، نضيف عمود وهمي بقيم تخصيص تساوي (0)، ثم مواصلة الحل حسب المراحل والخطوات المشار إليها سابقا.

12	11	21	10	24
9	8	10	12	14
14	19	10	14	17
12	13	14	19	11
0	0	0	0	0

- تحديد أصغر قيمة في كل صف من صفوف جدول معطيات التخصيص وطرحها من نفسها ومن كل قيم ذلك الصف.

2	1	11	0	14
1	0	2	4	6
4	9	0	7	5
1	2	3	8	0
0	0	0	0	0

- تحديد أصغر قيمة في كل عمود من أعمدة جدول التخصيص المحصل عليه من الخطوة الأولى وطرحها من نفسها ومن كل قيم ذلك العمود.

2	1	11	0	14
1	0	2	4	6
4	9	0	7	5
1	2	3	8	0
0	0	0	0	0

- **تخصيص جدول الأول:**

جدول محاولة التخصيص الاولى

2	1	11	$\boxed{0}$	14
1	$\boxed{0}$	2	4	6
4	9	$\boxed{0}$	7	5
1	2	3	8	$\boxed{0}$
$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$

نلاحظ تحقق شرط الأمثلية دون المرور بالمراحل الباقية (الرابعة والخامسة)، وان الجدول المحصل عليه هو جدول الحل الأمثل.

رجل البيع / المناطق	A	B	C	D	E
1	24	10	21	11	12
2	14	12	10	8	9
3	17	14	10	19	14
4	11	19	14	13	12
5	0	0	0	0	0

(البائع A يخصص للمنطقة 4) (البائع B يخصص للمنطقة 1) (البائع C يخصص للمنطقة 3)

(البائع D يخصص للمنطقة 2) (البائع E لاتخصص له منطقة لأنه موجود في الصف الوهمي).

اقل تكلفة ممكنة: $\mathbf{10 + 8 + 10 + 11 = 39}$

مثال (3) حالة $(n < m)$: تملك شركة للبناء والأشغال العمومية ثلاث آلات مختلفة للحفر وتسوية الأراضي، تبين لهذه الشركة أربعة مشاريع لبناء السكنات، حيث كلفت هذه الشركة مكتب للدراسات بتقييم تكاليف حفر وتسوية أراضي هذه المشاريع حسب كل آلة تملكها، فجاءت نتائج المكتب في الجدول التالي:

الآلات / المشاريع	001	002	003
1	9	16	7
2	12	5	4
3	8	18	9
4	11	9	20

المطلوب: إيجاد التخصيص الأمثل لرجال البيع على مناطق البيع بأقل تكلفة.

بنفس مبدأ حل الحالة السابقة يمكن حل حالة $(n < m)$، حيث من أجل تساوي عدد الصفوف مع عدد الأعمدة، والذي يمثل شرط استخدام الطريقة الهنغارية، نضيف عمود وهمي بقيم تخصيص تساوي (0)، ثم مواصلة الحل حسب المراحل والخطوات المشار إليها سابقا.

0	7	16	9
0	4	5	12
0	9	18	8
0	20	9	11

0	7	16	9
0	4	5	12
0	9	18	8
0	20	9	11

⇐

0	3	11	1
0	0	0	4
0	5	13	0
0	16	4	3

جدول محاولة التخصيص الاولى

x				
$\boxed{0}$	3	11	1	x
~~0~~	~~0~~	$\boxed{0}$	4	
~~0~~	5	13	$\boxed{0}$	
~~0~~	16	4	3	x

⇐

جدول محاولة التخصيص الثانية

x			x	
~~0~~	2	10	~~0~~	x
1	~~0~~	$\boxed{0}$	4	
1	5	13	$\boxed{0}$	x
$\boxed{0}$	15	3	2	x

جدول محاولة التخصيص الثالثة

~~0~~	0	8	~~0~~
3	~~0~~	$\boxed{0}$	6
1	3	11	$\boxed{0}$
$\boxed{0}$	13	1	2

بعد محاولة التخصيص الثالثة نلاحظ تحقق شرط الامثلية.

004	003	002	001	الآلات / المشاريع
0	**7**	16	9	1
0	4	**5**	12	2
0	9	18	**8**	3
0	20	9	11	4

(الآلة 001 يخصص للمشروع 3) (الآلة 002 يخصص للمشروع 2) (الآلة 003 يخصص للمشروع 1)

(المشروع 4 لا تأخذه المؤسسة بعين الاعتبار لأنه موجود في العمود الوهمي (مكلف جدا))

اقل تكلفة ممكنة: $\mathbf{7 + 5 + 8 = 20}$

د. حايد مروان

ثانيا: **حل مسالة التخصيص في حالة تعظيم دالة الهدف.**

لا تختلف خطوات الحل عندما يكون الهدف تحقيق أقصى عائد عن خطوات الحل حينما يكون الهدف تدنيت التكاليف، **إلا** في بداية الحل، حيث يتم بموجب هذا الهدف تحديد اكبر قيمة في الجدول ثم طرحها من نفسها وطرح باقي القيم منها، فنحصل على جدول جديد، ومن ثم يتم إتباع نفس الخطوات السابقة التي تم تطبيقها في حالة التكاليف وصولاً إلى الحل الأمثل.

ملاحظة: في حالة عدم تساوي الصفوف والأعمدة (($m > n$) أو ($m < n$)) نقوم كمرحلة أولى بالبحث عن اكبر قيمة في الجدول ثم طرحها من نفسها ونطرح باقي القيم منها، ومن الجدول الجديد المتحصل عليه نقوم بإضافة الصف أو العمود الوهمي حسب الحالة بقيم تخصيص صفرية.

مثال (1) حالة ($n = m$): تريد شركة توظيف أربعة مهندسين على أربعة وظائف مختلفة، فتقدم وبعد تجريبهم على الوظائف الأربعة لمدة معينة، سجل رئيس مصلحة المستخدمين الأرباح المحقق لكل مهندس على كل وظيفة في الجدول التالي:

المهندسين / الوظائف	احمد	محمد	وليد	منير
1	35	37	22	42
2	20	14	17	15
3	15	11	20	10
4	40	30	25	35

المطلوب: تخصيص الأمثل للمهندسين على الوظائف، ليعود على الشركة بأكبر ربح ممكن.

❖ تحديد اكبر قيمة في الجدول ثم طرحها من نفسها وطرح باقي القيم منها.

35	37	22	42
20	14	17	15
15	11	20	10
40	30	25	35

7	5	20	0
22	28	25	27
27	31	22	32
2	12	17	7

❖ نتبع نفس الخطوات السابقة التي تم تطبيقها في حالة التكاليف وصولاً إلى الحل الأمثل.

0	20	5	7
5	3	6	0
10	0	9	5
5	15	10	0

$\Leftarrow$

0	20	0	7
5	3	1	0
10	0	4	5
5	15	5	0

جدول محاولة التخصيص الاولى

			x	
~~0~~	20	$\boxed{0}$	7	
5	3	1	$\boxed{0}$	x
10	$\boxed{0}$	4	5	
5	15	5	~~0~~	x

جدول محاولة التخصيص الثانية

$\boxed{0}$	20	~~0~~	8
4	2	$\boxed{0}$	~~0~~
10	$\boxed{0}$	4	6
4	14	4	$\boxed{0}$

➢ تحقق شرط الامثلية.

التخصيص

المهندسين / الوظائف	احمد	محمد	وليد	منير
1	35	37	22	42
2	20	14	17	15
3	15	11	20	10
4	40	30	25	35

➢ اكبر ربح إجمالي ممكن: $40 + 14 + 20 + 40 = 116$

مثال (2) حالة $(n \neq m)$: نشرت شركة إعلان توظيف في أربعة مناصب مختلفة، فتقدم 6 أشخاص لشركة، وبعد تجريبهم على الوظائف الأربعة لمدة معينة، سجل رئيس مصلحة المستخدمين الأرباح المحقق لكل مترشح على كل وظيفة في الجدول التالي:

حاتم	عادل	منير	وليد	محمد	احمد	المهندسين / الوظائف
42	45	40	22	37	35	1
30	26	15	17	14	20	2
8	18	10	20	11	15	3
48	42	35	25	30	40	4

المطلوب: اختيار وتخصيص الأمثل للمترشحين على الوظائف الأربعة والذي يعود على الشركة بأكبر ربح ممكن.

- ❖ تحديد اكبر قيمة في الجدول ثم طرحها من نفسها وطرح باقي القيم منها.

42	45	40	22	37	35
30	26	15	17	14	20
8	18	10	20	11	15
48	42	35	25	30	40

6	3	8	26	11	13
18	22	33	31	34	28
40	30	38	28	37	33
0	6	13	23	18	8

- ❖ من اجل مساواة عدد الصفوف مع عدد الأعمدة في الجدول، نضيف صفين وهميين بأرباح صفرية.

6	3	8	26	11	13
18	22	33	31	34	28
40	30	38	28	37	33
0	6	13	23	18	8
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

- ❖ نتبع نفس الخطوات المشار إليها سابقا وصولاً إلى الحل الأمثل.

3	0	5	23	8	10
0	4	15	13	16	10
12	2	10	0	9	5
0	6	13	23	18	8
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

⇐

3	0	5	23	8	10
0	4	15	13	16	10
12	2	10	0	9	5
0	6	13	23	18	8
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

x						
3	$\boxed{0}$	5	23	8	10	
$\boxed{0}$	4	15	13	16	10	x
12	2	10	$\boxed{0}$	9	5	
~~0~~	6	13	23	18	8	x
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	$\boxed{0}$	
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	$\boxed{0}$	~~0~~	

x	x					
7	$\boxed{0}$	5	23	8	10	x
$\boxed{0}$	~~0~~	11	9	12	6	x
16	2	10	$\boxed{0}$	9	5	
~~0~~	2	9	19	14	4	x
4	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	$\boxed{0}$	
4	~~0~~	~~0~~	~~0~~	$\boxed{0}$	~~0~~	

7	$\boxed{0}$	1	19	4	6
$\boxed{0}$	~~0~~	7	5	8	2
20	6	10	$\boxed{0}$	9	5
~~0~~	2	5	15	12	$\boxed{0}$
8	4	~~0~~	~~0~~	$\boxed{0}$	~~0~~
8	4	$\boxed{0}$	~~0~~	~~0~~	~~0~~

➢ **تحقق شرط الامثلية.**

التخصيص

الوظائف \ المهندسين	احمد	محمد	وليد	منير	عادل	حاتم
1	35	37	22	40	45	42
2	20	14	17	15	26	30
3	15	11	20	10	18	8
4	40	30	25	35	42	45
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

تخصيص (احمد، وليد، عادل،حاتم) في الوظائف (4،3،1،2) على الترتيب، وعدم توظيف (مُحَّد، منير).

اكبر عائد ممكن: $\mathbf{45 + 30 + 20 + 40 = 135}$