الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة محمد الصديق بن يحيى جيجل

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم التعليم الأساسي للعلوم الاقتصادية التجارية وعلوم التسيير

الاحصاء II

محاضرات واعمال موجهة تضم تمارين محلولة

لطلبة سنة الأولى أساسي

الدكتورة: سامية يغني

السنة الجامعية: 2020-2021

العنوان	فهرس المحتويات	الصفحة

بسم الله الرحمان الرحيم

عينان لا تمسهما النار

عين بكت من خشية الله

عين باتت تسهر في سبيل الله

وقل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون

وستردون الى عالم الغيب والشهادة فينبئكم بما كنتم تعملون

"صدق الله العظيم"

سورة التوبة 105

تقديم

الاحصاء II عمل علمي يركز أساسا على تقديم نظريات الاحتمالات ضمن وحدة الإحصاء II المقررة في السداسي الثاني من السنة الجامعية، مثل طرق العد في الاحتمالات، التبديل، القائمة، والتوافيق، الاحتمالات الشرطية، المتغير ات العشوائية المفصلة والمتصلة، و بعض التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنفصلة والمستمرة : من التوزيع الثنائي، التوزيع بواسون، التوزيع فوق الهندسي، التوزيع المنتظم، اما بالنسبة لتوزيعان المستمرة تناولنا التوزيع الطبيعي، التوزيع الطبيعي المعياري، التوزيع المنتظم والتوزيع الاسي، كل هذه الموضوعات معروضة في هذه المطبوعة بتسلسل منطقي وسهل للفهم، فهي موجه للطلبة سنة الاولى من تكوينهم.

ونأمل ان هذا العمل العلمي يؤدي الى تكوين نوعي للتحقيق الهدف الاستراتيجي لإصلاح التعليم العالي والبحث العلمي.

في الاخير اتمنى كل التوفيق والنجاح للأساتذة والطلبة.

مقدمة

ان كلمة الإحصاء كانت تهدف في الماضي الى العد والحصر، حتى قد سمي بعلم العد، اما الان فالإحصاء قد تطور وخاصة في القرن العشرين، أصبح علما مستقلا له أهميته كوسيلة وأداة في البحث العلمي لجميع العلوم. وعلم الإحصاء هو ذلك العلم الذي يبحث في جميع البيانات وتنظيمها وعرضها وتحليلها واستخراج النتائج واتخاذ القرارات بناء عليها.

علم الاحصاء يعتمد على التجربة والقياس ويمدنا علم الاحصاء طرق تمكننا تنظيم البيانات ودراسة المجتمعات ويلعب الاحصاء دورا هاما في حياتنا اليومية. فالإحصاء يدخل في جميع المجالات، فنجده في الاقتصاد، في علم الاجتماع، علم النفس، علم الطب، الخ.

الاحصاء يتطرق الى دراسة الظواهر اقتصادية او دراسة مجتمع ما حول قضاياه المتعددة أوفي تأسيس الروابط بين العوامل البيئية والصحية. ومن هذا المنطلق ارتئينا وضع هذه المطبوعة في علم الاحصاء ولو بحصر جوانبه الاساسية في تأسيس ورابطة متينة بين العلم والحياة العلمية.

لذا وجدنا من الضروري اعطاء الجانب النظري والتطبيقي حول الاحصاء II ليكن للطالب والاستاذ على السواء في حل مشاكل الاحتمالات بصورة سليمة.

ينقسم الاحصاء الى قسمين الإحصاء والاحصاءII.الاحصاء I يضم الاحصاء الوصفي، اما الاحصاء II هو عنوان المطبوعة يشمل المفاهيم الاساسية، نظريات الاحتمالات والمتغيرات العشوائية، والتوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المنفصلة والمتصلة، وهكذا بات فرعا مكملا للإحصاء الوصفي.

فهذه المطبوعة تحتوي على خمس فصول حسب برنامج وزارة التعليم العالي والبحث العلمي. كل فصل نجد فيه المفاهيم والقوانين ومجموعة معتبرة من التمارين والحلول.. من الواضح ان استيعاب الدروس يتطلب حل العديد من التمارين، لذا لقد حصرت على تقديم العديد من الأمثلة والتمارين المحلولة وبعض التمرين غير محلولة والهدف لكي يجتهد الطالب فيها وهذا بعد مراجعة كل التمارين المحلولة.

هذه المطبوعة ما هي الا محاولة مني لإثراء ومساعدة الطلبة والمهتمين بهذا المقياس.

الفصل الاول

مفاهيم أساسية في طرق العد

قبل تطرق الى نظرية الاحتمالات لا بد من تسليط الضوء على بعض مفاهيم أساسية التي لها علاقة بالنظرية الاحتمالات.

عند تفكير في الإمكانيات الناتجة عن اختيار او ترتيب الأشياء او العناصر المختلفة لمجوعة ما فإننا نواجه عدد كبير من الإمكانيات وهذا إذا لم تتكرر العناصر؟ اما إذا تكررت العناصر سيكون الامر أكثر تعقيدا وعلينا تسجيل كل الإمكانيات الممكنة. لذا سوف نتطرق في هذا الفصل ببعض الطرق لتحديد عدد النواتج الممكنة لتجربة معينة او عدد العناصر في مجموعة معينة. طرق العد في الاحتمالات قد تكون القائمة، التبديلة، الترتيبة او التوفيقة. فهي عبارة عن تحديد عدد عناصر فضاء العينة وعدد عناصر العينة دون كتابة فضاء العينة او الحادثة.

ويعرف فضاء العينة بانه جميع حالات الظهور الممكنة عند اجراء تجربة عشوائية معينة. اما الحادثة فهي جزء من النتائج الممكنة في فضاء العينة. وبصورة عامة تساعدنا كثيرا في إيجاد قيم الاحتمال بسهولة وخاصة إذا كانت عناصر فضاء العينة كبير جيدا.

1.القاعدة الأساسية في طرق العد:

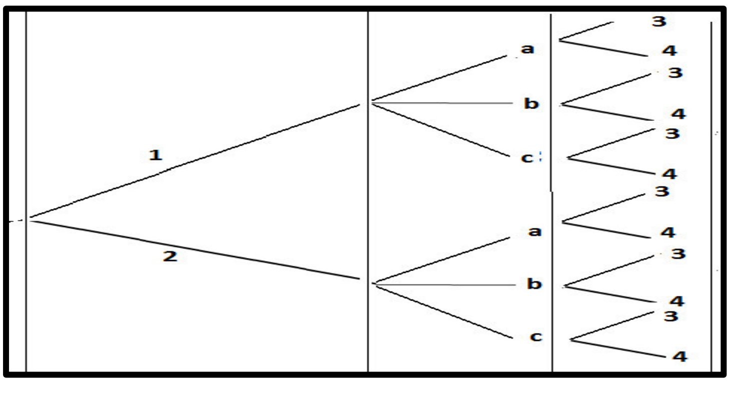
إذا أمكن اجراء عملية ما بعدد n_1طريقة مختلفة، ونكرر العملية للمرة الثانية يمكن اجرائها بعدد n_2 طريقة مختلفة، ونكرر العملية للمرة الثالثة يمكن اجرائها بعدد n_3طريقة مختلفة، وهكذا ...فان عدد الطرق التي يمكن اجراء هذه العمليات بالترتيب المذكور هو حاصل الضرب($n_1*n_2*n_3*\ldots$)

مبادئي العد الأساسية او مبادئي التركيبات هي مجموعة من المبادئ او القواعد المعروفة للعد وهي شائعة الاستخدام قاعدة الجمع، الضرب، الاقصاء والتضمين.

يمكن تمثيل هذه النتائج في شجارة بيانية، تستعمل هذه الطريقة لحصر كل النواتج الممكنة لتجربة ما.

وسوف نبين كيفية تركيب الشجارة البيانية من الأمثلة التالية: وجد مجموعة حاصل الضربA B C اذا كانت:

$$A = \{1,2\}$$
$$B = \{a,b,c\}$$
$$C = \{3,4\}$$



لاحظ ان الشجرة مركبة من اليسار الى اليمين، وان عدد الافرع في كل نقطة يكافئ عدد النواتج الممكنة للتجربة.

2.القائمة

تعريف القائمة:

E مجموعة منتهية ذات n عنصرا و p عدد طبيعي غير معدوم. نسمي قائمة ذات p عنصرا من E كل متتالية مرتبة من $\left(a_1, a_2, a_3, \ldots a_p\right)$ من p عنصرا من E، فعدد القوائم ذات p عنصرا من E التي تشمل n عنصرا هو: n^p أي السحب يكون على التوالي مع الارجاع.

<u>مثال(1):</u>

1. ماهو عدد الاعداد ذات ثلاث ارقام التي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام التالية: E= {2, 3,5, 6, 7,9}
2. ماهو عدد الاعداد ذات سبعة ارقام التي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام عناصر المجموعة E

<u>الحل:</u>

السؤال الأول

نستعمل القائمة لأننا أخذنا جزء من الكلي. القائمة تتكون من ثلاث عناصر $p = 3$ $n = 6$

$$n^p = 6^3 = 216$$

السؤال الثاني: $n^p = 6^7 = 279936$

اذن نسمي قائمة ذات p عنصرا من مجموعة E كل متتالية ومكونة من عنصرا من عناصر E الترتيب مهم والتكرار مسموح.$n \in N^*$ عدد العناصر من المجموعة المنتهيةE و $p \in N^*$عدد العناصر من المجموعة القائمة.

<u>ملاحظة</u>: ممكن ان يكون n أكبر من p لان السحب بالإرجاع.

النظرية: E مجموعة منتهية ذات n عنصرا $(n \geq 1)$ وp عددا طبيعي $(p \geq 1)$نسمي قائمة ذات عنصرا p من E كل متتالية مرتبة من p عنصرا من عناصر E . اذا اردنا ان تكون هذه العناصر المرتبة متمايزة مثنى مثنى عندائدا لا يمكن للقائمة ان تحتوي اكثر من n عنصرا وهذا ما يقتضي ان يكون $(1 \leq p \leq n)$ من اجل كل عدد طبيعي عدد قوائم E ذات p عنصرا يساوي: np

بينما يكون عدد القوائم E ذات p عنصرا المتمايزة العناصر مثنى مثنى هو:

$$n! = n*(n-1)*(n-2)*(n-3)\ldots*(n-p+1)$$

في الحالة الأولى عدم اشتراط تمايز العناصر، يكون لكل عنصر القائمة n إمكانية ومنه فان عدد القوائم هو: n^p أي $n*n*n*n*n...p$

في الحالة الثانية قوائم عناصرها متمايزة مثنى مثنى . يكون للعنصر الأول n إمكانية ثم (n-1) إمكانية ثم إمكانية العنصر الثاني و (n-2) للعنصر الثالث ...واخيرا n-p+1 إمكانية للعنصر الأخير الذي رتبته p باستعمال مبدأ الضرب. يكون عدد القوائم $n!=n*(n-1)*(n-2)*(n-3)...*(n-p+1)$

متى نستعمل القائمة؟

تشكيل الاعداد	سحب كرات من الكيس	القانون
يمكن تكرار الارقام	يكون السحب على التوالي بالإرجاع	n^p

<u>مثال(2):</u>

اكتب فضاء مع تحديد عناصر الفضاء لتجربة عشوائية:

1. رمي قطعة نقود متجانسة مرة واحدة.
2. رمي قطعتين نقود متجانسين.
3. رمي زهرة نرد متجانسة مرة واحدة.
4. رمي زهرتي نرد متجانستين.
5. رمي قطعة نقود وزهرة نرد معا.

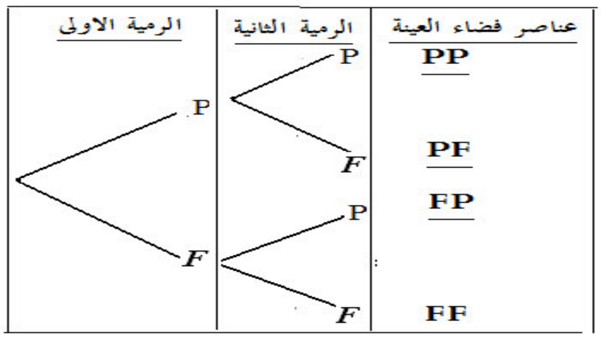
<u>الحل:</u>

السؤال الأول: نحدد عناصر الفضاء لرمي قطعة نقود متجانسة مرة واحدة:

نرمز للكتابة بP و نرمز للصورة بF

عناصر الفضاء: $\Omega=(P,F)=2^1=2$

السؤال الثني: نحدد عناصر الفضاء لرمي قطعتين نقود متجانسين:



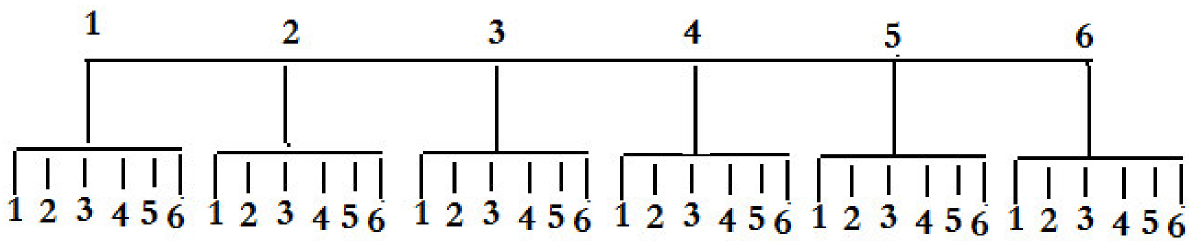
$$\Omega=\left(PP,PF,FP,FF\right)=2^{n}=2^{2}=4$$

السؤال الثالث: تحديد عناصر فضاء العينة لرمي زهرة نرد متجانسة مرة واحدة:

$$\Omega=\left(1,2,3,4,5,6\right)=6^{n}=6^{1}=6$$

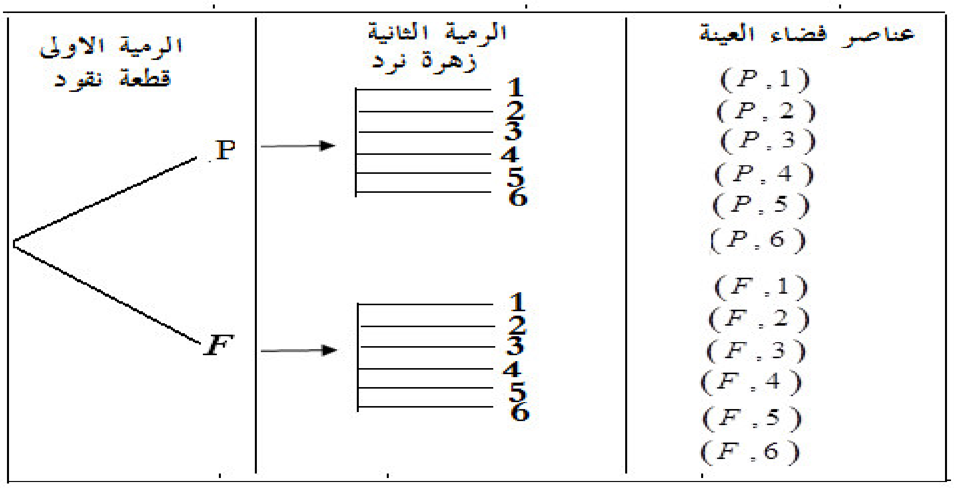
السؤال الرابع: تحديد عناصر فضاء العينة لرمي زهرتي نرد متجانستين:

$$\Omega=\begin{Bmatrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\\(3,1),(32),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\end{Bmatrix}$$



$$\Omega_1*\Omega_2=\left(1,2,3,4,5,6\right)*\left(1,2,3,4,5,6\right)=6^{n}=6^{2}=36$$

السؤال الخامس: تحديد عناصر فضاء العينة لرمي قطعة نقود وزهرة نرد معا:



$$\Omega=\begin{Bmatrix}(P,1),(P,2),(P,3),(P,4),(P,5),(P,6)\\(F,1),(F,2),(F,3),(F,4),(F,5),(F,6)\end{Bmatrix}=2^n*6^n=2^1*6^1=12$$

3.الترتيبة

تعريف الترتيبة

E مجموعة منتهية ذات n عنصرا و p عدد طبيعي غير معدوم حيث $1\leq p\leq n$ نسمي ترتيبة p عنصرا من E،كل قائمة ذات p عنصرا بحيث تكون هذه العناصر متمايزة مثنى مثنى. فعدد الترتيبات لـp عنصرا من E التي تشمل n عنصرا هو العدد الطبيعي الذي يرمز له ب A_n^p والمعروفة كما يلي.

$$A_n^p=n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$$

يمكن كتابة عدد الترتيبات ذات p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا بالشكل التالي:

$$A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}$$

نسمي ترتيبة p $(1\leq p\leq n)$ عنصرا من E كل متتالية مرتبة من p عنصرا متمايزة مثنى مثنى من عناصر E

متى نستعمل الترتيبة؟

المطلوب	تشكيل الاعداد	تشكيل الجان	سحب من كيس	القانون
الترتيبة	الارقام لا تتكرر	المهام محددة	على التولي وبدون ارجاع	$A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}$

مثال(3):

ما هو عدد الاعداد التي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام (1,2,3,4,5,6) إذا كانت هذه الأرقام تتكون من:

1. ثلاث ارقام؟
2. ست ارقام مختلفة؟

الحل:

السؤال الاول: حالة خاصية القائمة يشترط فيها تمايز اذن ترتيبة: 120 = 4*5*6

نسحب الرقم الأول من بين ستة خيارات

نسحب الرقم الثاني من بين خمسة خيارات

نسحب الرقم الثالث من بين أربعة خيارات

نلغي التكرار ونحتفظ بالترتيب اذن :بتطبيق القانون نتحصل على :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$$
$$A_6^3 = 6(6-1)...(6-3+1)$$
$$A_6^3 = 6(6-1)..(6-3+1)$$
$$A_6^3 = 6(5)...(4) = 120$$

يمكن تطبيق طريقة أخرى باستعمال القانون التالي: $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \Rightarrow A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = 120$$

السؤال الثاني: التجربة لا تقبل التكرار أي الأرقام مختلفة:

720 = 6.5.4.3.2.1 = ! 6 = ! n أي 720 طريقة ممكنة للحصول على ستة ارقام مختلفة.

مثال(4):

جمعية تتكون من 15 رجلا و12امرأة، نريد تشكيل لجنة تضم رئيس، نائب وكاتب. المطلوب:

ماهو عدد اللجان التي يمكن تكوينها؟

ماهو عدد اللجان التي يمكن تكوينها بحيث

الأمين امرأة؟

a) الرئيس ونائبه من جنسين مختلفين؟

b) ما هو عدد اللجان المختلطة؟

الحل:

السؤال الأول: عدد اللجان التي يمكن تكوينها هو :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \Rightarrow A_{27}^3 = \frac{27!}{(27-3)!} = 17550$$

أي هناك 17550 طريقة ممكنة لتشكيل اللجان:

السؤال الثاني: ماهو عدد اللجان التي يمكن تكوينها بحيث الأمين امرأة:

$$\begin{aligned}
&A_n^p = n(n-1)(n-2)...(n-p+1)\\
&A_{12}^1 * A_{26}^2 = ?\\
&A_{12}^1 = n = 12\\
&A_{26}^2 = n...(n-p+1) = 26(26-2+1)26*25 = 650\\
&A_{12}^1 * A_{26}^2 = 12*650 = 7800
\end{aligned}$$

السؤال الثاني: ماهو عدد اللجان التي يمكن تكوينها بحيث الرئيس ونائبه من جنسين مختلفين:

$$\begin{aligned}
&A_n^p = n(n-1)(n-2)...(n-p+1)\\
&A_{12}^1 * A_{15}^1 * A_{25}^1 = ?\\
&A_{12}^1 = n = 12\\
&A_{15}^1 = 15\\
&A_{25}^1 = 25\\
&A_{12}^1 * A_{15}^1 * A_{25}^1 = 12*15*25 = 4500
\end{aligned}$$

السؤال الثاني: ماهو عدد اللجان المختلطة:

عدد اللجان الكلية – عدد اللجان من نفس الجنس = عدد اللجان المختلطة

عدد اللجان الكلية: $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \Rightarrow A_{27}^3 = \frac{27!}{(27-3)!} = 17550$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

عدد اللجان من نفس الجنس:

$$A_{15}^3 + A_{12}^3 = ?$$
$$A_{15}^3 = n(n-1)(n-p+1) = 15*14*13 = 2730$$
$$A_{12}^3 = n(n-1)(n-p+1) = 12*11*10 = 1320$$
$$A_{15}^3 + A_{12}^3 = 2730 + 1320 = 4050$$

عدد اللجان المختلطة هو :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$
$$A_{27}^3 - \left(A_{15}^3 + A_{12}^3\right) = 17550 - 4050 = 13500$$

ملاحظة:

يمكن ترتيب n عنصرا مختلفا كما يلي، العنصر الأول يمكن اختياره بn طريقة مختلفة، العنصر الثاني ب(n −1)

طريقة، العنصر الثالث ب (n−2) وهكذا اما العنصر الأخير فنختاره بطريقة واحدة.

عدد الطرق الممكنة لترتيب هذه العناصر يعطى كما يلي:

$$\left(n*(n-1)*(n-2)*(n-3)*....3*2*1\right)$$

يمكن التعبير عن المقدار ب ! n ويقرأ n عاملي أي :

$$n! = n*(n-1)*(n-2)*(n-3)*....3*2*1$$

مثال(5):

جد مضروب الاعداد التالية: $[3,5,7]$

الحل:

مضروب الأرقام التالية هو:

$$[3,5,7]$$
$$3! = 3*2*1 = 6$$
$$5! = 5*4*3*2*1 = 120$$
$$7! = 7*6*5*4*3*2*1 = 5040$$

مثال(6):

في احدى المستشفيات يوجد 6كراسي و5 مرضى. بكم طريقة ممكنة لجلوس المرضى الخمسة على هذه الكراسي؟

الحل

المريض الأول له 6 خيارات للجلوس$n1$، المريض الثاني له 5 خيارات للجلوس$n2$، المريض الثالث له 4خيارات للجلوس$n3$

المريض الرابع له 3 خيارات للجلوس$n4$، المريض الخامس له 2 خيارات للجلوس$n5$

$n1*n2*n3*n4*n5=6.5.4.3.2= 720$ اذن يوجد 720 طريقة ممكنة للجلوس المرضى على الكراسي.

اذن يعرف مضروب العدد أي عدد صحيح موجب، بانه حاصل ضرب الرقم 1 في الرقم 2 في الرقم3 ....وهكذا وصولا الى العدد نفسه، و يكتب على الشكل التالي:

$$n! = 1*2*3*\ldots(n-1)*n$$
$$n! = n*(n-1)*(n-2)*(n-3)*\ldots*2*1$$

مثال(7):

يقدم مطعم الجامعة 8 أنواع من المقبلات 4 أنواع من الصحون الرئيسية 5 أنواع من المشروبات.

بكم طريقة مختلفة يمكن للطالب اختيار وجبة غداء مؤلفة من نوع واحد من كل صنف من قائمة المطعم.

الحل:

يمكن اختيار 8 أنواع من المقبلات 4 أنواع من الصحون الرئيسية 5 أنواع من المشروبات، مجموع الطرق الممكنة

$8*4*5= 160$

مثال(8):

بكم طريقة يمكن عرض خمس علب مختلفة من الادوية على رف احدى الصيدليات؟

<u>الحل:</u>

لا توجد شروط على الاختيار أي لا يوجد فرق في الاختيار، وبالتالي يمكن ترتيب العلبة الأولى بخمس طرق، العلبة الثانية بأربعة طرق، العلبة الثالثة بثلاث طرق، العلبة الرابعة بطريقتين، والعلبة الأخيرة بطريقة واحدة. عدد الطرق الممكنة: $120 = 5.4.3.2.1 = !5$

<u>مثال(9):</u>

نريد اختيار حرفين من الاحرف الخمسة التالية: ABCDE، بكم طريقة يمكن ترتيب هذين الحرفين بعد اختيارهما؟

الحل:

ان اختيار الحرف الأول يمكن اختياره بخمسة طرق والثاني يمكن اختياره بربع طرق أي: $20 = 4*5$

BA CA DA EA CB DB DC EC ED   AB AC AD AE BC BD CD CE DE

التراتيب الدائرية:

قد يكون الترتيب صفا او دائرة، في التراتيب الدائرية نعتبر أحد العناصر ثابتا ثم نرتب العناصر الباقية. ان عدد التراتيب الدائرية الممكنة لn من الأشياء هو $(n-1)!$

<u>مثال(10):</u>

نري ان يجلس أربعة اشخاص حول طاولة مستديرة، فبكم طريقة يمكن لهم ان يجلسوا؟

<u>الحل:</u>

إذا جلس الأول في مكان معين فان المقعد على يساره يمكن ان يشغل بثلاثة طرق، والمقعد الاخر يمكن ان يشغل بطريقتين والمقعد الأخير بطريقة واحدة. تكون عدد التراتيب الممكنة كما يلي:

$(4-1)!=3!=2*3=6$

تراتيب الأشياء المتشابهة وغير المتشابهة، فمثلا: لتكن لدينا الاحرف الثلاثة التالية ABC إذا كان بين هذه الحروف حرفان متمثلان ولنفرض ان الحروف هي AAC لكانت التراتيب المختلفة هي: AAC-CAA-ACA أصبح عدد التبادل يساوي ثلاثة.

4.التبديلة

تعريف التبديلة:

أولا نعرف التبديلة من خلال الأمثلة التالية: لتكن لدينا الاحرف الثلاثة التالية A B C لاحظ ان هناك ستة طرق مختلفة لإعادة الترتيب. بكم طريقة يمكن كتابة هذه الحروف؟

ABC-BCA-CAB-ACB-BAC-CBA

ان كل ترتيب لهذه الاحرف بجانب بعضها البعض مختلف عن الترتيب السابق يسمى تبديل، اذن هناك ستة تبادل مختلفة لكتابة الاحرف ABC

اذن التبديلة هي عبارة عن أي ترتيب متسلسل لمجموعة من الأشياء مع مراعاة التكرار. وهناك ثلاث حالات وهي:

الحالة الأولى: اذا كان لدينا n عنصرا كل ترتيبة n عنصرا من لمجموعة E، فعدد التبديلات لمجموعة ذات n عنصرا هو العدد الطبيعي الذي يساوي: $n!=n(n-1)(n-2)...(2*1)$ العدد ! n يقرأ n عاملي.

$$P_n^n = n! = 1*2*3*...(n-1)*n$$
$$P_n^n = n! = n*(n-1)*(n-2)*(n-3)*...*2*1$$
$$P_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

<u>مثال(11):</u>

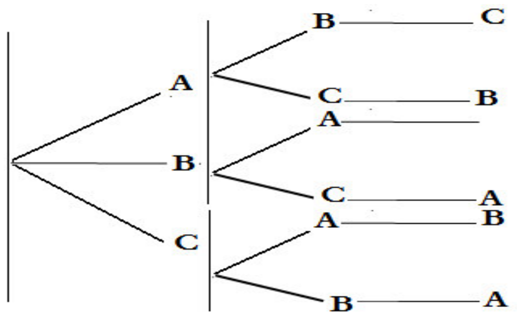
كم عدد الطرق الممكنة في ترتيب الحروف A B C؟

<u>الحل:</u>

يمكن إيجاد عدد الطرق الممكنة في ترتيب الحروف حسب الطريقة التالية:

$$P_n^n = n! = 1*2*3*...(n-1)*n$$
$$P_n^n = n! = n*(n-1)*(n-2)*(n-3)*...*2*1 = 3! = 3*2*1 = 6$$
$$P_n^n = P_3^3 = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!} = \frac{3!}{1} = 3! = 6$$

الشكل يكون كما يلي:



اذن عدد الطرق الممكنة هو:

$$\Omega=\{(ABC),(ACB),(BAC),(BCA),(CAB),(CBA)\}=n!=3!=6$$

الحالة الثانية:

اذا كان لدينا n عنصرا ونختار جزء منها وليكن r، فان عدد الطرق ترتيبها تكتب كما يلي:

$$P_n^r=\frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال(12):

تم سحب بطاقتين بشكل عشوائي من أصل عشرين بطاقة في عملية القرعة، كم هو عدد النقاط في فضاء العينة؟

الحل:

يمكن الحصول على عدد النقاط في فضاء العينة بالطريقة التالية:

$$P_n^r=P_{n=20}^{r=2}=n*(n-r+1)=20(20-2+1)=20*19=380$$

$$P_n^r=P_{n=20}^{r=2}=\frac{20!}{(20-2)!}=\frac{20!}{18!}=\frac{20*19*18!}{18!}=20*19=380$$

تحصلنا على 380نقطة:

مثال(13):

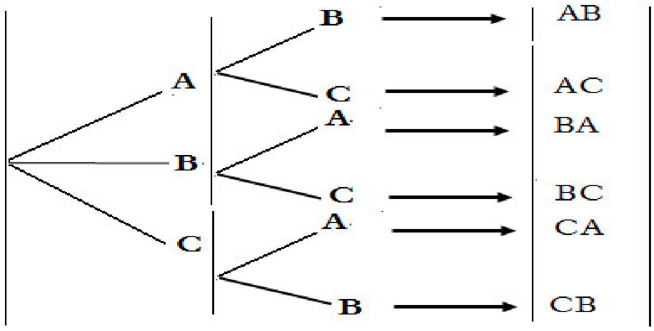
كم عدد الطرق الممكنة في ترتيب حرفين من الحروف الثلاثة ABC

الحل:

$$P_n^r = P_{n=3}^{r=2} = n*(n-r+1) = 3(3-2+1) = 3*2 = 6$$

$$P_n^r = P_{n=3}^{r=2} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{3*2*1}{1} = 6$$

الشكل يكون كما يلي:



الحالة الثالثة: اذا كان لدينا n عنصرا بحيث n_1 تمثل العنصر الأول و n_2 تمثل العنصر الثاني،...حتى n_k، فان عدد طرق ترتيبها يكتب على الشكل التالي:

$$P_n^{n1,n2,...nk} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

النظرية: إذا كان ضمن n من العناصر، n_1 من العناصر المتشابهة، وn_2 من العناصر المتشابهة والمختلفة عن النوع الأول، n_3 من العناصر المتشابهة والمختلفة عن النوعين الاولين .....n_k من العناصر المتشابهة والمختلفة عن جميع العناصر من الأنواع السابقة، فان عدد تبديل العناصر التي عددها n هو : $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!...n_k!}$

مثال(14):

بكم طريقة يمكن توزيع 9 من الألعاب على أربعة أطفال بحيث يتلق طفل ثلاث العاب وكل طفل اخر لعبتين؟

الحل:

في هذا المثال يراد معرفة عدد التجزيئيات المرتبة لتسع العاب الى أربع أطفال تحتوي على: 3,2,2,2 من الألعاب على التوالي. من القانون نستنتج:

$$P_n^{n1,n2,\dots nk} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

$$P_n^{n1,n2,\dots nk} = \frac{9!}{3!2!2!2!} = 7560$$

<u>مثال(15):</u>

بكم طريقة يمكن لنا ترتيب أربع علب حمراء ثلاث علب صفراء وعلبتان خضراء إذا علمت ان كل العلب من نفس الحجم؟

<u>الحل:</u>

بتطبيق العلاقة نجد ان عدد التراتيب الممكنة : $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\dots n_k!} = \frac{9!}{4!3!2!} = 1260$

أي ان العلب تسع يمكن ان ترتب بشكل صف ب 1260 طريقة.

<u>مثال(16):</u>

إذا كان لدينا3 مصابيح حمراء، 4 زرقاء و3 صفراء. كم هي عدد الطرق الممكنة في ترتيب الأنواع الثلاثة من المصابيح؟

<u>الحل:</u>

$$n = n_1 + n_2 + n_3 = 3 + 4 + 3 = 10$$

$$P_n^{n_1,n_2,\dots n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

$$P_{10}^{3,4,3} = \frac{10!}{3!4!3!} = 4200$$

5. تعريف التوفيقة:

نسمي توفيقة p عنصرا من E كل جزء من E يشمل p حيث عدد التوافق p عنصرا من E، هو العدد الطبيعي و يرمز له ب C_n^p ويحسب كما يلي: $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

مثال (17):

جد قيمة كل من: C_4^2 C_6^4

الحل:

$$C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}$$
$$C_4^2=\frac{4!}{2!(4-2)!}=\frac{4*3*2!}{2!*2*1}=6$$
$$C_6^4=\frac{6!}{4!(6-4)!}=\frac{6*5*4!}{4!*2*1}=15$$

النظرية: التوافق تعني اختيار وما يهم في الاختيار هو عدد الأشياء من المجموعة بغض النظر عن ترتيبها. فهي مجموعة منتهية ذات n عنصرا وp عدد طبيعي حيث $(0\le p\le n)$ نسمي توفيقة ذات p عنصر ا من عناصر E ذي p عنصرا من عناصر E نرمز لعدد التوافق ذات p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا بالرمز c_n^p

الملاحظة:

$$c_n^1=n$$
$$c_n^n=1$$
$$c_n^0=1$$

من اجل كل عددين طبيعيين nوp حيث $(0\le p\le n)$ $c_n^p=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

مثال(18):

فريق رياضي مؤلف من سبعة لاعبين اختير من 12 لاعبا، لاعب من السبعة لاعبين كابتان الفريق واخر نائب كابتان. بكم طريقة يمكن انجاز ذلك؟

الحل:

عدد الطرق لاختيار 7 من 12 : $c_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=c_{12}^7=\dfrac{12!}{7!(12-7)!}=792$

في كل فريق هناك سبع طرق لاختيار كابيتان وست طرق لاختيار نائب الكابيتان أي 42 =7*6

لإنجاز الاختيار يكون كما يلي: 33264 =792*42

متى نستعمل التوفيقة؟

المطلوب	تشكيل الجان	سحب من كيس	القانون
التوفيقة	المهام غير محددة	في ان واحد	$c_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$

مثال(19):

يحتوي صندوق على 32 كرية، لا نفرق بينهما عن اللمس. نسحب بطرقة عشوائية 4 كريات.

1. ماهو عدد الحالات الممكنة للسحب علما ان السحب يتم في ان واحد؟
2. ما عدد الحالات الممكنة للسحب إذا كان السحب يتم على التوالي؟
   a) دون ارجاع
   b) مع الارجاع

الحل:

السؤال الأول: عدد الحالات الممكنة للسحب علما ان السحب يتم في ان واحد

الترتيب غير مهم أي السحب في ان واحد نطبق التوفيقة: $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

$$C_{32}^4 = \frac{32!}{4!(32-4)!} = 35960$$

السؤال الثاني: عدد الحالات الممكنة للسحب إذا كان السحب يتم على التوالي. الترتيب مهم.

السحب بدون الارجاع: نطبق الترتيبة

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}, (p < n)$$

$$A_{32}^4 = \frac{32!}{(32-4)!} = 863040$$

السحب بدون الارجاع: نطبق القائمة $n^p = 32^4 = 1048576$

مثال(20):

صندوق يضم 10 كرات متماثلة أربعة منها سوداء والباقي بيضاء. نسحب من الصندوق ثلاث كرات في ان واحد. ما هو عدد المالات الممكنة للحصول على:

1. كرة بيضاء؟
2. كرة بيضاء على الأقل؟
3. ثلاث كرات ليست من نفس اللون؟

<u>الحل:</u>

السؤال الأول: الحصول على كرة بيضاء: السحب في ان واحد نطبق التوفيقة.

$$C_n^p = C_6^1 . C_4^2 = 36$$

السؤال الثاني: الحصول على كرة بيضاء على الأقل.

$$C_n^p = C_6^3 . C_4^0 + C_6^2 . C_4^1 + C_6^1 . C_4^2 = 36 = 116$$

الطريقة الثانية: $\boxed{\text{العدد الكلي للسحب – عدد الكرات السوداء= كرة بيضاء على الاقل}}$

$$C_n^p = C_{10}^3 - C_4^3 = 120 - 4 = 116$$

السؤال الثالث: الحصول على ثلاث كرات ليست من نفس اللون:

العدد الكلي للسحب هو $C_n^p = C_{10}^3 = 120$

سحب ثلاث كرات من نفس اللون : $C_n^p = C_6^3 + C_4^3 = 20 + 4 = 24$

نستنتج: الكرات الثلاثة ليست من نفس اللون: $C_n^p = C_{10}^3 - \left(C_6^3 + C_4^3 \right) = 120 - 24 = 96$

الطريقة الثانية: يمكن ان نتحصل على كرة بيضاء **و**كرتين سوداء **<u>او</u>** كرة سوداء **و**كرتين بيضاء.

$$C_n^p = C_4^1 * C_6^2 + C_4^2 * C_6^1 = 96$$

<u>مثال(21):</u>

قسم يتألف من عشرين طالب به 12ذكور و 8 اناث، نريد تكوين لجنة تحتوي على 5 طلبة.

1. ما هو عدد طرق تكوين لجنة؟
2. ما هي عناصر اللجنة من نفس الجنس؟
3. ما هي عناصر اللجنة من جنسين مختلفين؟
4. ما هي عناصر اللجنة تحتوي على 3 ذكور و2 اناث؟
5. في القسم نفرض وجود احمد وحميدة. ما هو عدد اللجان التي لا تحتوي فيه احمد وحميدة معا؟

الحل:

السؤال الأول: عدد طرق تكوين لجنة هو: $C_n^p = C_{20}^5 = 15504$

السؤال الثاني: عناصر اللجنة من نفس الجنس هي: $C_n^p = C_8^5 + C_{12}^5 = 848$

السؤال الثالث: عناصر اللجنة من جنسين مختلفين: يمكن استنتاج من:

عدد طرق تكوين لجنة – عناصر اللجنة من نفس الجنس= عناصر اللجنة من جنسين

$$C_n^p = C_{20}^5 - \left(C_8^5 + C_{12}^5\right) = 15504 - 848 = 14656$$

السؤال الرابع: عناصر اللجنة تحتوي على 3 ذكور و2 اناث: $C_n^p = C_8^2 * C_{12}^3 = 6160$

السؤال الخامس: عدد اللجان التي لا تحتوي فيه احمد وحميدة معا هو:

$$C_n^p = C_{20}^5 - \left(C_{20-2}^{5-2}\right) = C_{20}^5 - C_{18}^3 = 15504 - 816 = 14688$$

مثال(22):

يضم صندوق 15كرة منها 6 بيضاء تحمل الأرقام 11 22 33 و5 خضراء تحمل الأرقام 22111 و 4 حمراء تحمل الأرقام 1 333. نسحب 3 كرات في ان واحد. ما هو عدد الحالات الممكنة لسحب:

1. 3 كرات من نفس اللون؟
2. 3 كرات من نفس الرقم؟
3. 3 كرات واحدة على الأقل تحمل الرقم الفردي؟

الحل:

نلاحظ ان السحب في ان واحد اذن نطبق التوفيقة.

السؤال الأول:3 كرات من نفس اللون:

4R	6B	5V

$$C_n^p = C_4^3 + C_5^3 + C_6^3 = 34$$

السؤال الثاني: 3 كرات من نفس الرقم:

لدينا 6 كرات لديهم الرقم1 و 4 كرات لديهم الرقم2 و 5 كرات لديهم الرقم3 :

$$C_n^p = C_4^3 + C_5^3 + C_6^3 = 34$$

السؤال الثالث: 3 كرات واحدة على الأقل تحمل الرقم الفردي:

1 فردي 2 زوجي	2 فردي 1 زوجي	3 فردي 0 زوجي

لدينا 11 كرة تحمل الرقم الفردي و 4 كرات تحمل الرقم الزوجي:

$$C_n^p = C_{11}^3 * C_4^0 + C_{11}^2 * C_4^1 + C_{11}^1 * C_4^2 = 451$$

الطريقة الثانية : عدد الحالات الممكنة – الأرقام الزوجية = الأرقام الفردية:

$$C_n^p = C_{15}^3 - C_4^3 = 455 - 4 = 451$$

مثال(23):

في قسم علوم التسيير يوجد 16 طالب مختص في الإحصاء، نريد اختيار 6 منهم لتمثيل في مسابقة الدكتورة.

1. ما هو عدد الاختيارات الممكنة؟
2. ماذا لو كان اثنان منهم يرفضان الذهاب الا إذا كان معا؟
3. ماذا لو كان اثنان منهم متخاصمين الذهاب معا؟

الحل: السؤال الأول: عدد الاختيارات الممكنة هو:

الترتيب غير مهم اذن نستعمل التوفيقة:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C_{16}^6 = \frac{16!}{6!*(16-6)!} = 8008$$

السؤال الثاني: لو كان اثنان منهم يرفضان الذهاب الا إذا كان معا

نختار اثنان

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C_{16-2=14}^{6-2=4} = \frac{14!}{4!*(14-4)!} = 1001$$

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

لا نختار 6 الطلبة:

$$C_{16}^6 = \frac{16!}{6!*(16-6)!} = 8008$$

نستنتج: نختار اثنان او لا نختار : $C_{16}^6 + C_{14}^4 = 9009$

نختار الأول ولا نختار الثاني ونختار الثاني ولا نختار الأول او لا نختار ولا واحد:

$$C_{16-2=14}^6 + C_{16-2=14}^{6-1=5} * C_{16-2=14}^{6-1=5} = C_{14}^6 + 2 * C_{14}^5 = 3003 + 4004 = 7007$$

ملخص تطبيق طرق العد

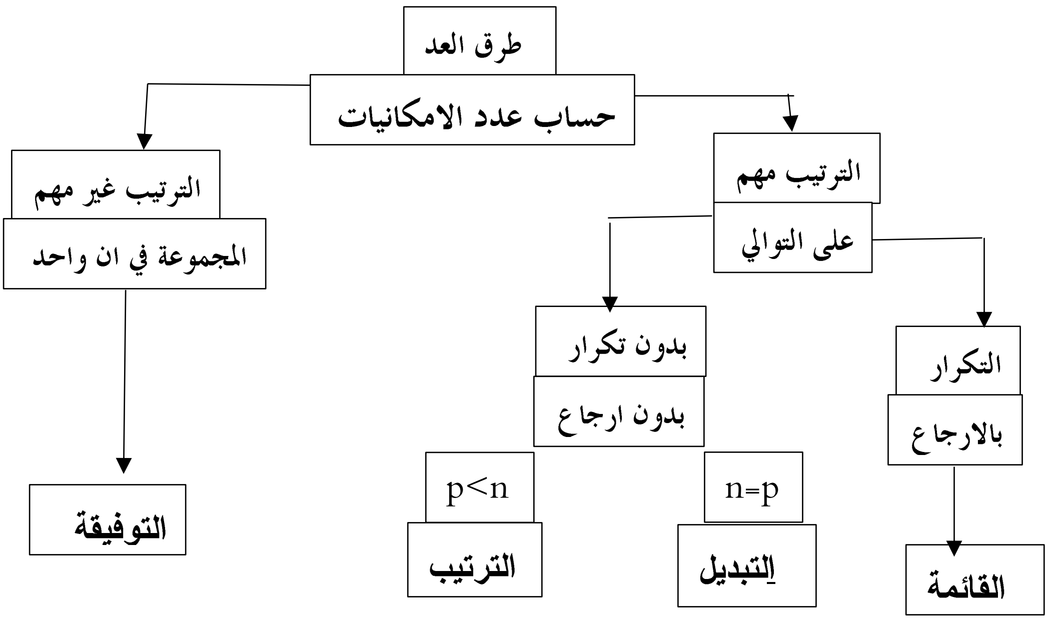
1.ملخص وصف الاحداث ورموزها

الرموز	وصف الحدث
المجموعة الجزئية A, B,C من فضاء العينة Ω	الاحداث A,B,C
$\bar{A}$	عدم وقوع الحدثA
$A \cup B$	وقوع A او B تو كلاهما
$A \cap B$	وقوع A و B معا
$A = \Omega$	A حدث اكيد
$A = \phi$	Aحدث مستحيلا
$(A \cap B) = \langle \phi \rangle$	A وBحادثان متنافيان

2.ملخص شروط تطبيق طرق العد

	تشكيل الاعداد	تشكيل اللجان	السحب	المجموعات
قائمة	الأرقام يمكن ان تتكرر	//////	على التوالي مع الارجاع	////
ترتيبية	الأرقام لا تتكرر	المهام محددة	على التوالي بدون ارجاع	/////
توفيقة	/////	المهام غير محددة	في ان واحد	المجموعات الجزئية

3. شكل يبين شروط تطبيق طرق العد



4.ملخص تعاريف طرق العد

القوائم	الترتيبات	التبديلات	التوفيقات
نسمي قائمة ذات p عنصرا من المجموعة الكلية ذات عنصر كل متتالية مرتبة من p عنصرا من عناصر المجموعة الكلية.	نسمي ترتيبة ذات p عنصرا من عنصر كل قائمة ذات p عنصرا من n عنصرا متمايزة مثنى مثنى.	نسمي تبديلة ذات عنصر كل ترتيبة ذات عنصر من المجموعة الكلية ذات n عنصر.	نسمي توفيقة ذات p عنصرا من المجموعة الكلية ذات n عنصرا كل مجموعة جزئية ذات p عنصرا من المجموعة الكلية.
n^p	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$n!$	$c_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

الفصل الثاني

نظرية الاحتمالات

تبرز اهمية دراسة نظرية الاحتمالات باعتبارها الاساس لما يطلق عليه الاحصاء الاستدلالي. على اعتبار ان هدف الباحث منصبا بالأساس على دراسة المجتمع الاحصائي ولكن لظروف عديدة منها محدودية الوقت والتكلفة، يلجأ الباحث الى اختيار عينات احتمالية لجمع المعلومات، ثم يعمم نتائجه على المجتمع. وكلمة الاحتمال من التعبيرات الشائعة التي نستعملها في حياتنا اليومية. مثلا احتمال سقوط المطر غدا، ولا شك ان هناك حاجة الى وضع مقاييس عددية. والعلم الدي يبحث عن هذه المقاييس وعلاقتها ببعضها البعض وتطبيقاته في مختلف المجالات هو نظريات الاحتمالات. قبل تطرق في تفاصيل لنظرية الاحتمالات سنقوم بتناول مفاهيم اساسية ذات صلة بالموضوع.

1. المفاهيم الاساسية عن المجموعات

المجموعة:_هو تجمع أي عدد من العناصر المحددة التي تشترك بصفة ما وتمثل المجموعة A,B

اما عناصر المجموعة تكون على الشكل التالي:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$B = \{P, F\}$$

المجموعة الخالية: هي المجموعة التي لا يوجد فيها عناصر مطلقا ويرمز لها $\varnothing$

المجموعة الكلية: هي المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر ويرمز لها Ω

اتحاد المجموعات : هي المجموعة التي تحتوي على مجموعة العناصر الموجودة في A او Bاو كليهما ويرمز للاتحاد بالرمز $(\cup)$

تقاطع المجموعات: هي المجموعة التي تحتوي على العناصر المشتركة بين المجتمعين A وb ويرمز للتقاطع بالرمز $(\cap)$

تساوي المجموعات: نقول ان المجموعة A والمجموعة B متساويين اذا احتوت المجموعتان على نفس العناصر.

المجموعات المنفصلة: هي المجموعات التي تقاطعها المجموعة الخالية.

2.: تعريف التجربة والحدث

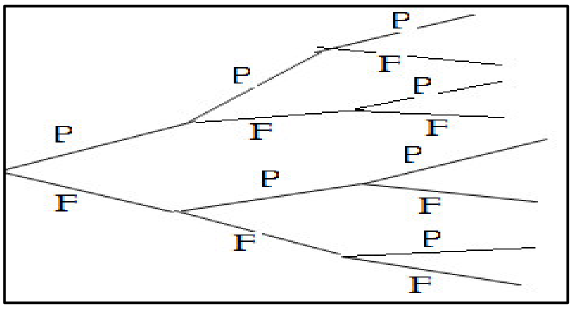
التجربة: كمصطلح تعرف التجربة على انها تجربة عشوائية أي كل تجربة لم تكن نتيجتها النهائية معروفة مسبقا بشكل مؤكد.

مثال(24):

عند رمي قطعة نقود، فان النتيجة لا بد ان تكون الصورة او الكتابة، ولكن لا نعرف ما سيظهر الصورة او الكتابة في رمية معينة وبصورة مؤكدة.

فضاء العينة: هو مجموعة جميع النتائج المتوقع حدوثها عند اجراء تجربة عشوائية ما. مثل اوجد عند رمي قطعة نقود؟ فراغ العينة يتكون من عنصرين الصورة والكتابة. وكذلك عند القاء ثلاث قطع نقود متمايزة اكتب فراغ العينة؟

الطرق التي نستعين بها لتوضيح فضاء النواتج هي الشجرة البيانية، وتكون كما يلي:



يلاحظ ان عدد عناصر فضاء العينة هو عدد النواتج للقطعة الأولى مضروب في عدد النواتج للقطعة الثانية مضروب في عدد النواتج للقطعة الثالثة أي $2^3 = 8$

$$\Omega = \{(PPP),(PPF),(PFP),(PFF),(FPP),(FPF),(FFP),(FF\,F)\}$$

مثال(25):

كيس بثلاث كرات حمراء وبيضاء وخضراء سحبت كرتين الواحدة بعد الأخرى بالإرجاع. اكتب فضاء العينة وعدد عناصره؟

نرمز للألوان كما يلي: $\Omega = \{R, B, V\}$

في كل محاولة نسحب كرة ونسجل لونها ونعيدها الى الصندوق، ثم نسحب كرة ونسجل لونها وهكذا. التجربة هي سحب كرتين مع الارجاع.

$$\Omega = \{(RR),(RB),(RV),(BR),(BB),(BV),(VR),(VB),(V\,V)\}$$

الحدث:

يقال ان حدثا ما قد وقع إذا كانت عناصر هذا الحدث من عناصر المجموعة التي تعبر عن هذا الحدث. وبمعنى اخر هو اية مجموعة جزئية من فراغ العينة. مثال ذلك: عند رمي زهرة النرد، فان الحصول على اعداد فردية يعتبر حدث.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$A = \{2, 4, 6\}$$

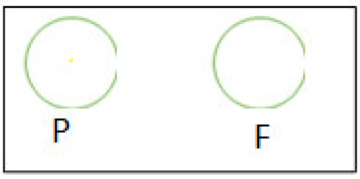
مثال(26):

نرمي زهرة النرد $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$فهي تجربة عشوائية ، فان النتائج الممكنة أي مجموعة الامكانيات او فضاء الامكانيات يرمز لها ب Ω. فان جزء من المجموعة الكلية Ω تعتبر حادثة اي $A = \{1, 2\}$ فهي حادثة. يقال عن الحدث ما قد وقع إذا كانت عناصر هذا الحدث من عناصر المجموعة التي تعبر عن هذا الحدث.

الحوادث المتنافية:

إذا كان لدينا حادثان فانهما يعرفان بانهما متنافيان إذا استحال حدوثهما معا. مثال ذلك عند نرمي زهرة النرد $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$فان الرقم 7 مثلا ليس حادث لا ينتمي الى المجموعة Ω. انها حديثة مستحيلة.

عند رمي قطعة نقود مرة واحدة، يستحيل ظهور الكتابة والصورة معا و كذلك يستحيل الحصول على عدد زوجي وفردي معا عند رمي زهرة النرد فهي حديثة مستحيلة و نرمز لها $\varnothing$



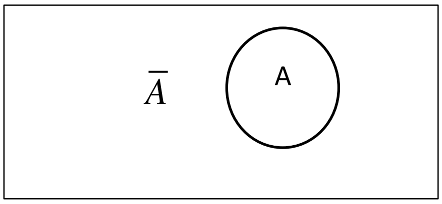
الحوادث المكملة

A الحادثة $\overline{A}$ الحادثة العكسية. مثلا: A يعبر عن عدد زوجي و $\overline{A}$ يعبر عن عدد فردي.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$A = \{2, 4, 6\}$$
$$\overline{A} = \{1, 3, 5\}$$

الحادثة الاكيدة $\Omega : \Omega = \left(A \cup \overline{A}\right)$ الحدث المكمل للحدث.

اذا كان $A, \ \bar{A}$ حدثين متنافيين بالتبادل فان $\left(A \cup \bar{A}\right) = \Omega$، و الشكل يوضح ذلك:



الحادثان المستقلان :

إذا كان لدينا حادثتان، فانه يقال على الحادثتين بانهما مستقلتين، إذا كان حدوث احداهما لا يؤثر على حدوث الاخرى او عدم حدوثها مثال ذلك: عند القاء قطعتين من النقود، فان ظهور الصورة للقطعة الاولى، لا يؤثر على ظهور الصورة على القطعة الثانية.

وفيما يلي نقدم خواص الحوادث:

$\left(A \cap \bar{A}\right)$ فهي حديثة مستحيلة $\left(A \cap \bar{A}\right) = \varnothing$

$\left(A \cup \bar{A}\right)$ فهي حديثة اكيدة

$(A \cup B)$تعني حدوث A او حدوث B او حدوث كليهما، بمعنى اخر، حدوث احداهما على الأقل.

$(A \cap B)$تعني حدوث الحدثين A, B معا.

$\bar{A}$ تعني عدم حدوث الحادثة.

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

توزيع الاتحاد على التقاطع

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

توزيع التقاطع على الاتحاد

$$A \cap \left(B \cup C\right) = \left(A \cap B\right) \bigcup \left(A \cap C\right)$$

3.قياس الاحتمال

إذا كان لدينا الحادثة A وان عدد العناصر هذه الحادثة هو n و N تمثل عدد الحالات الممكنة التي لها نفس الفرصة في الظهور، فان احتمال حدوث الحادثة A يرمز لها P(A) ويعطى بالصيغة التالية:

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

احتمال حدوث الحادث = عدد الطرق الممكنة لحدوث الحادث

عدد الطرق الممكنة لظهور فضاء العينة

مثال(27):

ما هو احتمال ظهور الصورة عند القاء قطعة نقود مرة واحدة؟

الحادثة A هو ظهور الصورة

فضاء العينة:) الصورة والكتابة)

عدد الطرق الممكنة لظهور A هو n=1

عدد الطرق الممكنة لظهور فضاء العينة N=2

اذن احتمال ظهور الصورة $P(A) = \frac{n}{N} = \frac{1}{2} = 0.5$

4.القوانين العامة في نظرية الاحتمالات

نتطرق في هذا الجزء لبعض القوانين العامة ذات صلة بنظرية الاحتمالات، مثل الجمع، التقاطع..الخ.

قانون الجمع:

الاحداث هي مجموعة جزئية من المجموعة الكلية. يمكن اجراء عمليات الاتحاد والتقاطع بين حدثين والاكمال على الاحداث المختلفة لنحصل على احداث جديدة.

إذا كان A و B حدثان في Ω فان $(A \cup B)$معناه وقوع الحدث A و وقوع الحدث B او كليهما.

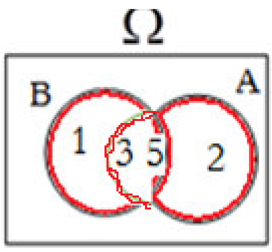
مثال(28):

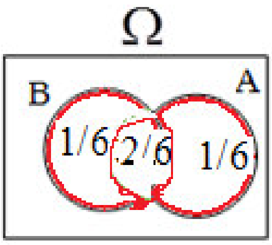
نرمي زهرة النرد A و Bحادثان

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$A = \{1,3,5\}$$
$$B = \{2,3,5\}$$

واضح ان حدث الحصول على A لا ينفي حدث الحصول على B ؟

الحل: نمثل الحادثان A,B في الشكل التالي:





وبالتالي فان:

$$(A \cap B) = \{3,5\}$$
$$P(A \cap B) = \frac{2}{6}$$
$$P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

ملاحظة:

إذا كان حجر نرد متوازن أي النتائج لها نفس الاحتمال. في هذه الحالة نعبر بدلالة P(A) p(B)

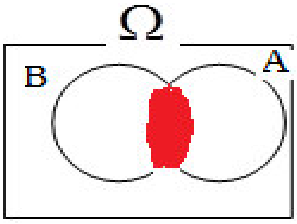
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$$

تعميم قانون جمع الاحتمالات:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

قانون التقاطع:

إذا كان A و B حدثان في Ω فان $(A \cap B)$ معناه وقوع الحدث A و وقوع الحدث B معا أي وقوع الحدثين معا. الجزء المظلل يمثل الحدث $(A \cap B)$. نمثل الحادثان A,B بالمخططات في الشكل التالي:



إذا كان A و B حدثان متنافيان أي $(A \cap B) = \varnothing$ وبالتالي فان

$$P(A \cap B) = P\{\varnothing\} = 0$$

و ترد صيغة جمع الاحداث الى الشكل: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

مثال(29):

عند القاء حجر النرد متوازن، إذا كان الحدث A الحصول على رقم فردي و B الحصول على رقم زوجي. A,B حدثان متنافيان: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

وهذا صحيح لان الاعداد الفردية والزوجية الناتجة من القاء حجر النرد تغطي جميع العناصر في فضاء العينة، ونخلص الى ما يلي من اجل حدثين A,B فان

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال(30):

عند رمي زهرتي النرد ما هو احتمال ظهور الرقم خمسة على وجه زهرة النرد الأولى والرقم ثلاثة على وجه زهرة النرد الثانية؟

الحل:

A الحادثة تمثل ظهور الرقم خمسة على وجه زهرة النرد الأولى: $P(A) = \frac{1}{6}$

B الحادثة تمثل ظهور الرقم خمسة على وجه زهرة النرد الثانية: $P(B) = \frac{1}{6}$

احتمال حدوث الحادثين معا هو: $P(A \cap B)=\frac{1}{6}*\frac{1}{6}=\frac{1}{36}=0.028$

خواص نظرية الاحتمالات:

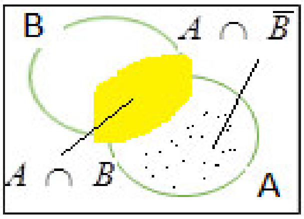
إذا كان حادثان A وB مستقلين فان A $\overline{B}$ و $\overline{A}$ و B مستقلان. اثبت ذلك؟ استنتج $\overline{A},\overline{B}$ مستقلان

النظرية: لأي حادثين A وB فان احتمال حدوث A وعدم حدوث B يساوي احتمال حدوث A مطروحا منه احتمال حدوث A وB معا. $P(A \cap \overline{B})=P(A)-P(A \cap B)$

نبرهن A $\overline{B}$ مستقلان :

$$P(A \cap \overline{B})=p(A-p(A \cap B))=p(A)-p(A \cap B)$$
$$=p(A)-p(A)*p(B)=p(A)*p(1-p(B))=p(A)*p(\overline{B})$$

نوضح ذلك بشكل فيين :



__مثال(31):__

إذا كان احتمال نجاح الطالب A في الإحصاء هو 1/2و احتمال نجاح الطالبين A,B في نفس المقياس هو 1/3،

المطلوب: جد احتمال نجاح الطالب A ورسوب الطالبB؟

__الحل:__

احتمال نجاح الطالب A هو $P(A)=\frac{1}{2}$ و احتمال نجاح الطالب A,B هو $P(A \cap B)=\frac{1}{3}$

المطلوب هو إيجاد : $P(A \cap \overline{B})$

حسب النظرية نحصل على ما يلي: $P(A \cap \overline{B})=P(A)-P(A \cap B)$

$$P(A \cap \overline{B})=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=0.17$$

نبرهن $\overline{A}$ و B مستقلان

$$p\left(\bar{A}\cap B\right)=p\left(B-P\left(A\cap B\right)\right)=$$
$$p\left(B\right)-p\left(A\right)*p\left(B\right)=\left(1-p\left(A\right)\right)*p\left(B\right)=p\left(\bar{A}\right)*p\left(B\right)$$

تستنتج $\bar{A},\bar{B}$ مستقلان

$$p\left(\bar{A}\cap\bar{B}\right)=p\left(\bar{A}-\bar{A}\cap B\right)=p\left(\bar{A}\right)-p\left(\bar{A}\cap B\right)=$$
$$=p\left(\bar{A}\right)-p\left(\bar{A}\right)*p\left(B\right)=p\left(\bar{A}\right)*\left(1-p\left(B\right)\right)=p\left(\bar{A}\right)*p\left(\bar{B}\right)$$

الفرضيات الهامة للاحتمال:

$$0\le p\le 1$$
$$p\left(\varnothing\right)=0$$
$$p\left(\Omega\right)=1$$
$$p\left(\bar{A}\right)=1-p\left(A\right)$$
$$p\left(A\cup B\right)=p\left(A\right)+p\left(B\right)-p\left(A\cap B\right)$$

1.4.الاحتمال الشرطي

ان دراسة الاحتمال الشرطي تعني إيجاد احتمالات حوادث معينة إذا علم تحقق حوادث أخرى وهذا يعني حساب احتمال حادث ما إذا علم حدوث حادث اخر. مثلا إذا كان A,B حادثتان ، فان احتمال حدوث الحادثة A علما بحدوث الحادثة B يسمى الاحتمال الشرطي، ويرمز له $P\left(A/B\right)$ و يعرف بالصيغة الاتية: $P\left(A/B\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}$ بحيث $P\left(B\right)\neq 0$

<u>مثال(32):</u>

إذا كان احتمال نجاح الطالب A في الإحصاء هو 1/2و احتمال نجاح الطالبين A,B في نفس المقياس هو 1/3،

المطلوب: جد احتمال نجاح الطالب A علما ان الطالبB قد نجح؟

<u>الحل:</u>

احتمال نجاح الطالب A هو $P\left(A\right)=\frac{1}{2}$ و احتمال نجاح الطالب A,B هو $P\left(A\cap B\right)=\frac{1}{3}$

فيكون احتمال نجاح الطالب B علما ان الطالبA قد نجح هو: $P\left(B/A\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(A\right)}$

$$P\left(B/A\right)=\frac{1/3}{1/2}=\frac{2}{3}=0.67$$

مثال(33):

يملك محمد سيارتين A,B و يجد صعوبة في تشغيلهما صباحا بحيث ان احتمال ان تشتغل السيارتين معا هو 0.1 واحتمال ان تشتغل B ولا تشتغل A هو 0.2 اما احتمال ان لا تشتغل أي من السيارتين هو 0.4. اوجد ما يلي:

1. احتمال تشغيل السيارة A؟
2. احتمال تشغيل السيارة A علما ان السيارة B قد اشتغلت؟
3. احتمال تشغيل السيارة B علما ان السيارة A لم تشتغل؟

الحل:

لدينا حسب المعطيات ما يلي: $P(A \cap B) = 0.1, P(B \cap \bar{A}) = 0.2, P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.4$

السؤال الأول: احتمال تشغيل السيارة A هو $P(A) = 0.4$

السؤال الثاني:

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.3} = 0.33$$

السؤال الثالث:

$$P(B / \bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0.2}{0.6} = 0.33$$

مثال(34):

إذا كان لدينا مجموعة من الأشخاص مقسمين حسب الجنس ونوع الدم. حسب الجدول ادناه

نوع الدم	ذكر	أنثئ	المجموع
O	100	100	200
A	20	20	40
AB	30	30	60
المجموع	150	150	300

1. ماهو احتمال اختيار أحد الذكور اذا علم ان نوع دمه هو O؟
2. ما هو احتمال اختيار احدى الاناث اذا علم ان نوع دمها هو A ؟

الحل:

السؤال الأول:

احتمال ان يكون نوع دمه O هو 200/300=0.67

احتمال ان يكون ذكر نوع دمه O هو 100/300= 0.33

احتمال ان يكون ذكر إذا علم ان نوع دمه O هو 0.5 =0.33/0.67

السؤال الثاني:

احتمال اختيار شخص من نوع دمه A هو 40/300=0.13

احتمال اختيار احدى الاناث ونوع دمها A هو 0.067 =20/300

احتمال اختيار احدى الاناث إذا علم ان نوع دمها A هو 0.5=0.067/0.13

الحوادث المستقلة

عرفنا في الفقرة السابقة، الاحتمال المشروط لوقوع الحدث A علما ان الحدث B قد وقع فعلا بالشكل التالي: بحيث $P(B) \neq 0$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

يمكن صياغة علاقة الاحتمال المشروط بالشكل التالي: $P(A \cap B) = P(A/B) * P(B)$

وتدعى هذه العلاقة قانون جداء الاحتمالات.

يكون الحادثان مستقلان إذا كان حدوث احداهما لا يؤثر في احتمال حدوث الثني. إذا كانت لدينا الحادثتين A,B، يقال ان الحادثتين مستقلتين إذا تحققت واحدة فقط من العلاقات التالية:

$$P(A/B) = P(A)$$
$$P(B/A) = P(B)$$
$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

نوضح ذلك بتجربة، مثلا يوجد في صندوق 30 كرة منها 10 سوداء،5 حمراء. نسحب كرتين بالرجاع، ما هو احتمال الحصول على كرتين حمراوين؟

نلاحظ ان السحب بالرجاع أي الاحداث مستقلة فسحب أي كرة لا يؤثر على الأخرى وعليه فان الاحتمال للحصول على كرتين حمراوين قانون الاحتمالات.

مثال(35):

ما هو الحصول على كتابتين عند القاء قطعة نقود مرتين متتاليتين؟

الحل:

احتمال الحصول على الكتابة هو ½ واحتمال الحصول على الصورة هو½ ، ويكون المطلوب:

$$P(T \cap T) = P(T) * P(T) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = 0.25$$

مثال(36):

يحتوي صندوق 10 كرات بيضاء وكرتين سوداويتين، سحبت كرتين بطريقة عشوائية من هذا الصندوق، ما هو احتمال ان تكونا ذات لون ابيض في حالة الارجاع وفي حالة عجم الارجاع؟

الحل:

حالة السحب بالإرجاع، حيث ننظر الى لون الكرة تم تعيدها للصندوق

حالة السحب بدون ارجاع، حيث نسحب الكرة ثم نضعها جانبا دون اعادتها للصندوق.

في الحالة الأولى السحب بالإرجاع أي الاحداث مستقلة وبالتلى

نرمز لسحب كرة بيضاء A ونرمز لسحب كرة سوداء B فان احتمال وقوع الحدث الأول والثاني هو:

$$P(A\cap B)=P(A)*P(B)=\frac{10}{12}*\frac{10}{12}=0.69$$

في حالة السحب بدون ارجاع أي الاحداث غير مستقلة وبالتلى

$$P(A\cap B)=P(A)*P(B)=\frac{10}{12}*\frac{9}{11}=0.68$$

مثال(37):

اثبت العلاقة التالية:

$$P(A\cap B)=P(B\cap A)=P\left(A/B\right)*P(B)=P\left(B/A\right)*P(A)$$

الحل:

$$(A\cap B)=(B\cap A)$$
$$P(A\cap B)=P(B\cap A)$$
$$P\left(A/B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$
$$P\left(A/B\right)*P(B)=P(A\cap B)$$
$$P\left(B/A\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$
$$P\left(B/A\right)*P(A)=P(A\cap B)$$
$$P\left(B/A\right)*P(A)=P\left(A/B\right)*P(B)=P(A\cap B)$$

مثال(38):

إذا كانت لدينا الحادثتين A,B بحيث

$$P(A\cup B)=0.8$$
$$P(A)=0.5$$
$$P(\bar{B})=0.6$$

المطلوب: تحديد قيمة الاحتمالات التالية: $P(B),P(\bar{A}\cup\bar{B}),P\left(A/\bar{B}\right),P\left(B/A\right)$

الحل:

$$P(B)+P(\bar{B})=1$$
$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-0.6=0.4$$
$$P(A\cup B)=PA+P(B)-P(A\cap B)$$
$$P(A\cap B)=PA+P(B)-P(A\cup B)=0.5+0.4-0.8=0.1$$
$$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-0.1=0.9$$
$$P\left(A/\bar{B}\right)=\frac{P(A\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{0.4}{0.6}=0.67$$
$$P\left(B/A\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.1}{0.5}=0.2$$

يمكن تعميم قانون جداء الاحتمالات ليشمل n من الاحداث $\{A_1, A_2, A_3, A_4,...A_n\}$ غير مستقلة فيكتب قانون جداء في الاحتمالات كما يلي:

$$P\left(\cap_{i=1}^{n}\right)=P(A_1)P\left(A_2/A_1\right)P(A_3/A_1\cap A_2)...P(A_n/A_1\cap A_2\cap...A_{n-1})$$

اما إذا كانت الاحداث مستقلة فتسبح علاقة الجداء كما يلي: $P\left(\cap_{i=1}^{n}\right)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i)=P(A_1)P(A_2)...P(A_n)$

مثال(39):

ثلاث الات تنتج 35%, 40%, 25%على الترتيب من انتاج المصنع الكلي، علما ان نسبة المعيب من انتاج الات هي: 6%, 3%, 8% على الترتيب من انتاج المصنع الكلي. فادا اختيرت وحدة واحدة من الإنتاج النهائي للمصنع عشوائيا، فما هم احتمال ان تكون هذه الوحدة معيبة؟

الحل:

نفرض الاحتمالات التالية:M_1 سحب وحدة من انتاج الالة الأولى، M_2 سحب وحدة من انتاج الالة الثانية،M_3 سحب وحدة من انتاج الالة الثالثة:

$$P(M_1)=0.35, P(M_2)=0.40, P(M_3)=0.25$$
$$P(M_1)+P(M_2)+P(M_3)=1$$

نفرض D سحب وحدة معيبة: $P\left(D/M_1\right)=0.06, P\left(D/M_2\right)=0.03, P\left(D/M_3\right)=0.08$

باستخدام نظرية الاحتمال الكي نحصل على احتمال ان تكون الوحدة معيبة:

$$P(D)=P(M_1)*P\left(D/M_1\right)+P(M_2)*P\left(D/M_2\right)+P(M_3)*P\left(D/M_3\right)$$
$$P(D)=0.35*0.06+0.4*0.03+0.25*0.08=0.05$$

2.4.نظرية بايز

في نظرية الاحتمالات والاحصاء تصف مبرهنة بايز: احتمال وقوع حدث بناء على المعرفة المسبقة بالظروف التي قد تكون ذات صلة بالحدث. ونظرية بايز هي معادلة رياضية تستخدم في الاحتمالات والإحصاءات لحساب الاحتمالات الشرطية، بمعنى اخر يتم استخدامه لحساب احتمال وقوع حدث على أساس ارتباطه بحدث اخر. وهناك عدة طرق مختلفة لكتابة صيغة نظرية بايز، الشكل الأكثر شيوعا هو:

$$\boxed{P\left({}^{A}/_{B}\right) = \frac{P\left({}^{B}/_{A}\right) * P(A)}{P(B)}}$$

حيث:

A وB هما حدثان $P(B) \neq 0$

$P\left({}^{A}/_{B}\right)$ هو الاحتمال الشرطي للحدث A الذي يحدث باعتبار ان B صحيح ،

$P\left({}^{B}/_{A}\right)$ هو الاحتمال الشرطي للحدث B الذي يحدث باعتبار ان A صحيح ،

P(A) P(B) هي احتمالية A وB تحدث بشكل مستقل عن بعضهما البعض.

يمكن تعميم نظرية بايز الى n احداث المتنافية: إذا كان n من الحوادث المتنافية هي $\{A_1, A_2, A_3, A_4, ..A_n\}$ ضمن فضاء العينة Ω بحيث $\left[A_i \cap A_j = \varnothing, \forall i \neq j, i, j = 1, 2, ...n\right]$ وان فضاء العينة هو $\left[\Omega = A_1, A_2, A_3, A_4, ...A_n\right]$ واذا كانت الحادثة B معرفة على نفس فضاء العينة Ω وان جميع الاحتمالات الشرطية معلومة:

$$\left[\frac{P\left({}^{B}/_{A_j}\right) * P\left(A_j\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left({}^{B}/_{A_i}\right) * P\left(A_i\right)}\right]$$

مثال(40):

مكتب محامي به 3 سكرتيرات لطباعة ما يلزم المكتب من قضايا حيث تطبع السكرتيرة الأولى (A) 20% من قضايا المكتب، والسكرتيرة الثانية (B) 30% من قضايا المكتب، والسكرتيرة الثالثة (C) 50% من قضايا المكتب على التوالي، فاذا كان احتمال وجود خطاء مطبعي ونرمز له ب F في احد القضايا طبعتها السكرتيرة الأولى (A) 15% و السكرتيرة الثانية (B) 8%، و والسكرتيرة الثالثة (C) 15%،

صدر عن هذا المكتب في يوم ما قضية بها خطاء مطبعي، فما هو احتمال ان السكرتيرة الأولى (A) هي التي قامت بطباعة هذه القضية؟

الحل:

أولا نتحقق ان مجموع الاحتمالات يساوي واحد

$$P(A)=0.20, P(B)=0.30, P(C)=0.50$$
$$P(A)+P(B)+PC=1$$

نفرض F هو الخطاء المطبعي

$$P\left(F/A\right)=0.15, P\left(F/B\right)=0.08, P\left(F/C\right)=0.15$$

عليه فان احتمال ان يكون الخطاء من السكرتيرة الأولى (A) كالاتي:

$$P\left(A/F\right)=\frac{P\left(F/A\right)*P(A)}{P(A)*P\left(F/A\right)+P(B)*P\left(F/B\right)+P(C)*P\left(F/C\right)}$$
$$P\left(A/F\right)=\frac{0.15*0.20}{0.20*0.15+0.3*0.08+0.50*0.15}=\frac{0.03}{0.129}=0.23$$

مثال(41):

في كلية العلوم الاقتصادية يوجد ثلاثة موظفين لكتابة محاضر الاجتماعات، بحيث يطبع الموظف الأول A %35 و يطبع الموظف الثاني B %25 و يطبع الموظف الثالث C %40 و كانت نسبة الأخطاء و نرمز لها ب F كالتالي: %3 ,%5 ,%9 على الترتيب. سحب محضر بطريقة عشوائية. المطلوب: إيجاد

1. الاحتمال ان يكون المحضر سليم؟
2. الاحتمال ان يكون المحضر به أخطاء؟
3. الاحتمال ان يكون المحضر من الموظف الأول A إذا علمنا المحضر سليم؟

الحل:

السؤال الأول: الاحتمال ان يكون المحضر سليم:

أولا: نتحقق ان مجموع الاحتمالات يساوي واحد

$$P(A)=0.35, P(B)=0.25, P(C)=0.40$$
$$P(A)+P(B)+PC=1$$

نفرض F هو الخطاء

$$P\left(F/A\right)=0.03, P\left(F/B\right)=0.05, P\left(F/C\right)=0.09$$

عليه فان احتمال ان يكون المحضر سليم هو:

$$P(\bar{F})=P(A)*P\left(\bar{F}/A\right)+P(B)*P\left(\bar{F}/B\right)+P(C)*P\left(\bar{F}/C\right)$$
$$P(\bar{F})=0.35*0.97+0.25*0.95+0.4*0.91=0.94$$

السؤال الثاني: الاحتمال ان يكون المحضر به أخطاء؟

$$P(F)=P(A)*P\left(F/A\right)+P(B)*P\left(F/B\right)+P(C)*P\left(F/C\right)$$
$$P(\bar{F})=0.35*0.03+0.25*0.05+0.4*0.09=0.05$$

السؤال الثالث: الاحتمال ان يكون المحضر من الموظف الأول A اذا علمنا المحضر سليم:

$$P\left(A/\bar{F}\right)=\frac{P(A)*P\left(\bar{F}/A\right)}{P(\bar{F})}$$
$$P(\bar{F})=P(A)*P\left(\bar{F}/A\right)+P(B)*P\left(\bar{F}/B\right)+P(C)*P\left(\bar{F}/C\right)$$
$$P(\bar{F})=0.35*0.97+0.25*0.95+0.4*0.91=0.94$$
$$P\left(A/\bar{F}\right)=\frac{P(A)*P\left(\bar{F}/A\right)}{P(\bar{F})}=\frac{0.35*0.97}{0.94}=0.36$$

مثال(42):

ثلاث الات تنتج 25% ,40%, 35% على الترتيب من انتاج المصنع الكلي، علما ان نسبة المعيب من انتاج الات هي: 8%, 3%, 6% على الترتيب من انتاج المصنع الكلي. فادا اختيرت وحدة واحدة من الإنتاج النهائي للمصنع عشوائيا، فما هم احتمال ان تكون هذه الوحدة من انتاج الالة الثانية، ادا علمت ان الوحدة معيبة؟

الحل:

نفرض الاحتمالات التالية: M_1 سحب وحدة من انتاج الالة الأولى، M_2 سحب وحدة من انتاج الالة الثانية، M_3 سحب وحدة من انتاج الالة الثالثة:

$$P(M_1)=0.35, P(M_2)=0.40, P(M_3)=0.25$$
$$P(M_1)+P(M_2)+P(M_3)=1$$

نفرض D سحب وحدة معيبة: $P\left(D/M_1\right)=0.06, P\left(D/M_2\right)=0.03, P\left(D/M_3\right)=0.08$

عليه فان احتمال ان تكون الوحدة معيبة ومن انتاج الآلة الثانية كالاتي:

$$P\left(M_2/D\right)=\frac{P\left(D/M_2\right)*P(M_2)}{P(M_1)*P\left(D/M_1\right)+P(M_2)*P\left(D/M_2\right)+P(M_3)*P\left(D/M_3\right)}$$

$$P\left(M_2/D\right)=\frac{0.03*0.40}{0.35*0.06+0.4*0.03+0.25*0.08}=\frac{0.012}{0.05}=0.24$$

<u>مثال(43):</u>

صندوقان، يحتوي الأول على 5 كرات حمراء و4 كرات خضراء، اما الصندوق الثاني يحتوي على 7 كرات حمراء و3 كرات خضراء. اختير أحد الصناديق عشوائيا، وسحبت منه كرة بطريقة عشوائية. المطلوب:

1. احتمال ان تكون الكرة المسحوبة خضراء؟
2. إذا تم سحب كرة وتبين بانها خضراء، فما هو احتمال ان تكون هذه الكرة من الصندوق الأول؟

<u>الحل</u>

نفرض الحوادث B_1,B_2 التالية تمثل سحب الكرة من الصندوق الأول وسحب الكرة من الصندوق الثاني. $P(B_1)=P(B_2)=\frac{1}{2}$

نفرض الحادثة V تمثل الكرة المسحوبة خضراء.

احتمال سحب كرة خضراء من الصندوق الأول: $P\left(V/B_1\right)=\frac{4}{9}$

احتمال سحب كرة خضراء من الصندوق الثاني: $P\left(V/B_2\right)=\frac{3}{10}$

<u>السؤال الأول</u>: احتمال ان تكون الكرة المسحوبة خضراء نستخدم نظرية الاحتمال الكلي:

بتطبيق القانون: $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)*P\left(A/B_i\right)$

$$P(V)=P(B_1)*P\left(V/B_1\right)+P(B_2)*P\left(V/B_2\right)$$
$$P(V)=\frac{1}{2}*\frac{4}{9}+\frac{1}{2}*\frac{3}{10}=0.37$$

السؤال الثاني: احتمال ان تكون الكرة من الصندوق الأول علما انها خضراء:

$$P\left(B_1/V\right)=\frac{P\left(V/B_1\right)*P(B_1)}{P(B_1)*P\left(V/B_1\right)+P(B_2)*P\left(V/B_2\right)}$$
$$P\left(B_1/V\right)=\frac{0.22}{0.37}=0.59$$

مثال(44):

لدينا خمسة صناديق متماثلة، يحتوي الصندوق الأول والثاني على كرتين بيضاء وثلاث درات حمراء في كل منها، وفي الثالث والرابع صندوق فيه كرة بيضاء وأربع كرات حمراء في كل منها. اما صندوق الخامس يحتوي على أربع كرات بيضاء وكرة حمراء. نسحب كرة وبطريقة عشوائية من أحد الصناديق الخمسة فكانت بيضاء. ما هو احتمال ان تكون من الصندوق الخامس؟

الحل:

نضع $i=1,2,3,4,5$ تمثل عدد الصناديق، نرمز Bi الحدث سحب كرة من الصندوق، و A الحدث أي الكرة المسحوبة من الصندوق بيضاء ولذاك لدينا:

$$P(A/B_1)=P(A/B_2)=\frac{2}{5},P(A/B_3)=P(A/B_4)=\frac{1}{5},P(A/B_5)=\frac{4}{5}$$
$$P(B_5/A)=\frac{P\left(A/B_5\right)*P(B_5)}{\sum_{i=1}^{5}P\left(A/B_i\right)*P(B_i)}=\frac{\frac{4}{5}*\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}\left[2\left(\frac{2}{5}\right)+2\left(\frac{1}{5}\right)+2\left(\frac{4}{5}\right)\right]}=0.4$$

الفصل الثالث

المتغيرات العشوائية

سبق وتم عرض وتوضيح في الفصل الأول والثاني عن المفاهيم الأساسية لنظرية الاحتمالات مع تقديم عدة امثلة، وفي هذا الفصل سنحاول تعبير عن نتائج التجربة العشوائية بمقياس عددي يطلق عليه اسم المتغير، بما ان القيمة العددية لهذا المتغير غير مؤكدة تسمى بالمتغير العشوائي، وهذه القيم مرتبطة بقيم احتمالية معينة مما يسمى بالتوزيع الاحتمالي. وهناك نوعين من المتغيرين: المنفصل والمستمر. وهذا ما سيتم عرضه في هذا الفصل.

1.المفاهيم الاساسية للمتغير العشوائي

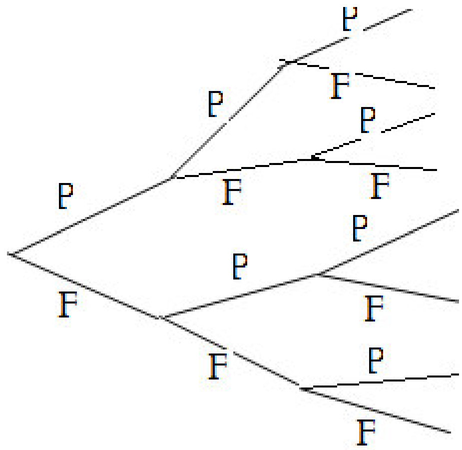
يعرف المتغير على انه الصفة التي تأخذ قيما مختلفة سواء كانت هذه الصفة تتعلق بالماكن او الأشخاص او الأشياء، كطول الطالب، وزنه او دراجة الحرارة....الخ. المتغير العشوائي فهو يستخدم في الإحصاء حيث يشير الى نتيجة رقمية نحصل عليها من اجراء تجربة ما.

مثال(45):

نرمي قطعة نقود ثلاث مرات، واضح القيم التي يأخذها المتغير العشوائي والتي تمثل العدد الكلي من الصور التي يمكن الحصول عليها، ثم وضح دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي؟

الحل:

قيمة المتغير العشوائي	فضاء العينة
0	PPP
1	PPF
1	PFP
2	PFF
1	FPP
2	FPF
2	FFP
3	FFF



نلاحظ ان المتغير العشوائي يمكن ان يأخذ واحدة من القيم 0,1,2,3

السؤال الثاني: إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي: اعتمادا على القيم الأربع للمتغير العشوائي وما يقابل كل منها من احداث يمكن تحديد دالة التوزيع الاحتمالي:

قيمة المتغير العشوائي	0	1	2	3	المجموع
فضاء العينة	PPP	PPF,PFP,FPP	PFF,FPF,FFP	FFF	8
الاحتمال	1/8	3/8	3/8	1/8	1

$$P(x=0)=\frac{1}{8}, P(x=1)=\frac{3}{8}, P(x=2)=\frac{3}{8}, P(x=3)=\frac{1}{8}$$

نلاحظ ان مجموع الاحتمالات في التوزيع الاحتمالي يجب ان تساوي واحد، ان تحديد التوزيع الاحتمال يكمل عملية وصف ما يدعى بالنموذج الاحتمالي، والشكل يوضح ذلك:

تجربة معينة	تعريف النتائج	فضاء العينة	تخصيص رقم لكل نتيجة	المتغير العشوائي	تحديد الاحتمال لكل قيم

تعريف المتغير العشوائي:

المتغير العشوائي هو دالة لها قيمة عددية وحيدة تحددها تجربة عشوائية. إذا كان اهتمامنا ينصب على احدى خواص المجتمع ولتكن درجات الطلبة في نهاية السداسي الأول من الدراسة، فانه يمكن النظر الى تلك الدرجات، على انها متغير عشوائي. هذا المتغير يأخذ قيمة عددية معينة، من الصفر الى عشرين، ويعتبر دالة لأنه يعرف علاقة تناظرا بين مفردات فيئة معينة وبين مفردات فيئة أخرى أي الدرجات الممكنة من الصفر الى عشرين. لكل طالب فان المتغير العشوائي يعرف نتيجة واحدة وواحدة فقط. مع الملاحظة ان أكثر من طالب قد يحصل على نفس الدراجة.

فالمتغير العشوائي مرتبط بدالة تسمى بدالة الاحتمال، وهناك نوعان رئيسيان من داول الاحتمال: دالة الاحتمال للمتغير المنفصل ودالة الاحتمال للمتغير المتصل.

أنواع المتغير العشوائي: المتغير العشوائي قد يكون منفصل او متصل.

المتغير العشوائي المنفصل او المتقطع:

يقال للمتغير العشوائي الذي مداه مجموعة محدودة او قابلة للحصر من الاعداد الحقيقية انه متغير عشوائي منفصل ونوضح ذلك بأمثلة.

عدد القاء قطعة نقود مرتين متتاليتين فان كل النتائج التي يمكن ان نحصل عليها في الرميتين هي فضاء العينة اما للحصول على الوجه أي الحدث. أولا نحدد النواتج الممكنة عند القاء قطعة نقود مرتين، ثم نحدد قيمة المتغير الذي يمثل ظهور الوجه.

$$\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$$
$$x = (PP) = 0$$
$$x = (PF), x = (PF) = 1$$
$$x = (PF) = 2$$
$$x = \{0, 1, 2\}$$

وكل قيمة من هده القيم يناظرها احتمال معين يمكن تحديده من احتمالات حدوث عناصر فراغ العينة المناظرة لتلك قيمة، والمتغير العشوائي يمكن ان يأخذ القيمة صفر باحتمال يساوي ¼ والقيمة واحد باحتمال ½ والقيمة اثنان باحتمال ¼.

المتغير العشوائي المستمر او المتصل: هو ذلك المتغير الذي مداه فترة من الاعداد الحقيقية، مفتوحة او مغلقة وهي مجموعة قابلة للحصر من الاعداد الحقيقية. مثل اوزان الطلبة، الدخل الشهري لمجموعة من العائلة،...الخ. والدالة التي تربط المتغير العشوائي المتصل هي دالة الكثافة الاحتمالية. وهي دالة غير سالبة لجميع القيم، والمساحة تحت المنحنى تساوي واحد.

المتغير العشوائي المتصل او المستمر

المتغير العشوائي المستمر يمثل الظواهر المقيس التي تعتمد على القياس والذي يأخذ عددا لا نهاية من القيم فيما بين أي قيمتين، فاذا تم توقيع النقط المختلفة في صورة المنحنى، فان دالة هذا المنحنى تعرف بانها توزيع احتمالي مستمر. حتى يعتبر منحنى ما او دالة ما ممثلا مناسبا لدالة توزيع احتمالي يجب ان يتوفر ما يلي:

1. فيما بين أي قيمتين من قيم المتغير العشوائي فان قيمة دالة الاحتمال لا يمكن ان تكون صفرا أي : $f(x) \geq 0$
2. مجموع المساحة تحت منحنى دالة الاحتمال تساوي واحد ويطلق عليها بدالة كثافة الاحتمال:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

2.دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل

دالة الاحتمال او التوزيع الاحتمالي للمتغير المنفصل x هي دالة يرمز لها ب p(x) وتعطى جميع القيم التي يمكن ان يأخذها المتغير واحتمالات اخذه لهذه القيم، ولهذا فان دالة الاحتمال يجب ان تحقق:

$$P(x) \geq 0$$

$$\sum P(x) = 1$$

وعادة يمكن ان تمثل في شكل جدول او رسم بياني، كما نحتاج أحيانا لمعرفة احتمال ان تكون قيمة المتغير x اقل من او تساوي قيمة معينة.

مثال(46):

في تجربة رمي قطعة نقود مرتين ونفرض ان x تمثل عدد الصور، اوجد قانون التوزيع الاحتمالي؟

الحل:

قيمة المتغير العشوائي	فصاء العينة
0	PP
1	PF
1	FP
2	FF

$$P(x=0) = P(PP) = P(P) * P(P) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

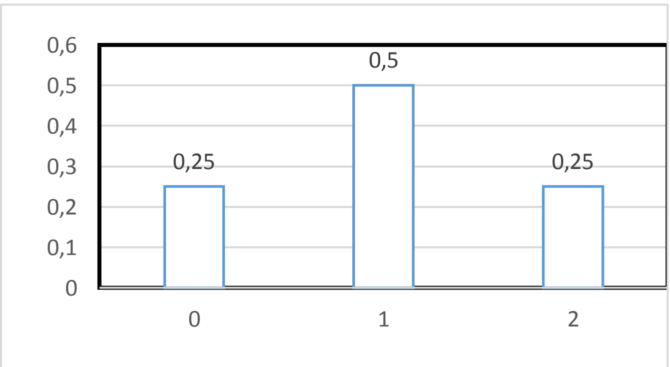
$$P(x=1) = P(PF + FP) = P(P) * P(F) + P(F) * P(P) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

$$P(x=2) = P(FF) = P(F) * P(F) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

التوزيع الاحتمالي يكون على شكل جدول:

المتغير العشوائيx	0	1	2	المجموع
الاحتمالx	1/4	2/4	1/4	1

التمثيل البياني يأخذ الشكل التالي:

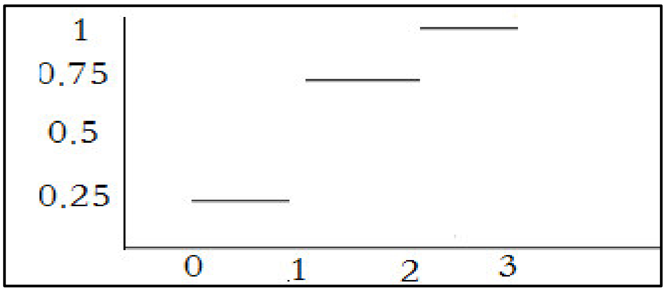


دالة التوزيع المتجمع والتي تعطي الاحتمالات$p(X<x)$ حيث ان x_i تمثل أي قيمة من قيم المتغير x في فضاء العينة وان دالة التوزيع المتجمع هو:

$$F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ 0.25, 0\le x<1\\ 0.75, 1\le x<2\\ 1, x\ge 2\end{cases}$$

x	F(x)
0	0.25
1	0.75
2	1

التمثيل البياني لدالة التوزيع المتجمع هو:



نلاحظ من خلال التمثيل فقرات غير متصلة.

3.دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي المتصل

إذا كان x متغيرا متصلا فان الدالة f(x) التي $f(x)\ge 0: \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

ان مجموع المساحة تحت المنحنى تساوي واحد بحيث ان المساحة المحصورة بين a,b من منحنى دالة الاحتمال هو:

$\int_a^b f(x)dx = P(b<x<a)$ تسمى بدالة كثافة الاحتمال للمتغير x

دالة التوزيع للمتغير المتصل

إذا كان x متغيرا متصلا يأخذ قيمة في الفترة $(\pm\infty)$ $P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz$

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

خواص دالة الكثافة:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(-\infty) = 1$$

$$\int_x^x f(t)dt = 0$$

مثال(47):

احسب قيمة الاحتمال المحصورة ما بين القيمتين لدالة الكثافة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - -\frac{1}{8}x, 0 < x < 4 \\ 0, x \notin [0,4] \end{cases}$$ احسب الاحتمال التالي:

$$P(2 < x < 4) = ?$$

الحل:

$$P(2 \le x \le 4) = \int_2^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}x\right)dx = \frac{1}{2}\int_2^4 dx - \frac{1}{8}\int_2^4 xdx$$

$$P(2 \le x \le 4) = \frac{1}{2}[x]_2^4 - \frac{1}{8}\left[x^2\right]_2^4 = \frac{1}{2}[2] - \frac{1}{8}\left[\frac{3}{4}\right] = \frac{1}{4}$$

مثال(48):

ليكن لدينا متغيرا عشوائيا خاضعا لقانون التوزيع الاحتمالي المعرف بالعلاقة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} ax, 0 < x < 1 \\ 0, x \notin [0,1] \end{cases}$$

المطلوب: إيجاد قيمة الثابت؟

الحل:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 a * xdx = a\int_0^1 xdx = a\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 \Rightarrow a = 2$$

مثال(49):

نفرض متغير عشوائي متصل توزيعه هو:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + k, 0 < x < 3 \\ 0, x \notin [0,3] \end{cases}$$

احسب قيمة الثابت ثم احسب الاحتمال المحصور بين 1,2

الحل:

$$\int_0^3 f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^3 \left(\frac{1}{6}x + k\right)dx =$$
$$\int_0^3 \frac{1}{6}xdx + \int_0^3 kdx = \frac{1}{6}\int_0^3 xdx + k\int_0^3 dx =$$
$$\frac{1}{6}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 + k\left[x^0\right]_0^3 = \frac{1}{6}*\frac{9}{2} + 3k = \frac{3+12k}{4} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{12}$$

الاحتمال المحصور بين قيمتين هو:

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{1}{6}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \frac{1}{12}[x]_1^2 = \left(\frac{1}{6}*\frac{4}{2} - \frac{1}{6}*\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{12}(2-1) = \frac{1}{3}$$

4.تابع التوزيع للمتغير العشوائي

كما رأينا سابقا فان قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي يبين توزيع الاحتمالات على الفئات المختلفة الا اننا نحتاج أحيانا الى معرفة مجموع الاحتمالات التي تقل قيمتها أحيانا عن قيمة معينة او تزيد عنها للمتغير العشوائي x، ومن اجل ذلك نقوم باستخراج ما يسمى بتابع التوزيع ويرمز له ب$F(x)$ ونميز حالتين للمتغير العشوائي المنفصل والمتصل.

1.4.تابع التوزيع للمتغير العشوائي المنفصل

إذا كان x متغير منفصل وكانت قيمة xi مرتبة ترتيبا تصاعديا وكان قانون توزيعه $f(x)$ محددا، يمكننا ان نحدد تابع التوزيع كما يلي:

$$P(X \le x_i) = F(x)$$
$$P(x_a \le x \le x_b) = F(x_b) - F(x_a)$$

مثال(50):

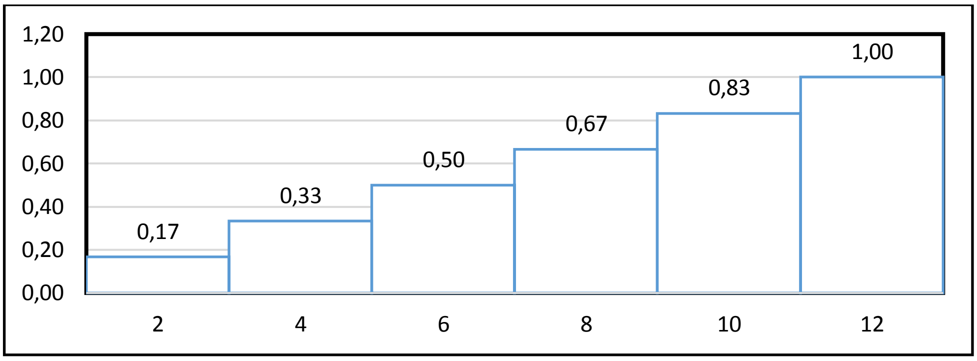
لنأخذ تجربة رمي قطعة نرد. المطلوب: ادراج جدول قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x وكذا تابع التوزيع المقابل. ارسم بيانيا تابع التوزيع.

الحل:

نقوم بإدراج الجدول الاحصائي:

6	5	4	3	2	1	xi
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	Pi
6/6	5/6	4/6	3/6	2/6	1/6	F(x)

التمثيل البياني:



ملاحظة: نلاحظ من خلال هذا الرسم البياني بان ارتفاع كل درجة من هذا المدرج تساوي 1/6 والتي هي عبارة عن احتمال كل قيمة ممكنة من قيم x.

مثال(51):

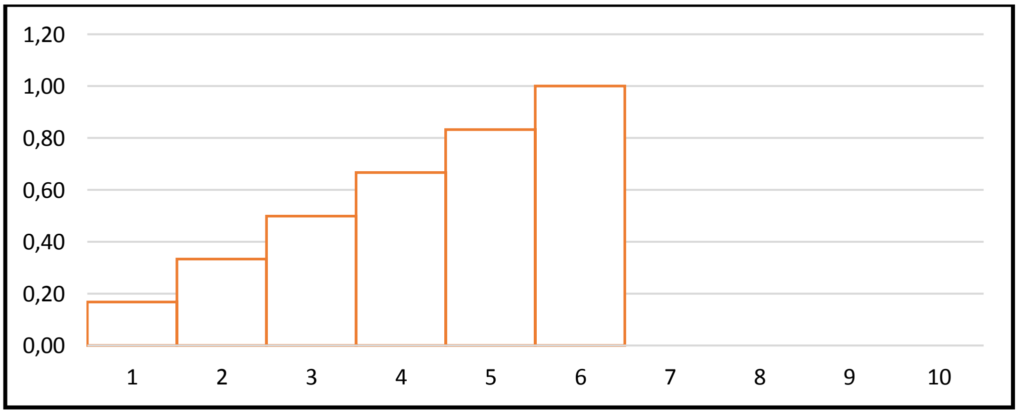
نفرض ان x يمثل ضعف الرقم الذي يظهر عند القاء حجر النرد. المطلوب ادراج جدول قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x وكذا تابع التوزيع المقابل ثم ارسم المنحنيات المقابلة.

الحل:

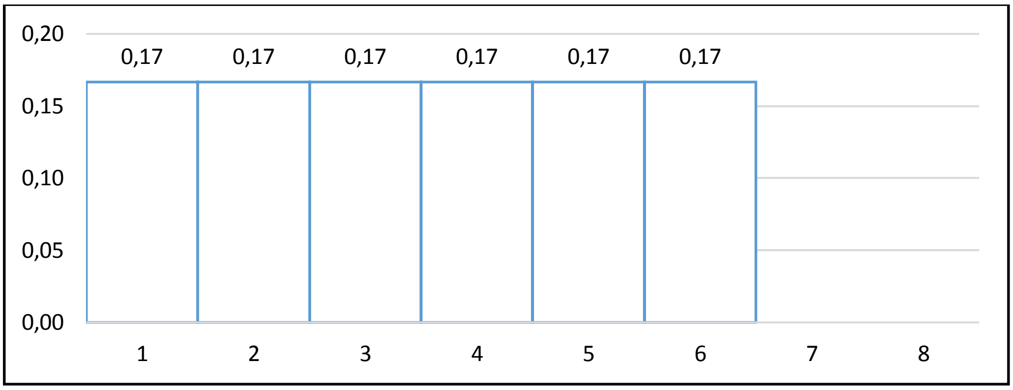
نقوم بإدراج الجدول الاحصائي:

المتغير العشوائي	xi	2	4	6	8	10	12
الاحتمال	pi	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
تابع التوزيع	F(x)	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6

المنحنى لتابع التوزيع F(x)

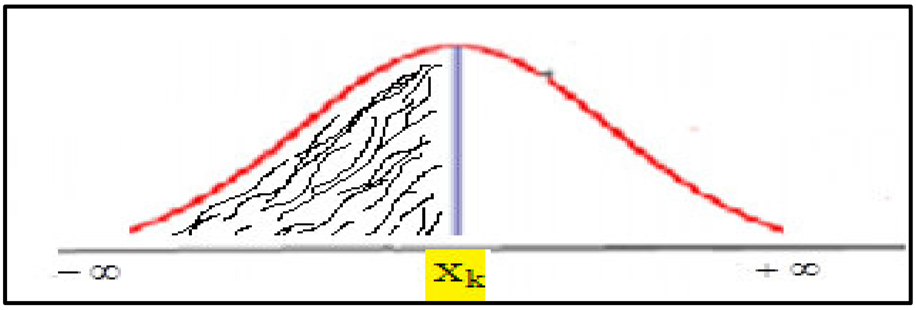


المنحنى لتوزيع الاحتمالي



2.4.تابع التوزيع للمتغير العشوائي المتصل

إذا كان x متغير عشوائي متصل محددا بقانون التوزيع الاحتمالي p(x) يمكننا ان نحدد تابع التوزيع F(x) كما يلي: $P(X \leq x_i) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$



تابع التوزيع :المساحة المضللة في الشكل والواقعة على يسار النقطة x_k

اما إذا أردنا حساب احتمال ان يأخذ المتغير العشوائي قيمتين فان تابع التوزيع يكون كما يلي:

$$P(x_{Inf} \leq x \leq x_{Sup}) = \int_{x_{Inf}}^{x_{Sup}} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x_{Sup}} f(x)dx - \int_{-\infty}^{x_{Inf}} f(x)dx = F(x_{Sup}) - F(x_{Inf})$$

اما إذا أردنا حساب احتمال ان يأخذ المتغير العشوائي قيمة لا تقل عن x_{sup} بعبارة أخرى هو احتمال ان يكون المتغير اكبر تماما من x_{sup} فان:

$$P(x > x_{Sup}) = \int_{x_{Sup}}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx - \int_{-\infty}^{x_{Sup}} f(x)dx = 1 - F(x_{Sup})$$

خواص تابع التوزيع

1. ان تابع التوزيع يحقق دوما العلاقة $F(x) \geq 0$

2. ان تابع التوزيع هو تابع غير متناقص أي إذا كان لدينا $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2)$
3. ان تابع التوزيع عند النقطة $(-\infty)$ يساوي الصفر $F(-\infty)=0$
4. ان تابع التوزيع عند النقطة $(+\infty)$ يساوي الواحد $F(+\infty)=1$ أي ان هناك احتمال ان يأخذ المتغير اية قيمة محدودة وبالتالي احتمال وقوع حادث اكيد:

$$F(+\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

5. من الخاصية رقم ثلاثة ورابعة نستنتج ان قيمة تابع التوزيع هي غير سالبة ولا تتجاوز الواحد أي: $0 \le F(x) \le 1$

<u>مثال(52):</u>

ليكن لدينا تابع الكثافة : $f(x)\begin{cases} ax^2, a < x < 1 \\ 0, x \notin [0,1] \end{cases}$

المطلوب:

1. حدد المعلم a ومثل دالة الكثافة بيانيا؟
2. احسب قيمة الاحتمال $P\left(x<\frac{1}{2}\right)$ ، و قيمة الاحتمال $P\left(x<\frac{3}{4}\right)$
3. احسب دالة تابع التوزيع ومثلها بيانا؟

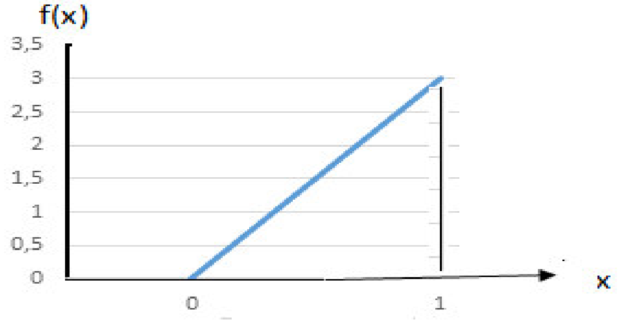
<u>الحل:</u>

السؤال الأول: تحديد المعلم a وتمثيل دالة الكثافة

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 (ax^2)dx = 1$$

$$a\int_0^1 x^2dx = a\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 \Rightarrow a = 3$$

تمثيل دالة الكثافة



السؤال الثاني: نحسب قيمة الاحتمال $P\left(x<\frac{1}{2}\right)$ ، و قيمة الاحتمال $P\left(x<\frac{3}{4}\right)$

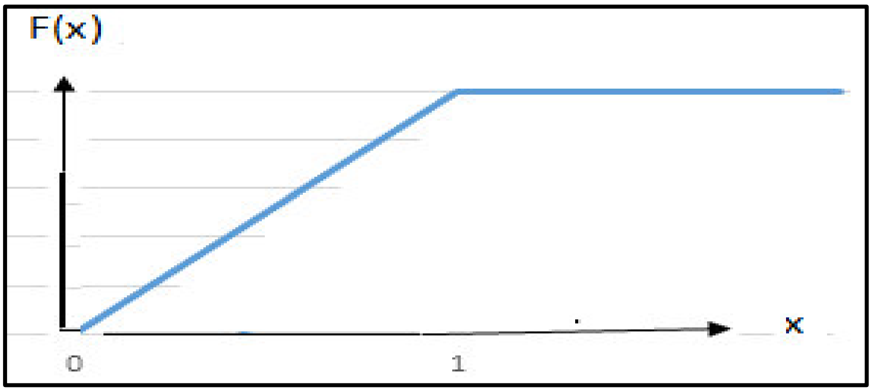
$$P\left(x<\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}} 3x^2dx=3\int_0^{\frac{1}{2}} x^2dx=3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}=0.12$$

$$P\left(x<\frac{3}{4}\right)=\int_0^{\frac{3}{4}} f(x)dx=\int_0^{\frac{3}{4}} 3x^2dx=3\int_0^{\frac{3}{4}} x^2dx=3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{3}{4}}=\frac{27}{64}=0.42$$

السؤال الثالث: حساب دالة تابع التوزيع والتمثيل البياني لهذه الدالة:

$$F(x)\begin{cases}0, x<0\\ x^3, 0\leq x<1\\ 1, x\geq 1\end{cases}$$

التمثيل البياني لدالة التوزيع



5.القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي

التوقع الرياضي: يمثل هذا المفهوم الوسط الحسابي لقيم المتغير العشوائي حيث تستخدم الاحتمالات بدلا من استخدام التكرارات النسبية المشاهدة. فهو المتوسط المرجح لكل قيم المتغير العشوائي وهو أحد المقاييس التي تحدد القيمة التي تتمركز عندها قيم المتغير العشوائي.

1.5.القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي المنفصل

اذا كان المتغير العشوائي منفصلا ويأخذ القيم $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ بدلالة الاحتمال x الذي يأخذ القيم $p(x_1)$, $p(x_2), p(x_3), \ldots p(xn)$ فان القيمة المتوقعة $E(x)$ هي:

$$E(x)=(x_1)P(x_1)+(x_2)P(x_2)+\ldots(x_n)P(x_n)$$
$$E(x)=\sum_{x=i}^{n} x_i P(x_i)$$

2.5.القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي المتصل

إذا كان المتغير العشوائي متصلا فالقيمة المتوقعة هي: $E(x)=\mu_x=\int_{-\infty}^{+\infty} x*f(x_i)dx$

6.التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي

التباين هو احد مقاييس التشتت وهو يقيس مدى تشتت قيم المتغير العشوائي حول وسطه الحسابي ويرمز له ب $(\sigma^2)=V(x)$

1.6.التباين للمتغير العشوائي المنفصل

$$\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(x))^2 P(x_i)$$
$$\sigma^2=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(x_i)-(E(x))^2$$

2.6.التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي المتصل

إذا كان المتغير العشوائي متصلا فقيمة التباين هي:

$$V(x)=\sigma_x^2=\int_{-\infty}^{+\infty}[x_i-E(x)]^2$$
$$V(x)=\sigma_x^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2*f(x_i)dx-(\mu_x)^2$$
$$V(x)=\sigma_x^2=E(x^2)-[E(x)]^2$$

تعريف الانحراف المعياري: هو الجذر التربيعي الموجب للتباين ويرمز له كما يلي: $\sigma_x=\sqrt{V(x)}=\sqrt{\sigma_x^2}$

ملاحظة:

الانحراف المعياري يتميز كمقياس للتشتت بانه يقاس بنفس وحدات المتغير العشوائي سواء كانت هذه الوحدات عبارة عن وحدات طول الطالب، وزن الطالب، نقود...الخ وهو في ذلك مثل الوسط الحسابي.

مثال(53):

إذا كان لينا جدول التوزيع الاحتمالي التالي:

xi	0	1	2
pi	1/4	1/2	1/4

المطلوب: إيجاد الانحراف المعياري للمتغير x

الحل:

لحساب الانحراف المعياري لا بد من ادراج جدول احصائي، فيكون كما يلي:

xi	0	1	2	المجموع
P(X=x)	1/4	1/2	1/4	1
x*p(x)	0	1/2	1/2	1
$x^2p(x)$	0	1/2	1	3/2

من الجدول نستنتج ما يلي:

$$\sum_{i=0}^{2} P(X=x)=1$$
$$\sum x_i * P(x)=E(x)=\mu_x=1$$
$$\sum x_i^2 * P(x)=E(x)^2=\frac{3}{2}$$
$$V(x)=E(x)^2-\left[E(x)\right]^2=\frac{3}{2}-(1)^2=\frac{1}{2}$$
$$\sigma_x=\sqrt{V(x)}=\sqrt{\frac{1}{2}}=0.707$$

خواص التوقع الرياضي:

نفرض a عدد ثابت ولدينا المتغير العشوائي y= ax+b فان التوقع الرياضي للمتغير y هو:

$$E(y)=a*E(x)+b$$

إذا كان لينا المتغيرات x,y فان التوقع الرياضي للمتغيرz هو:

$$Z=ax+by$$
$$E(Z)=a*E(x)+b*E(y)$$

إذا كان a عدد ثابت فان التوقع الرياضي للعدد الثابت هو العدد الثابت $E(a)=a$

اذا كان لدينا x,y متغيرين مستقلين فان التوقع الرياضي للمتغيرين هو:

$$E(x*y)=E(x)*E(y)$$

إذا كانت المتغيرين العشوائية غير مستقلين فان التوقع الرياضي لجدائهما يساوي :

$$E(x*y)=E(x)*E(y)+\operatorname{cov}(x*y)$$

cov (xy) يطلق عليه بالتباين المشترك ويحسب وفق العلاقة التالية:

$$\operatorname{cov}(x,y)=E\left[(x-E(x))(y-E(y))\right]$$

وهو عبارة عن التوقع الرياضي لجداء انحراف كل متغير عشوائي عن توقعه الرياضي وهو يمثل ارتباط عناصر المتغيرات العشوائية مع بعضها البعض وبصورة عامة هناك ثلاث حالات:

عندما تتطور عناصر هذه المتغيرات بالزيادة او النقصان بشكل طردي، فان التباين المشترك لهذه المتغيرات يكون موجبا أي : $\operatorname{cov}(x,y)>0$

عندما يتم هذا التطور بشكل عكسي مثل الاستهلاك والاسعار فان التباين المشترك لهذه المتغيرات يكون سالب أي: $\operatorname{cov}(x,y)<0$

عندما لا يكون عناك أي ارتباط بين المتغيرات العشوائية فان التباين المشترك لهذه المتغيرات يكون صفرا أي: $\operatorname{cov}(x,y)=0$

اذا كان لدينا x,y متغيرين بحيث وهذا يعبر عن وجود استقلالية بين المتغيرات العشوائية.

التوقع الرياضي للتوقع الرياضي يساوي التوقع الرياضي نفسه $E(E(x))=E(x)$

<u>خواص التباين</u>

$$V(c)=0$$

$$V(c)=E\left[c-E(c)\right]^2=E\left[c-E(c)\right]^2=E[c-c]^2=0$$

تباين متغير عشوائي مضروب بعدد ثابت يساوي مربع الثابت مضروب بالتباين المتغير العشوائي:

$$V(c*x)=E\left[c*x-E(c*x)\right]^2=E\left[c*x-cE(x)\right]^2\Rightarrow$$

$$V(c*x)=E\left[c(x-E(x))\right]^2=c^2E\left[x-E(x)\right]^2=c^2V(x)$$

نستنتج من هذا الخواص:

$$V(x+c)=V(x)$$
$$V(x-c)=V(x)$$
$$V(c)=0$$
$$V(x+y)=V(x)+V(y)$$
$$V(cx)=c^2V(x)$$

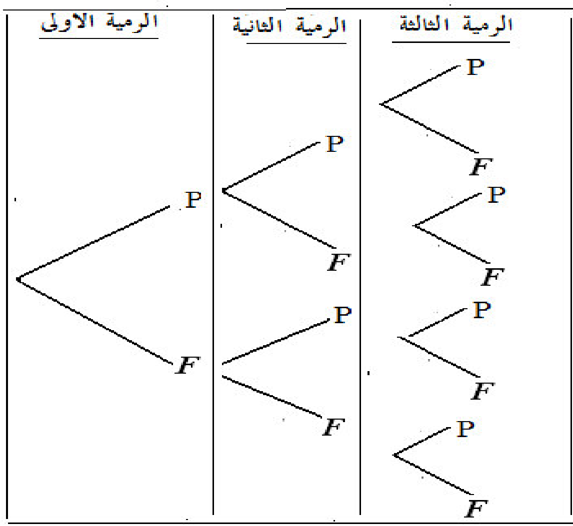
مثال(54):

نفرض شخصان يلعبان لعبة تتمثل في رمي قطعة نقود. الشخص الأول يرمي ثلاث قطع نقدية في دفعة واحدة، فاذا كانت الوجود الثلاث من نفس النوع يأخذ الشخص الأول 50 دج، وان لم تكون ذلك يدفع الشخص الثاني 30 دج. المطلوب:

1. ما هو التوقع ان يربح الشخص الأول؟
2. هل اللعبة عادلة؟

الحل:

عند الحصول الشخص الأول الأوجه الثلاث المتشابهة يدفع الشخص الثاني 50دج، في الحالات الأخرى يدفع الشخص الأول 30دج لشخص الثاني ال يخسر 30دج.



عناصر فضاء العينة	الربح او الخسارة	الاحتمال
PPP	+50دج	1/8
PPF	−30دج	1/8
PFP	−30دج	1/8
PFF	−30دج	1/8
FPP	−30دج	1/8
FPF	−30دج	1/8
FFP	−30دج	1/8
FFF	+50دج	1/8

نقوم بإدراج جدول قانون التوزيع الاحتمالي:

xi	+50	-30
pi	2/8	6/8

السؤال الأول: نحسب التوقع الرياضي

$$E(x) = \sum x_i p_i = 50 * \frac{2}{8} + (-30) * \frac{6}{8} = -10$$

نستنتج ان اللعبة غير عادلة لأنه يخسر في المتوسط 10دج في كل رمية وبالتالي سيكون الربح للشخص الثاني. و لتكن اللعبة عادلة يجب على الشخص الأول ان يأخذ 90دج بدلا من 50دج.

مثال(55):

إذا كان لدينا x,y نفرض ان التوقع الرياضي للمتغير x هو5 ما هو التوقع الرياضي للمتغير y اذا افترضنا المعادلة التالية: y = 4*x – 3

الحل:

$$y = 4*x - 3$$
$$E(y) = E(4x-3) = 4*E(x) - 3 = 4*5 - 3 = 17$$

مثال(56):

حسب الجدول التالي احسب التوقع الرياضي والتباين؟

xi	8	12	16	20	24
pi	1/8	1/6	3/8	1/4	1/12

الحل:

لحساب التوقع الرياضي نطبق القانون التالي: $E(x) = \sum_{x=i}^{n} x_i P(x_i)$

xi	8	12	16	20	24	المجموع
pi	0,13	0,17	0,38	0,25	0,08	1,00
xi*pi	1,00	2,00	6,00	5,00	2,00	16,00
xi*xi	64	144	256	400	576	
(xi*xi)*pi	8,00	24,00	96,00	100,00	48,00	276,00

$E_{(X)} = 16$

ولحساب التباين نطبق القانون التالي: $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(x))^2 P(x_i)$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(x_i) - (E(x))^2 = 276 - 16^2 = 20$$

مثال(57):

لديك دالة الكثافة الاحتمالية الاتية: $f(x_i) = \begin{cases} \frac{x}{2}, 0 \le x_i \le 2 \\ 0 \end{cases}$

المطلوب :

1. حساب قيمة التوقع الرياضي وقيمة التباين؟
2. حساب الاحتمال $P(X \geq 1)$
3. حساب الاحتمال $P(X < 1)$

الحل:

السؤال الأول: حساب التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتصل:

$$E(x) = \int_0^2 x * f(x_i)dx$$

$$E(x) = \int_0^2 x * \left(\frac{x}{2}\right)dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2}dx = \frac{x^3}{6}\Big]_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

حساب التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي المتصل:

$$V(x) = \int_0^2 x^2 * f(x_i)dx - (E(x))^2$$

$$V(x) = \int_0^2 x^2 * \left(\frac{x}{2}\right)dx - (E(x))^2 = \int_0^2 \frac{x^3}{2}dx - -(E(x))^2$$

$$V(x) == \frac{x^4}{8}\Big]_0^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

حساب الانحراف المعياري: $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{\frac{2}{9}} = 0.47$

السؤال الثاني: حساب الاحتمال $P(X \geq 1)$

$$P(X \geq 1) = \int_1^2 f(x_i)dx$$

$$P(X \geq 1) = \int_1^2 \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{4}\Big]_1^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

السؤال الثالث: حساب الاحتمال $P(X < 1)$

$$P(X < 1) = \int_0^1 f(x_i)dx$$

$$P(X < 1) = \int_0^1 \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{4}\Big]_0^1 = \frac{1}{4}$$

مثال(58):

لديك دالة الكثافة الاحتمالي الاتية $f(x_i)=\begin{cases}\frac{k}{2}, 1\le x_i \le 4\\ 0\end{cases}$:

المطلوب: جد ما يلي:

1. قيمة الثابتk؟
2. قيمة الاحتمال $P(1 \le x \ge 3)$ ؟
3. قيمة الانحراف المعياري؟

الحل:

بما ان الدالة f(xi) دالة كثافة احتمالية، بمعنى الخاصيتين متحققين.

السؤال الأول: قيمة الثابتk

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_i)dx = 1$$
$$\int_1^4 \frac{k}{x^2}dx = 1 \Rightarrow k\int_1^4 \frac{1}{x^2}dx = 1$$
$$= k\int_1^4 x^{-2}dx = 1$$
$$= k\left.\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^4 = k\left(-\frac{1}{x}\right]\Big)_1^4 = k * \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow k = \frac{4}{3}$$

السؤال الثاني: قيمة الاحتمال $P(1 \le x \ge 3)$

$$P(1 \le x \le 3) = \int_1^3 f(x_i)dx$$
$$P(1 \le x \le 3) = \int_1^3 \frac{4}{3x^2}dx = \frac{4}{3}\int_1^3 \frac{1}{x^2}dx = \frac{4}{3}\int_1^3 x^{-2}dx$$
$$P(1 \le x \le 3) = \frac{4}{3}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = \frac{4}{3} * \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$$

السؤال الثالث: قيمة الانحراف المعياري:

لحساب الانحراف المعياري لا بد من إيجاد التوقع الرياضي والتباين للمتغير المتصل، لذا نطبق القوانين التالية:

القانون لتوقع الرياضي هو: $E(x) = \mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f(x_i)dx$

$$E(x)=\mu_x=\int_1^4 x*\frac{4}{3x^2}dx=\frac{4}{3}\int_1^4\frac{1}{x}dx=\frac{4}{3}[\ln x]_1^4$$
$$E(x)=\frac{4}{3}[\ln 4-\ln 1]=\frac{4}{3}[1.38-0]=1.84$$

القانون لتباين هو:
$$V(x)=\sigma_x^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2*f(x_i)dx-(\mu_x)^2$$
$$V(x)=\sigma_x^2=E\left(x^2\right)-\left[E(x)\right]^2$$

$$V(x)=\sigma_x^2=\int_1^4 x^2*f(x_i)dx-(\mu_x)^2=\int_1^4 x^2*\frac{4}{3x^2}dx-\mu_x^2$$
$$\sigma_x^2=\frac{4}{3}\int_1^4 dx-\mu_x^2=\frac{4}{3}x]_1^4-\mu_x^2=4-\mu_x^2=4-(1.84)^2=0.62$$

القانون لحساب الانحراف المعياري هو: $\sigma_x=\sqrt{V(x)}=\sqrt{\sigma_x^2}$

$$\sigma_x=\sqrt{V(x)}=\sqrt{\sigma_x^2}=\sqrt{0.62}=0.78$$

<u>مثال(59):</u>

لديك دالة الكثافة الاحتمالي الاتية:
$$f(x_i)=\begin{cases}\frac{x^3}{4}, 0\le x_i\le 2\\ 0, x\notin[0,2]\end{cases}$$

المطلوب: إيجاد التوقع الرياضي والتباين لهذا المتغير المتصل؟

<u>الحل:</u>

حساب التوقع الرياضي:
$$E(x)=\mu_x=\int_0^2 x*\frac{x^3}{4}dx=\frac{1}{4}\int_0^2 x^4dx$$
$$E(x)=\frac{1}{4}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2=\frac{1}{4}*\frac{1}{5}\left[x^5\right]_0^2=\frac{8}{5}=1.6$$

حساب التباين: القانون لتباين هو:
$$V(x)=\sigma_x^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2*f(x_i)dx-(\mu_x)^2$$
$$V(x)=\sigma_x^2=E\left(x^2\right)-\left[E(x)\right]^2$$

$$V(x)=\sigma_x^2=\int_0^2 x^2*f(x_i)dx-(\mu_x)^2=\int_0^2 x^2*\frac{x^3}{4}dx-\mu_x^2$$
$$\sigma_x^2=\frac{1}{4}\int_0^2 x^5dx-\mu_x^2=\frac{1}{4}*\frac{1}{6}x^6]_0^2-\mu_x^2=\frac{8}{3}-\mu_x^2=\frac{8}{3}-\left(\frac{8}{5}\right)^2=0.11$$

<u>مثال(60):</u>

في لعبة، يقوم الاعب برمي زهرة النرد مرة واحدة ويسجل النتائج بحيث: إذا ظهر الرقم الواحد يخسر 10دج، ويربح 10دج إذا ظهر الرقم 6، اما إذا ظهرت الأرقام 2 او 3 او 4 او 5 فانه لا يربح ولا يخسر.

1. أدرج جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير xi الذي يمثل ربح اللاعب؟
2. احسب متوسط ربح اللاعب، هل اللعبة في صالحه؟
3. نفترض ان زهرة النرد مغشوشة، حيث ان احتمال ظهور الأرقام: 5-4-3-2-6 متساوية ويساوي 0.18، احسب متوسط ربح اللاعب في هذه الحالة؟

الحل:

xi متغير عشوائي يمثل ربح اللاعب $x_i = \{-10, 0, 10\}$

السؤال الاول: نقوم بإدراج جدول التوزيع الاحتمالي

xi	-10	0	10	المجموع
pi	1/6	4/6	1/6	1

السؤال الثاني نقوم بحساب متوسط ربح اللاعب:

$$E(x) = \sum x_i p_i = \left(-10 * \frac{1}{6}\right) + \left(0 * \frac{1}{6}\right) + \left(10 * \frac{1}{6}\right) = 0$$

السؤال الثالث: **نحسب** متوسط ربح اللاعب

$$P(x = 6) = P(x = 5) = P(x = 4) = P(x = 3) = P(x = 2) = 0.18$$

xi	-10	0	10	المجموع
pi	0.1	0.72	0.18	1

$$\mathrm{E(x)} = \sum \mathrm{x_i p_i} = (-10 * 0.1) + (0 * 0.72) + (10 * 0.18) = 1.8$$

متوسط ربح اللاعب هو 1.8دج

الفصل الرابع

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات

العشوائية المنفصلة

بعدان عرفنا مفهوم المتغيرات العشوائية والتوزيع الاحتمال للمتغير العشوائي سواء كان منفصل او متصل سوف ندرس في هذا الفصل التوزيعات الاحتمالية الأكثر انتشار. وبنفس التقسيم الذي تم في المتغيرات العشوائية، هناك التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المنفصلة والتوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتصلة او المستمرة. سنتطرق الى التوزيعات الأكثر استعمالا وهي: التوزيع الثنائي الحد وتوزيع بواسون ، التوزيع المنتظم، التوزيع فوق الهندسي.

ترتبط التوزيعات الاحتمالية المنفصلة بالمتغيرات العشوائية المنفصلة. تعتبر خصائص برنولي بمثابة الأساس الذي تستند عليه أنواع التوزيعات المنفصلة، وهذه الخصائص هي:

- ✓ ان تكون العينة بدون إعادة
- ✓ ان لا يزيد حجم العينة على 5% من حجم المجتمع
- ✓ ان يكون عدد التجارب ثابت او محدد، وان كل تجربة تصف صنفين فقط أي نجاح او فشل،
- ✓ ان وقوع احداث النجاح في كل تجربة يكون مستقلا عما يقع مع التجارب الأخرى.

1.توزيع برنولي

1.1.تعريف تجربة برنولي

نقول عن التجربة انها برنولية إذا كانت لديها نتيجتين متنافيتين p و q بحيث p تمثل احتمال النجاح و q احتمال الفشل و x عدد المرات النجاح. المتغير العشوائي يأخذ القيمة 1 عند تحقيق الحدث وصفرا في الحالة العكسية.

نقول عن x يخضع الى توزيع برنولي $x \backsim \beta(1, P)$ هو توزيع منفصل.

القانون لتوزيع الاحتمالي لتجربة برنولي يكتب على الشكل التالي:

$$\boxed{P(X = x) = p^x q^{1-x}}$$

xi	0	1
Pi	q	p

2.1.خواص التوزيع برنولي:

$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$

$P_i \geq 0$

p + q =1

3.1.القيم العددية المميزة لمتغير العشوائي الخاضع لتجربة برنولي:

حساب التوقع الرياضي لتوزيع برنولي:

$$\boxed{E(x) = \sum x_i p_i = \sum x_i \left(p^x q^{1-x}\right)}$$

باستعمال جدول برنولي وتطبيق القانون نتحصل على:

xi	0	1
Pi	q	p

$$P(x = 0) = p^0 q^{1-0} = q$$

$$E(x) = \sum x_i p_i = (0 * q) + (1 * p) = p$$

حساب التباين لتوزيع برنولي:

xi	0	1
x_i^2	0	1
Pi	q	p

$$V(x) = \sum x_i^2 p_i - \left(\sum x_i p_i\right)^2 = [(0 * q) + (1 * p)] - p^2 = p - p^2 = pq$$

مقاييس الشكل

معامل الالتواء

$$L = \frac{\mu^3}{\sigma^3}$$

نقوم بحساب العزم من درجة الثالثة كما يلي:

$$\boxed{\mu^3 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^3 p_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - p)^3 p_i}$$

$$\mu^3 = (0 - p)^3 q + (1 - p)^3 p = q^3 p - p^3 q = pq(q^2 - p^2)$$

نعوض هذه النتيجة في معامل الالتواء ونتحصل على:

$$L = \frac{\mu^3}{\sigma^3} = \frac{\boldsymbol{pq(q^2 - p^2)}}{pq * \sqrt{pq}} = \frac{\boldsymbol{(q^2 - p^2)}}{\sqrt{pq}}$$

معامل التفلطح

$$K = \frac{\mu^4}{\sigma^4}$$

نقوم بحساب العزم من الجرجة الرابعة كما يلي:

$$\mu^4 = (0-p)^4q + (1-p)^4p = p^4q + q^4p$$

$$K = \frac{\mu^4}{\sigma^4} = \frac{p^4q + q^4p}{(pq)^2}$$

تابع التوزيع F(x)

$$\boxed{\boldsymbol{P(X \le x_i) = F(x)}}$$

xi	0	1
Pi	q	p
F(x)	q	1

$$F(x) \begin{cases} 0 & x < 0 \\ q & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

2. توزيع الثنائي الحد

إذا قمنا بتجربة ما ذات حدين فقط وكررنا عمالية التجربة وكان ما يهمنا فقط هو عدد مرات النجاح أي عدد مرات وقوع الحدث، المطلوب فانه بالإمكان تطبيق التوزيع الثنائي.

1.2.مفهوم توزيع الثنائي الحد

ليكن لدينا قطعتين من النقود ولنرمز للوجه الذي يحمل الصورة بالرمزF والوجه الذي يحمل الكتابة او الرقم بالرمز p ، لنفرض ان ظهور الصورة هو النجاح و ظهور الرقم هو الفشل، يستخدم التوزيع الثنائي لإيجاد احتمال وقوع حادث معين لنجاح أي عدد من مرات مقداره من بين n مرة من المحاولات لنفس التجربة.

<u>مثال (61):</u>

نفرض التجربة البرنولية رمي قطعة نقدية مكررة n مرة و x عدد مرات الحصول على الصورة نرمز لها بـF المطلوب: احسب الاحتمال لما n= 2 و لما n=3

الحل:

لدينا: **n = 0,1,2** ظهور الصورة=**xi**

$$\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$$

$$P(x=0)=P(PP)=q^2$$
$$P(x=1)=P(PF,FP)=qp+pq=2pq$$
$$P(x=2)=P(FF)=p^2$$

لدينا: **n = 0,1,2,3** ظهور الصورة=**xi**

$$\Omega=\{PPP,PPF,PFP,PFF,FPP,FPF,FFP,FFF\}$$
$$P(x=0)=P(PPP)=q^3$$
$$P(x=1)=P(PPF,PFP,FPP)=3pq^2$$
$$P(x=2)=P(FFP,PFF,FPF)=3p^2q$$
$$P(x=3)=P(FFF)=p^3$$

يستخدم التوزيع الثنائي إذا تحققت الشروط التالية:

- ✓ **هناك نتيجتان ممكنتان ومتنافيتان لكل محاولة ولتكن نجاح او فشل،**
- ✓ **تجربة برنولي مكررة n مرة**
- ✓ **المحاولات وعددها n مرة مستقلة عن بعضها البعض،**
- ✓ **احتمال وقوع حدث معين لكل محاولة p ثابت ولا يتغير من محاولة لأخرى.**

العلاقة تكتب على شكل التالي:

$$\boxed{p(X=x)=C_n^x p^x q^{n-x}=\frac{n!}{x!\,(n-x)!}p^x q^{n-x}}$$

p احتمال النجاح وهو مقدار موجب واصغر من الواحد وهو ثابت لا يتغير

p = (1-q) احتمال الفشل

2.2.خواص التوزيع الثنائي الحد

1. هو توزيع احتمالي متقطع وشكله البياني يأخذ شكل المضلع التكراري،
2. يتوقف شكل المضلع التكراري على قيمة nو p فاذا كان احتمال النجاح واحتمال الفشل متساويان فان شكل المضلع يكون متماثلا بغض النظر الى قيمة n اما إذا كان احتمال النجاح يختلف عن احتمال الفشل فان المضلع يكون ملتو ويميل نحو التماثل كلما زادت قيمة n،

.3 $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$ $\quad\quad$ $0 \le P_i \le 1$

مثال (62):

نرمي قطعة نقدية متوازنة 4 مرات، اثبت ان xi يخضع الى توزيع احتمالي، مع افتراض p = q = 1/2

الحل:

باستعمال القانون التالي نقوم بحساب الاحتمالات التالية

$$\boxed{p(X=x) = C_n^x p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x q^{n-x}}$$

$$p(x=0) = C_4^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4!}{0!\,(4-0)!} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$p(x=1) = C_4^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4!}{1!\,(4-1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{16}$$

$$p(x=2) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}$$

$$p(x=3) = C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{4}{16}$$

$$p(x=4) = C_4^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{4!}{4!\,(4-4)!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}$$

جدول قانون التوزيع الاحتمالي

xi	0	1	2	3	4
pi	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

ومنه نستنتج ان مجموع الاحتمالات تساوي واحد اذن نقول ان المتغير العشوائي يخضع الى توزيع احتمالي.

3.2.القيم العددية المميزة للمتغير العشوائي الخاضع لتوزيع الثنائي الحد

مجموع المتغيرات المستقلة لبرنولي تساوي المتغير العشوائي لثنائي

$$X = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$$

نحسب التوقع الرياضي لتوزيع الثنائي كما يلي مع علم ان التوقع الرياضي لتوزيع برنولي هو :

$$\mathrm{E(x_i) = p}$$

$$\mathrm{E(X) = E(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n) = \sum_{i=1}^{n} E(x_i) = np}$$

نحسب التباين لتوزيع الثنائي كما يلي مع علم ان تباين لتوزيع برنولي هو :

$$V(x_i) = pq$$

$$\mathrm{V(X) = V(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n) = \sum_{i=1}^{n} V(x_i) = npq}$$

مقاييس الشكل

معامل الالتواء

$$\mathrm{L} = \frac{\mu^3}{\sigma^3} = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$$

معامل التفلطح

$$\mathrm{K} = \frac{\mu^4}{\sigma^4} = \frac{1-6pq}{npq} + 3$$

<u>مثال (63):</u>

نرمي قطعة نقود بطريقة متوازنة 3 مرات بحيث x يمثل ظهور الصورة. المطلوب:

1. ما هو نوع التوزيع الملائم لهذه التجربة؟
2. اوجد القانون التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير؟
3. احسب التوقع الرياضي والتباين حسب طريقتين؟

الحل:

السؤال الأول: معرفة نوع التوزيع

لدينا نتيجتين الصورة والكتابة والاحداث مستقلة: اذن نوع التوزيع هو الثنائي

السؤال الثاني: نبرهن ان هذا المتغير يخضع الى توزيع احتمالي

$$p(x=0) = C_3^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3!}{0!\,(3-0)!} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$p(x=1) = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3!}{1!\,(3-1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$p(x=2) = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$$

$$p(x=3) = C_3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{3!}{3!\,(3-3)!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$$

جدول قانون التوزيع الاحتمالي

xi	0	1	2	3	المجموع
pi	1/8	3/8	3/8	1/8	1

ومنه نستنتج ان مجموع الاحتمالات تساوي واحد اذن نقول ان المتغير العشوائي يخضع الى توزيع احتمالي.

السؤال الثالث: نحسب التوقع الرياضي والتباين باستعمال طريقتين

التوقع الرياضي : الطريقة الأولى

$$E(x) = \sum x_i p_i = (0 * 1/8) + (1 * 3/8) + (2 * 3/8) + (3 * 1/8) = 3/2$$

الطريقة الثانية باستعمال قانون التوزيع الثنائي $E(x) = np = 3 * \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

التباين : الطريقة الاولى

$$V(x) = \sum x_i^2 p_i - \left(\sum x_i p_i\right)^2 = \left[\left(0^2 * \frac{1}{8}\right) + \left(1^2 * \frac{3}{8}\right) + \left(2^2 * \frac{3}{8}\right) + \left(3^2 * \frac{1}{8}\right)\right] - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0.75$$

الطريقة الثانية باستعمال قانون التوزيع الثنائي $V(x) = npq = 3 * \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 0.75$

مثال (64):

ما هو احتمال الحصول على صورتين على الأقل و5 صور على الأكثر، إذا رمينا 9 قطع من النقود في رمية واحدة.

الحل:

لدينا: $n = 9$ ظهور صورتين على الأقل وخمس صور على الاكثر=xi

$$\boxed{P(2 \le x \le 5) = P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) + P(x=5)}$$

$$p(x=2) = C_9^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{9!}{2!\,(9-2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^7 = 0.07$$

$$p(x=3) = C_9^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{9!}{3!\,(9-3)!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0.16$$

$$p(x=4) = C_9^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{9!}{3!\,(9-4)!}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0.24$$

$$p(x=5) = C_9^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{9!}{3!\,(9-5)!}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0.24$$

$$\boxed{P(2 \le x \le 5) = 0.07 + 0.16 + 0.24 + 0.24 = 0.72}$$

النتيجة هي: **0.72**

<u>مثال:(65)</u>

اختبرت 6 أجهزة راديو، فاذا كان احتمال ان يكون الجهاز معيبا هو 0.3، المطلوب:

1. حساب التوزيع الاحتمالي لعدد الأجهزة المعيبة؟
2. احسب التوقع الرياضي والتباين لهذا التوزيع؟

الحل:

لدينا نتيجتين: احتمال النجاح: الجهاز معيب $P = 0.3$ واحتمال الفشل الجهاز غير معيب $q=0.7$

نوع التوزيع هو: التوزيع الثنائي لان لدينا نتيجتين مستقلتين، نطبق القانون التالي:

$$\boxed{p(X=x) = C_n^x p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}p^x q^{n-x}}$$

$$p(x=0) = C_6^0(0.3)^0(0.7)^6 = \frac{6!}{0!\,(6-0)!}(0.3)^0(0.7)^6 = 0.117$$

$$p(x=1) = C_6^1(0.3)^1(0.7)^5 = \frac{6!}{1!(6-1)!}(0.3)^1(0.7)^5 = 0.303$$

$$p(x=2) = C_6^2(0.3)^2(0.7)^4 = \frac{6!}{2!(6-2)!}(0.3)^2(0.7)^4 = 0.325$$

$$p(x=3) = C_6^3(0.3)^3(0.7)^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!}(0.3)^3(0.7)^3 = 0.185$$

$$p(x=4) = C_6^4(0.3)^4(0.7)^2 = \frac{6!}{4!(6-4)!}(0.3)^4(0.7)^2 = 0.058$$

$$p(x=5) = C_6^5(0.3)^5(0.7)^1 = \frac{6!}{5!(6-5)!}(0.3)^5(0.7)^1 = 0.011$$

$$p(x=6) = C_6^6(0.3)^6(0.7)^0 = \frac{6!}{6!(6-6)!}(0.3)^6(0.7)^0 = 0.0007$$

جدول قانون التوزيع الاحتمالي

xi	0	1	2	3	4	5	6	المجموع
pi	0.117	0.303	0.325	0.185	0.058	0.011	0.0007	1

ومنه نستنتج ان مجموع الاحتمالات تساوي واحد اذن نقول ان المتغير العشوائي يخضع الى توزيع احتمالي.

السؤال الثاني: نحسب التوقع الرياضي والتباين

$$E(x) = np = 6 * 0.3 = 1.8$$

$$V(x) = npq = 6 * 0.3 * 0.7 = 1.26$$

3.توزيع بواسون

1.3.تعريف توزيع بواسون

يعتبر توزيع بواسوني من التوزيعات العشوائية المنفصلة، ويسمى هذا الاسم نسبة الى Simon Poisson الذي توصل الى دالة هذا التوزيع، حيث أستطع بواسون ان يشتق قانون خاص باحتمالات صغيرة انطلاقا من قانون التوزيع الثنائي. وكلما كان n كبيرا يصعب استعمال التوزيع الثنائي، في هذه الحالة

يفضل استخدام توزيع بواسون. ويستخدم لتحديد احتمال وقوع عدد معين من النجاحات في وحدة الزمن، وذلك عندما تكون الاحداث او النجاحات مستقلة عن بعضها البعض وعندما يبقى متوسط عدد النجاحات ثابتا لوحدة الزمن.

شروط تطبيق التوزيع بواسوني:

1. لا يعتمد هذا الاحتمال على عدد النجاحات التي نحصل عليها في مجلات زمنية أخرى،
2. كل تكرار لتجربة تنتج عنه نتيجتين النجاح والفشل، وهما حادثان متنافيان،

والعلاقة تكتب على الشكل التالي: $\boxed{P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}}$

x العدد المعين من النجاحات

P(X=x) احتمال عدد x من النجاحات

e هو أساس نظام اللوغاريتم الطبيعي و يساوي: e = 2.718

λ هو متوسط عدد النجاحات في وحدة الزمن

2.3.خواص توزيع بواسون:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

$$E(x)=V(x)=\lambda$$

$$0 \le P_i \le 1$$

معامل التفلطح معامل الالتواء

$$K = 3+\frac{1}{\lambda} \qquad L=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

مثال (66):

xi متغير عشوائي يخضع الى توزيع بواسوني ، احسب الاحتمالات التالية :

$$P(x,\lambda)=P(2,1)\,,P\left(3,\frac{1}{2}\right)\,,P(2,0.7)$$

الحل:

$$P(x,\lambda)=P(2,1)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=\frac{e^{-1}*1^{2}}{2!}=0.18$$

$$P(x,\lambda)=P\left(3,\frac{1}{2}\right)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=\frac{e^{-\frac{1}{2}}*\frac{1}{2}^{3}}{3!}=0.10$$

$$P(x,\lambda) = P(2,0.7) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-0.7}0.7^2}{2!} = 0.12$$

<u>مثال</u> (67):

إذا كان 3% من مصابيح الكهرباء المصنوعة بواسطة شركة معينة تكون معيبة. اوجد احتمال لعينة مكونة من 100 مصباح سيكون هناك:

1. مصباح واحد معيب
2. مصبحان معيبان
3. أربعة مصابيح معيبة

الحل:

نعلم ان التوقع الرياضي يساوي:

$$\boxed{E(x) = V(x) = \lambda = np = 100 * 0.03 = 3}$$

السؤال الأول: احتمال ان يكون مصباح واحد معيب هو:

$$P(x,\lambda) = P(1,3) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-3}3^1}{1!} = 0.149$$

السؤال الثاني: احتمال ان يكونا مصباحان معيبان هو:

$$P(x,\lambda) = P(2,3) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-3}3^2}{2!} = 0.22$$

السؤال الثالث: احتمال ان يكون أربعة مصابيح معيبة هو:

$$P(x,\lambda) = P(4,3) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-3}3^4}{4!} = 0.16$$

3.3.تقريب توزيع بواسن بتوزيع الثنائي الحد

بالإضافة الى استخدامات توزيع بواسون التي سبق ذكرها، يمكن اعتبار توزيع بواسون حالة خاصة لتوزيع الثنائي الحد عند توفير بعض الشروط:

1. حجم العينة كبيرا أي $n>30$ تقترب من ∞
1. الاحتمال يكون صغيرا أي $P<0.01$ يقترب من الصفر
2. $np<5$

في هذه الحالة تكون نتيجة التي نحصل عليها بتطبيق توزيع ذي الحدين قريبة جدا من النتيجة التي نحصل عليها بتطبيق توزيع بواسن.

مثال (68) :

مركب يتألف من 1000 الة تعمل بشكل مستقل، إذا احتمال توقف الة في أي لحظة ومنية، خلال الفترة الزمنية t يساوي 0.002 ، اوجد الاحتمال تعطل ثلاث الات خلال هذه الفترة الزمنية.

الحل:

نرمز للآلات المتعطلة خلال الفترة الزمنية x فهذا المتغير يخضع الى توزيع الثنائي، ولكن بما ان حجم العينة كبيرا والاجتمال صغيرا، يمكن تقريب التوزع الثنائي الى توزيع بواسون

الشروط محققة: $np=2\ (np<5)$ $P=0.002\ (P<0.01)$ $n=1000\ (n>30)$

$$P(X=3)=\frac{e^{-2}2^{3}}{3!}=0.18$$

مثال(69)

نأخذ بطريقة عشوائية 10 وحدات من انتاج الة نسبة انتاجها التالف هو 10%. احسب احتمال ان يكون هناك وحدتان تالفتان باستخدام التوزيع الثنائي والتوزيع بواسوني.

الحل:

باستخدام قانون بواسون نتحصل على:

$$\boxed{E(x)=V(x)=\lambda=np=10*0.1=1}$$

للحصول على الاحتمال نطبق القانون التالي:

$$P(x,\lambda)=P(2,1)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=\frac{e^{-1}1^{2}}{2!}=0.18$$

باستخدام قانون الثنائي نتحصل على

$$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{x})=C_{n}^{x}\mathrm{p}^{\mathrm{x}}\mathrm{q}^{\mathrm{n-x}}=\frac{\mathrm{n}!}{\mathrm{x}!\,(\mathrm{n}-\mathrm{x})!}\mathrm{p}^{\mathrm{x}}\mathrm{q}^{\mathrm{n-x}}}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{x,n,p})=\mathrm{P}(2{,}10{,}0.1)=C_{10}^{2}\ 0.1^{2}0.9^{10-2}=\frac{10!}{2!\,(10-2)!}0.1^{2}\ 0.9^{8}=0.19$$

4.التوزيع فوق الهندسي

1.4.مفهوم التوزيع فوق الهندسي

عند دراستنا لقانون التوزيع الاحتمالي فان عملية السحب كانت تتم مع الإعادة ولكن هناك بعض الوضعيات لا تسمح بإعادة الوحدة المسحوبة فاذا كانت عملية السحب تتم دون إعادة فهدا يعني ان عمليات السحب لا تكون مستقلة ولهذا نلجأ الى تطبيق قانون اخر يسمى بالتوزيع الهندسي الزائد ونرمز له ب $\mathcal{H}$ ومن هنا يبرز الاختلاف الرئيسي بين التوزيع الهندسي الزائد والتوزيع الثنائي أي بين السحب بالإرجاع والسحب بدون ارجاع ونقول يستخدم التوزيع الهندسي الزائد إذا كانت المحاولات غير مستقلة.

نفرض لدينا صندوق يحتوي على N وحدة من الإنتاج منها M وحدة غير صالحة أي لا تحقق المواصفات المطلوبة وبالتالي تبقى (N-M) وحدات صالحة.

M تمثل عدد عناصر المجتمع الذي ينصب عليه اهتمامنا وهو قد يكون صالحا او تالفا

n تمثل حجم العينة المسحوبة بدون ارجاع

و يعرف التوزيع الهندسي الزائد بمثابة معالم: $X \rightsquigarrow \mathcal{H}(N, M, n)$

xi متغير الهندسي الزائد، $xi = (0,1,2,\ldots k)$

$$\boxed{X_i \epsilon [\mathrm{Max}(0, n - Nq), \mathrm{Min}(n, Np)]}$$

2.4.خواص التوزيع فوق الهندسي

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1 \qquad\qquad P_i \geq 0$$

يكتب قانون التوزيع الاحتمالي كما يلي:

$$P(X = x_i) = \frac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}$$

C_N^n **يمثل عدد العينات الممكنة**

C_M^x **يمثل عدد المجموعات من x وحدة الحاملة الخاصية محل الدراسة.**

احتمال النجاح والفشل يصاغ كما يلي:

$$P = \frac{\text{الحالات الموافقة}}{\text{الحالات الممكنة}} = \frac{M}{N} \qquad (1 - P) = q = 1 - \frac{M}{N} = \frac{N - M}{N}$$

3.4.القيم العددية المميزة للمتغير العشوائي الخاضع لتوزيع فوف الهندسي

التوقع الرياضي للمتغير الهندسي زائد $E(x)=np$

التباين للمتغير الهندسي زائد $V(X) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

مثال(70)

من هيئة تدريس متكونة من*4* احصائيين و *7* اقتصاديين، تم سحب وبطريقة عشوائية لجنة تتكون من *4* اشخاص. المطلوب: إذا كان *xi* متغير عشوائي يمثل عدد الاحصائيين، اثبت ان هذا المتغير يخضع الى توزيع احتمالي؟ احسب القيم العددية المميزة لهذا المتغير؟

الحل:

لدينا **M=4 N =11 n = 4**

احتمال النجاح $P = \frac{\text{الحالات الموافقة}}{\text{الحالات الممكنة}} = \frac{M}{N} = \frac{4}{11}$

احتمال الفشل $(1-P) = q = 1 - \frac{M}{N} = \frac{11-4}{11} = \frac{7}{11}$

$$\boxed{X_i \epsilon [\mathrm{Max}(0, n - Nq), \mathrm{Min}(n, Np)]}$$

$$X_i \epsilon [\mathrm{Max}(0,4-7), \mathrm{Min}(4,4)] \Rightarrow [\mathrm{Max}(0,-3), \mathrm{Min}(4,4)] \Rightarrow \{0,4\}$$

نقوم بحساب الاحتمالات لتوزيع الهندسي الزائد، سوف نطبق القانون التالي:

$$\mathbf{P(X = x_i)} = \frac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n} = \frac{C_{\mathbf{NP}}^{\mathbf{x}} C_{\mathbf{Nq}}^{\mathbf{n-x}}}{C_{\mathbf{N}}^{\mathbf{n}}}$$

$$P(X=0) = \frac{C_4^0 C_{11-4}^{4-0}}{C_{11}^4} = 0.106 \qquad P(X=1) = \frac{C_4^1 C_{11-4}^{4-1}}{C_{11}^4} = 0.424$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 C_{11-4}^{4-2}}{C_{11}^4} = 0.380 \qquad P(X=3) = \frac{C_4^3 C_{11-4}^{4-3}}{C_{11}^4} = 0.084$$

$$P(X=4) = \frac{C_4^4 C_{11-4}^{4-4}}{C_{11}^4} = 0.003$$

نقوم بإدراج جدول قانون التوزيع الاحتمالي

xi	0	1	2	3	4	المجموع
Pi	0.106	0.424	0.380	0.084	0.003	1

من خلال النتائج أعلاه المتغير يخضع الى التوزيع الهندسي زائد.

حساب التوقع الرياضي للمتغير الهندسي زائد $E(x)=np= 4*4/11=1.45$

التباين للمتغير الهندسي زائد $V(X) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 4 * \left(\frac{4}{11}\right)\left(\frac{7}{11}\right)\left(\frac{11-4}{11-1}\right) = 0.63$

5.التوزيع المنتظم

1.5.تعريف التوزيع المنتظم

إذا كان كل عنصر من عناصر الفضاء العيني له نفس فرصة الحدوث أي انه إذا كان:

$x \in n\{1,2,3,\dots n\}$ باحتمال قدره $\frac{1}{n}$ فإننا نقول بان x تخضع لتوزيع المنتظم المنفصل.

دالة الكثافة تكتب على الشكل التالي:

$$P(X=x) = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x \in R_x \\ 0 & sinon \end{cases}$$

2.5. القيم العددية المميزة للمتغير العشوائي الخاضع لتوزيع المنتظم

التوقع الرياضي يكتب وفق العلاقة التالية: $E(X) = \frac{n+1}{2}$

اما التباين يساوي: $V(X) = \frac{n^2+1}{12}$

<u>مثال(71)</u>

كيس يحتوي على 10 كرات مرقمة بالأرقام من 1-10قمنا بسحب كرة من الكيس ولنفرض x يمثل الرقم الموجود على الكرة المسحوبة. اوجد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير؟ احسب التوقع الرياضي والتباين؟

الحل:

نلاحظ ان الكرة لها نفس السحب وبالتالي المتغير العشوائي يخضع الى توزيع منتظم، الدالة الاحتمالية تكتب كما يلي:

الدالة الاحتمالية هي:

$$f(x) = P(x = i) = \frac{1}{10}$$

التوقع الرياضي هو:

$$E(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{10+1}{2} = 5.5$$

التباين هو:

$$V(X) = \frac{n^2+1}{12} = \frac{100+1}{12} = 8.25$$

الفصل الخامس

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات

العشوائية المتصلة

في هذا الفصل سنقدم بعض التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المتصلة والأكثر شيوعا واستخداما، سنخص بالذكر التوزيع المنتظم والتوزيع الطبيعي.

ترتبط هذه التوزيعات بالمتغيرات العشوائية المتصلة حيث ان التوزيع هنا بمثابة دالة لمتغير عشوائي متصل أي يتضمن قياسا، ويتم تمثيله بيانيا اما باستخدام المدرج التكراري او المضلع وحتى الرسم البياني الخطي.

1.التوزيع الطبيعي

1.1.مفهوم التوزيع الطبيعي

يعتبر التوزيع الطبيعي من اهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة، وذلك لأنه يمثل كثيرا من الظواهر الحياتية، وان يكون الأساس الذي تقوم عليه الكثير من الطرق الإحصائية، والتوزيع الطبيعي هو التوزيع المناسب للظواهر التي تحدث فيها القيم الكبيرة جدا والصغيرة جدا باحتمالات صغيرة، وتتمركز قيمه في وسط التوزيع بحيث يكون الشكل على شكل جرس.

يستعمل التوزيع الطبيعي في كثير من الحالات التطبيقية والاقتصادية وذلك من اجل تقليل من العمليات الحسابية ولسهولة استعماله، كاختبارات الفروض الإحصائية، تحديد او انشاء مجالات الثقة، ويسمى هذا التوزيع بتوزيع Laplace –Gauss. و يرجع الفضل في اكتشاف هذا القانون الى Laplace في سنة 1780 و ذلك بالاعتماد ما وصل اليها Bernouilli

نقول ان المتغير العشوائي مستمر مقرف ضمن المجال R يخضع لتوزيع طبيعي إذا اخذت دالة الكثافة الشكل التالي:

$$\boxed{f((x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2} \quad [1]}$$

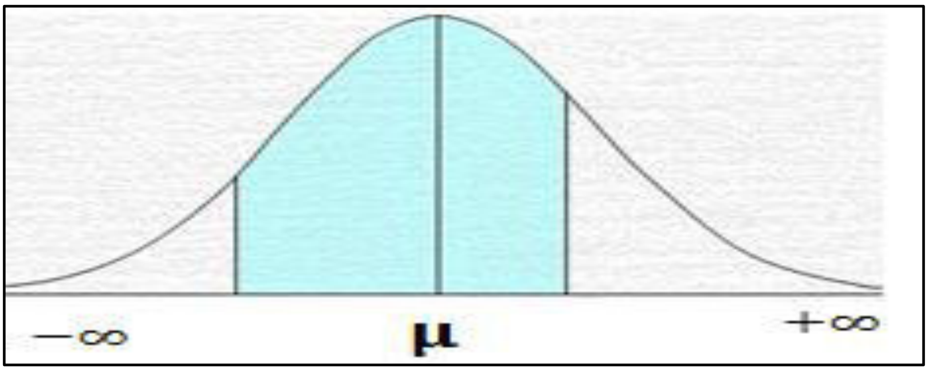
$\mu ; \sigma$ يمثلان معلم التوزيع الطبيعي

μ الوسط الحسابي

σ الانحراف المعياري

شكل منحنى الطبيعي وخصائصه:

يتخذ المنحنى الطبيعي شكل الجرس وهو متماثل حول نقطة الوسط أي العمود النازل من أعلى نقطة في المنحنى على المحور الافقي يقسم المنحنى الى قسمين متساويين.



خصائص التوزيع الطبيعي:

1. يتخذ المنحنى الطبيعي شكل الجرس
2. متماثل حول الوسط
3. الوسط الحسابي يساوي الوسيط يساوي المنوال
4. المساحة تحت المنحنى الطبيعي تساوي الواحد
5. تحديد نسبة او أي جزء محصور بين قيمتين تحت المنحنى يتم بمعرفة الوسط والانحراف المعياري للتوزيع
6. كلما زاد الانحراف المعياري أي الزيادة في التشتت البيانات عن وسطيها الحسابي يزداد تفرطح المنحنى.

2.1.خواص قانون التوزيع الطبيعي

$$f(x) \geq 0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, d(x) = 1$$

2.التوزيع الطبيعي المعياري

1.2.مفهوم التوزيع الطبيعي المعياري

يسمى المنحنى الطبيعي الذي وسطه الحسابي μ تباينه σ^2 فيرمز له برمز $X_i \backsim N(\mu, \sigma^2)$

إذا افترضنا ان $Z_i = \frac{\mathrm{x_i} - \mu}{\sigma}$

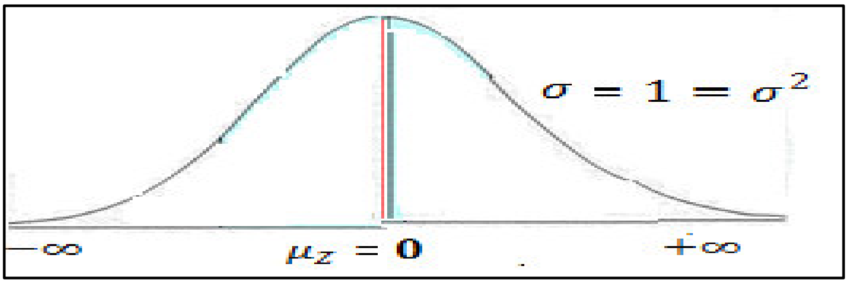
وعوضنا هذه الفرضية في المعادلة رقم 1فان المعادلة ذاتها تصبح على الصورة التالية:

$$g((z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{1}{2}\right)z^2}$$

فان دالة الكثافة المعيارية تكتب على الشكل التالي:

يتميز التوزيع الطبيعي والمعياري بنفس الخواص الذي يتميز به التوزيع الطبيعي

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, d(x) = 1 \qquad\qquad g(z) \geq 0$$



2.2.القيم العددية المميزة للمتغير العشوائي الخاضع لتوزيع الطبيعي المعياري

نضع $Z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$

$$Z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma} \Rightarrow X_i = \sigma * Z_i + \mu$$

نحسب التوقع الرياضي مع تطبيق الخواص للتوقع الرياضي

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X_i}) = \boldsymbol{E}(\sigma * Z_i) + \boldsymbol{E}(\mu) \Rightarrow \sigma E(Z_i) + \mu \Rightarrow E(Z_i) = 0$$

نحسب التباين مع تطبيق الخواص للتباين

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X_i}) = \boldsymbol{V}(\sigma * Z_i) + \boldsymbol{V}(\mu) \Rightarrow \sigma^2 V(Z_i) = \sigma^2 \Rightarrow V(Z_i) = 1$$

ونقول ان المتغير العشوائي الطبيعي والمعياري له وسط يساوي صفرا والتباين يساوي واحد.

$$\boldsymbol{Z \backsim N(\mu_Z = 0;\ V_Z = 1)}$$

ملاحظة:

لقد وضع الاحصائيون جداول لحساب القيم المعيارية، وتسمى هذه الجداول بجداول التوزيع الطبيعي والمعياري، ولإبراز أهمية هذه الجداول وكيفية استخدامهم نقدم مثال توضيحي.

مثال (72) :

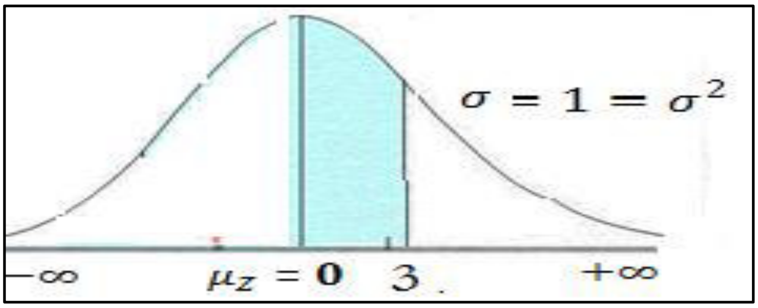
ليكن لدينا متغير عشوائي يخضع لتوزيع طبيعي ومعياري، باستعمال الجدول الطبيعي والمعياري احسب الاحتمالات التالة ومثل كل حالة:

1. $P(0 \leq Z \leq 3)$
2. $P(-0.83 \leq Z \leq 0)$
3. $P(-0.4 \leq Z \leq 0.6)$
4. $P(0.75 \leq Z \leq 1.36)$
5. $P(-1.96 \leq Z \leq -0.74)$

الحل

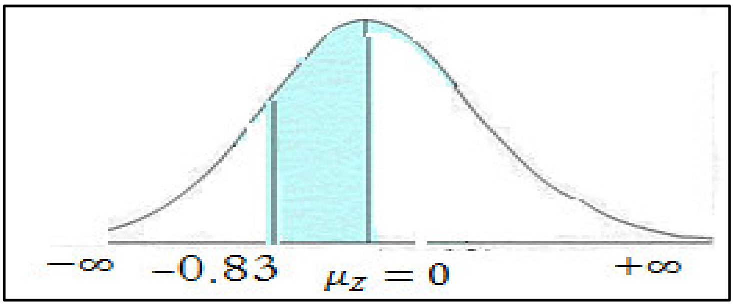
السؤال الأول: $P(0 \leq Z \leq 3)$

$$\pi(3) - \pi(0) = 0.99 - 0.5 = 0.49$$



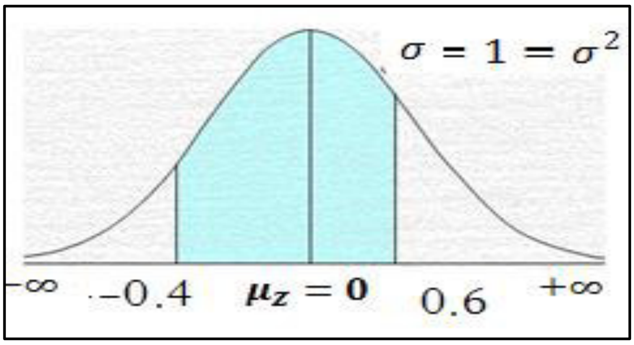
السؤال الثاني: $P(-0.83 \leq Z \leq 0)$

$$\pi(0) - \pi(-0.83) = \pi(0) - [1 - \pi(0.83)] = 0.5 - 1 + 0.79 = 0.29$$



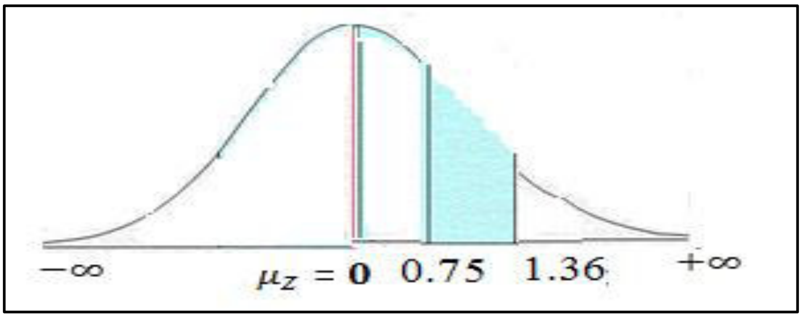
السؤال الثالث: $P(-0.4 \leq Z \leq 0.6)$

$$\pi(0.6) - \pi(-0.4) = \pi(0.6) - [1 - \pi(0.4)] = 0.72 + 0.65 - 1 = 0.37$$



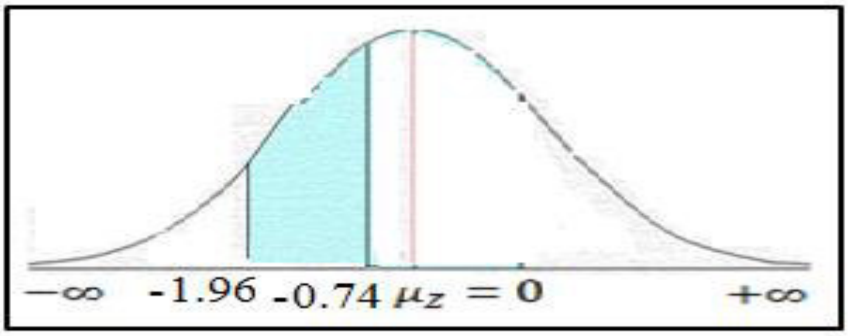
السؤال الرابع: $P(0.75 \leq Z \leq 1.36)$

$$\pi(1.36) - \pi(0.75) = 0.91 - 0.77 = 0.14$$



السؤال الخامس: $P(-1.96 \leq Z \leq -0.74)$

$$\pi(-0.74) - \pi(-1.96) = 0.97 - 0.77 = 0.20$$



مثال **(73) :**

اذا كان توقع وتباين العلامات في امتحان الإحصاء هو 75 و100 على التوالي، جد العلامات بالوحدات معيارية للطلبة الحاصلين على: 92 - 55

الحل:

لحساب القيم المعيارية نتبع الخطوات التالية:

1. نحول كل قيمة مشاهدة من التوزيع الطبيعي الى قيمة الطبيعي ومعياري وذلك باستعمال القانون التالي: $Z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$
2. بعد الحصول على القيمة المعيارية نلجأ الى الجدول الطبيعي والمعياري لإيجاد القيم المقابلة لها، حيث ان العمود الاول يمثل القيم المعيارية والافقي يمثل الجزئيات للقيم المعيارية،
3. بعد القراءة نجد القيم المناظرة المطلوبة والتي تدل على المساحة والاحتمال المطلوب.

$$Z = \frac{x_i - \mu}{\sigma} = \frac{55 - 75}{100}$$

$$Z = \frac{x_i - \mu}{\sigma} = \frac{92 - 75}{100} = 1.7$$

3.2. تقريب توزيع الثنائي الحد بتوزيع الطبيعي

سنحاول دراسة السلوك التقارب لبعض التوزيعات الشهيرة منها التقارب بين التوزيع الثنائي الحد والتوزيع الطبيعي، ونقصد بالتقارب بين توزيعين أي نتحصل على نتائج متقاربة، كما يمكن استعمال توزيعين احتماليين لحساب احتمال معين.

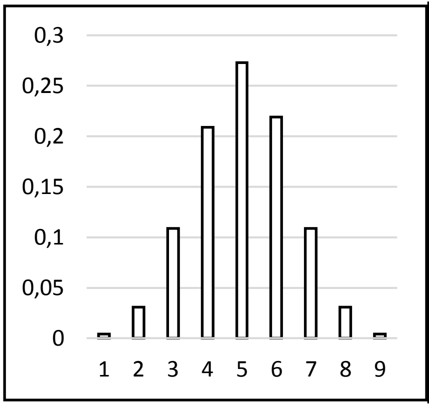
مثلا: X متغير عشوائي يمثل عدد مرات الحصول على الصورة عند رمي قطعة نقدية مرتين، أربعة مرات، ثمانية مرات.

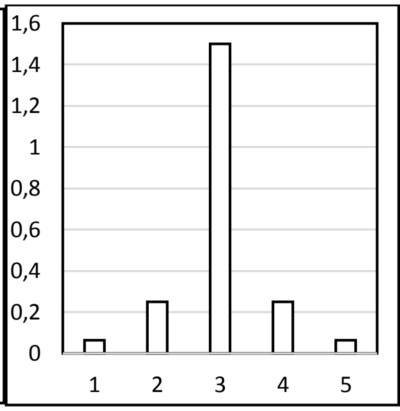
X	0	1	2						
P	0,25	0,5	0,25						
X	0	1	2	3	4				
P	0,062	0,25	1,5	0,25	0,062				
X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0,004	0,031	0,109	0,209	0,273	0,219	0,109	0,031	0,004

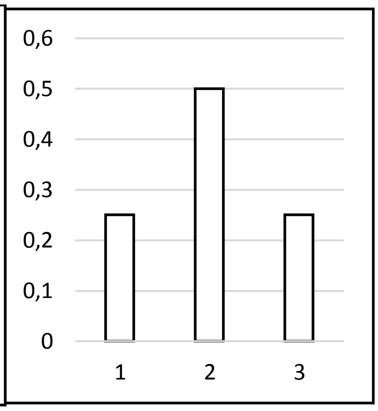
من خلال رسم المنحنيات pi لمختلف الحالات يظهر السلوك التقارب، نلاحظ من مقارنة المنحنيات كلما تزداد قيمة n فإنها تؤدي الى الحصول على منحنى ذي شكل الجرس ومتماثل حول التوقع الرياضي و من اجل التعميم نعتبر المتغيرة المعيارية: $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

و نقول:

$$X \backsim \beta(n,p) \quad Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \backsim N(0,1)$$







يقترب توزيع الثنائي الحد من شكل التوزيع الطبيعي كلما زاد حجم العينة n حتى يصل الى ما لانهاية. كما انه يقترب أكثر من التوزيع الطبيعي كلما اقتربت قيمة نجاح الحدث من النصف. وبشكل عام يمكن استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع الثنائي إذا كانت n كبيرة وبغض النظر عن قيمة p بحيث:

$$\mu = np \qquad \sigma = \sqrt{npq}$$

<u>قاعدة:</u>

في حالة n كبيرة و p ليس قريبا من الصفر، فانه يمكن اعتبار التوزيع الثنائي كتقريب جيد للتوزيع الطبيعي، ونتحصل على نتائج اكثر تقريبا كلما كانت n كبيرة اكثر.

<u>مثال (74) :</u>

نرمي قطعة نقدية 20 مرة ، وليكن X عدد مرات الحصول على الصورة. المطلوب: جد احتمال P(X=8) ؟

الحل: نقوم بحساب التوقع الرياضي الانحراف المعياري

$$\mu = np = 20 * 0.5 = 10 \qquad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{20 * 0.5 * 0.5} = 2.24$$

$$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{Z}_1 \le \mathrm{Z} \le \mathrm{Z}_2) = \mathrm{P}\left(\frac{7.5 - \mathrm{np}}{\sqrt{\mathrm{npq}}} \le \mathrm{Z} \le \frac{8.5 - \mathrm{np}}{\sqrt{\mathrm{npq}}}\right) = \mathrm{P}\left(\frac{7.5 - 10}{2.24} \le \mathrm{Z} \le \frac{8.5 - 10}{2.24}\right)}$$

$$\Rightarrow P(-1.12 \le Z \le -0.67) = \pi(-0.67) - \pi(-1.12) = \pi(1.12) - \pi(0.67)$$

$$\Rightarrow 0.86864 - 0.74857 = 0.12$$

مثال (75) :

العائلات التي لديها 10 أطفال إذا كان المتغير العشوائيx يمثل عدد الأطفال الذكور لدى العائلة. جد احتمال ان يكون عدد الذكور واقع بين 6 و 3 مستخدما التوزيع الطبيعي والثنائي.

الحل:

أولا : نطبق التوزيع الثنائي الحد

$$X \backsim \beta(x,n,p) \Rightarrow \beta\left(x,10,\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\mathrm{P(X=x)} = \mathrm{C}_n^x \mathrm{p^x q^{n-x}} = \frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{x!\,(n-x)!}}\mathrm{p^x q^{n-x}}}$$

$$P(3 \le x \le 6) = P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) + P(x=6)$$

$$\mathrm{p(x=3)} = \mathrm{C}_{10}^{3}(0.5)^3(0.5)^7 = \frac{10!}{3!\,(10-3)!}(0.5)^3(0.5)^7 = 0.117$$

10!

$$\mathrm{p(x=5)} = \mathrm{C}_{10}^{5}(0.5)^5(0.5)^5 = \frac{10!}{5!\,(10-5)!}(0.5)^5(0.5)^5 = 0.246$$

$$\mathrm{p(x=6)} = \mathrm{C}_{10}^{6}(0.5)^6(0.5)^4 = \frac{10!}{6!\,(10-6)!}(0.5)^6(0.5)^4 = 0.205$$

$$P(3 \le x \le 6) = 0.117 + 0.205 + 0.246 + 0.205 = 0.773$$

ثانيا : نطبق التوزي

نفرض ان البيانات متصلة لكي نطبق تقريب التوزيع الطبيعي، نبحث عن المعالم

$$\boxed{\mu = np = 10 * \frac{1}{2} = 5}$$

$$\boxed{\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10 * \frac{1}{2} * \frac{1}{2}} = 1.58}$$

بتعويض في القيمة المعيارية:Z

$$\mathrm{Z_1} = \frac{\mathrm{x_i} - \mu}{\sigma} = \frac{(3-0.5)-5}{1.58} = -1.58$$

$$\mathrm{Z_2} = \frac{\mathrm{x_i} - \mu}{\sigma} = \frac{(6+0.5)-5}{1.58} = 0.95$$

$$P(3 \leq x \leq 6) = P(Z_1 \leq Z \leq Z_2) = P(-1.58 \leq Z \leq 0.95)$$

$$\boxed{\Rightarrow \pi(0.95) - \pi(-1.58) = 0.82894 - [1 - \pi(1.58)] = 0.82894 + 0.94295 - 1 = 0.77189}$$

نلاحظ ان الفرق بين احتمال توزيع الثنائي الحد وتقريب احتمال توزيع الطبيعي صغير جيدا:

0.773-0.771=0.002 و يمثل مقدار الخطاء في التقريب.

ملاحظة: لكي نستخدم التوزيع الطبيعي يجب ان يكون كل من الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع الثنائي متساويين للوسط الحسابي والانحراف المعياري التوزيع الطبيعي أي:

$$\mu = np \ , \sigma^2 = npq \ , \sigma = \sqrt{npq}$$

3.التوزيع المنتظم

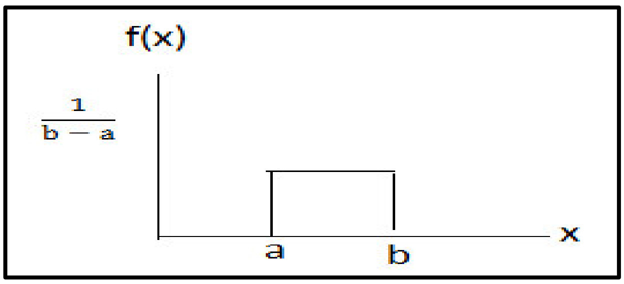
1.3.مفهوم التوزيع المنتظم

يعود التوزيع المنتظم من التوزيعات الاحتمالية المتصلة المهمة من التطبيقات في الواقع العملي، اذ يستخدم لحساب الاحتمالات المناسبة لهذه التطبيقات.

نلجأ الى التوزيع المنتظم عادة عندما تكون القيم المراد إيجاد احتمالها، توقعها، تبايناها او انحرافها المعياري واقعة بين قيمتين معلومتين مثل الفترة المغلقة [a,b] بحيث تكون هده القيم متساوية الاحتمال.

شكل دالة كثافة الاحتمال: هو توزيع له دالة احتمال ثابتة، يستخدم في حالة الظواهر التي يمكن ان تحدث بشكل منتظم، إذا كان x متغير عشوائي له توزيع منتظم بين a, b فان دالة كثافة احتمالية تأخذ الشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{b-a}} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$



نقول عن f(x) انها دالة الكثافة إذا تحققت الشروط التالية:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1 , f(x) \geq 0$$

x يؤول الى توزيع منتظم بمعلمتين هما a b ويرمز كما يلي: $X \sim U(a,b)$

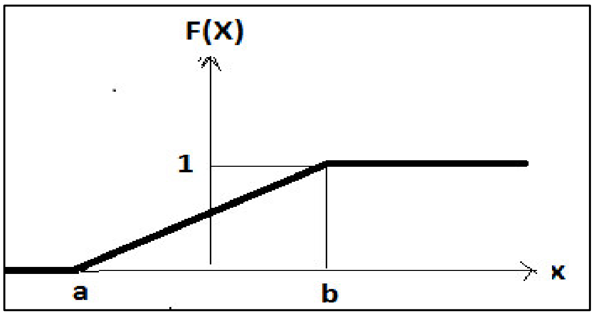
دالة التوزيع التراكمي:

يمكن إيجاد دالة التوزيع التراكمي كما يلي $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dt = \frac{1}{b-a}[t]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$

يمكن كتابة دالة التوزيع كما يلي:

$$\mathrm{F(x)} = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

التمثيل البياني لدالة التوزيع



2.3.القيم العددية المميزة للمتغير الخاضع لتوزع المنتظم

التوقع الرياضي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b$$

$$\Rightarrow \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$

حساب التباين $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{2}\right]_a^b \Rightarrow \frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$$

$$V(X)=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$

$$V(X)=\frac{(b-a)(b^2+a^2-2ab)}{12(b-a)}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

الانحراف المعياري يحسب كما يلي:

$$\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}=\sigma=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

<u>مثال76</u>

استورد أحد المراكز التجارية 1500 طن بطاطا، ووضعها في مخزن، وقام ببيعها بكميات متساوية على مدار شهور السنة. إذا كانت الفترة الزمنية للبيع تتبع توزيع منتظم، اوجد الاتي:

1. دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية للبيع؟
2. بعد مرور سبعة أشهر في بداية البيع، ما هي الكمية الموجودة بالمخزن؟

الحل:

السؤال الأول: دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن:

بفرض x يعبر عن الفترة الزمنية للبيع مقاسة بالشهر أي: $0\le x\le 12$

يمكن اخذ دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{12} & 0\le x\le 12\\ 0 & \text{si non}\end{cases}$$

السؤال الثاني: بعد مرور سبعة أشهر في بداية البيع، نحسب

$$P(X>7)=1-F(7)=1-\left(\frac{7-0}{12-0}\right)=1-0.583=0.417$$

من هنا نستنتج الكمية الموجودة في المخزن: طن 1500*0.417= 625.5

<u>مثال77</u>

إذا كان المتغير العشوائي يخضع لتوزيع منتظم في الفترة 0-10 اوجد الاحتمالات التالية:

$$P(x<3),P(x>6),P(3\le x\le 8)$$

احسب التوقع الرياضي والتباين؟

الحل:

$$P(x<3)=\int_0^3 \frac{1}{10}dx=F(3)=\frac{3}{10}$$

$$P(x>6)=\int_6^{10} \frac{1}{10}dx=F(10)-F(6)=\frac{4}{10}$$

$$P(3\le x\le 8)=\int_3^8 \frac{1}{10}dx=F(8)-F(3)=\frac{8}{10}-\frac{3}{10}=\frac{5}{10}$$

حساب التوقع الرياضي:

$$E(X)=\frac{b+a}{2}=\frac{10+0}{2}=5$$

حساب التباين:

$$V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(10-0)^2}{12}=8.33$$

4.التوزيع الاسي

1.4.مفهوم التوزيع الاسي:

يستخدم التوزيع الاسي لمعالجة بعض التطبيقات الإحصائية المتعلقة بقياس الزمن، مثل مدة مكالمات هاتفية، مدة انتظار الزبون،...الخ، بصفة عامة يستخدم التوزيع الاسي لتمثيل مدة حياة ظاهرة ما اذا كان لها متوسط ثابت و مدة حياة الظاهرة بعد لحظة ما T لا تتبع اللحظة T أي لا تتأثر بالمدة التي عايشتها الظاهرة من قبل.

شكل دالة الكثافة الاحتمالية

إذا كان المتغير X متغير عشوائي له توزيع اسي، مداه هو $0<x<\infty$ فان دالة كثافة الاحتمال تكتب على الشكل التالي:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x\ge 0\\ 0, \quad\quad x<0\end{cases}$$

دالة التوزيع التراكمي:

تأخذ دالة التوزيع التراكمي الشكل الاتي:

$$F(x)=P(X\le x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt=\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^x=1-e^{-\lambda x}$$

القيم العددية المميزة للتغير عشوائي الخاضع لتوزيع الاسي

$$E(X) = \int_0^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx$$

نجري عملية التكامل بالتجزئة: نفرض

$$U = x \Rightarrow U = dx$$

$$V = \lambda e^{-\lambda x} \Rightarrow V = -e^{-\lambda x}$$

مثال78

نفرض بان طول المكالمة الهاتفية بوحدة الدقائق تخضع لتوزيع الاسي الذي معلمته تساوي: 1/10

ولنفرض بان أحد الأشخاص وصل الى كبانيه تلفون عام فجاه. اوجد احتمال بان هذا الشخص سينتظر أكثر من 10 دقائق، ان ينتظر بين 20 – 10 دقيقة؟

الحل:

نفرض x يرمز الى طول المكالمة التي يحر بها شخص في كبانه التلفون وبالتالي:

$$P(x > 10) = \int_{10}^{\infty} e^{-\frac{1}{10}x}dx = 1 - F(10) = e^{-1}$$

$$P(10 \leq x \leq 20) = F(20) - F(10) = (1 - e^{-2}) - (1 - e^{-1}) = 0.36 - 0.135 = 0.22$$

تمارين عامة محلولة

تمرين01:

لدينا 3 عناصر متميزة مثنى مثنى وهي الأحرف ABCD حيث نكرر ABC مرتين ويتكرر D ثلاث مرات، جد عدد التباديل المختلفة؟

الحل:

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 2 + 2 + 2 + 3 = 9$$

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

$$P_9^{2,2,2,3} = \frac{9!}{2!2!2!3!} = 7560$$

تمرين02:

في احدى المناسبات الهامة حضر 5 رجال من الاتحاد العام للعمال و4 نساء من الاتحاد النسائي، فخصصت لهم الهيئة المنظمة الصف الأول وبه 9 مقاعد، بكم طريقة يشغل هؤلاء الصف المخصص لهم بحيث تشغل النساء الأماكن ذات الرقم الزوجي؟

الحل:

عدد الطرق لجلوس الرجال $n! = 5! = 5*4*3*2*1 = 120$

عدد الطرق لجلوس النساء : $n! = 4! = 4*3*2*1 = 24$

و منه عدد الطرق الممكنة هو: $5!*4! = 2880$

تمرين03:

7 أشخاص يتجولون في الجبل، 3 منهم جبليون و4 منهم سواح. بكم طريقة مختلفة يمكن ان يكون الأشخاص السبعة يتجولون علما ان الأول والأخير جبليان؟

الحل:

عدد الطرق المختلفة أي نأخذ بعين الاعتبار الترتيب: الدينا الساحين والجبليون أي اختيار الجبليان

يكون
$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$
$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3*2*1}{(1)!} = 6$$

نختار الشخص الأول والأخير من بين سبعة اشخاص نأخذ بعين الاعتبار التبديل:

$$P(n-2) = p(7-2) = P5 = 5\,! = 120$$

وعليه يكون الأشخاص الخمسة ب $A_n^p * P_n = A_3^2 * P_5 = 6*120 = 720$

تمرين04

ما هو عدد لوحات السيارة التي يمكن الحصول عليها من استعمال حرفين من الأحرف الأبجدية عددها 27 وثلاث ارقام الى يسار الأحرف وذلك في الحالات التالية:

عدم تكرار الحرف والرقم؟

تكرار الحرف وعدم تكرار الرقم؟

تكرار الحرف وتكرار الرقم؟

الحل:

السؤال الأول: عدم تكرار الحرف والرقم نطبق الترتب:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$
$$A_n^p = A_{27}^2 * A_{10}^3 = \frac{27!}{(27-2)} * \frac{10!}{(10-3)!} = 505440$$

السؤال الثني: تكرار الحرف وعدم تكرار الرقم. لدينا:

حرفين أبجدية	ثلاث ارقام
عدد الحروف 27	عدد الأرقام 10
تكرار الحروف	عدم تكرار الارقام
القانون : n^p	القانون : A_n^p

ومنه نتحصل على: $A_n^p * n^p = A_{10}^3 * 27^2 = 524880$

السؤال الثلث: تكرار الحرف وتكرار الرقم:

حرفين أبجدية	ثلاث ارقام
عدد الحروف 27	عدد الأرقام 10
تكرار الحروف	تكرار الارقام
القانون : n^p	القانون : n^p

ومنه نتحصل على:

$$n^p = 10^3 * 27^2 = 729000$$

تمرين05:

قررت إدارة شركة ما من افاد شخصا 12للحضور الى اجتماع تنسيقي جهوي ووضعت تحت تصرفهم 3 سيارات ب 6 مقاعد، 4 مقاعد ومقعدين، بكم طريقة مختلفة يمكن توجيه هؤلاء الأشخاص الى السيارات الثلاث بفرض ان:

1. أي شخص من هؤلاء يمكنهم السياقة أي كلهم لهم شهادة السياقة
2. فقط هناك 4أشخاص من بين 12 شخص لهم شهادة السياقة؟

الحل:

السؤال الأول: التبديل مع التكرار والتكرار يتمثل في عدد المقاعد:

$$n = n_1 + n_2 + n_3 = 6 + 4 + 2 = 12$$

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

$$P_{12}^{6,4,2.} = \frac{9!}{6!4!2!} = 13860$$

السؤال الثاني: نطبق الترتيب والتبديل أي:

$$P_{n-3}^{n_{n-1}, n_{n-2}, n_{n-3}} = \frac{(12-3)!}{(6-1)!(4-1)!(2-1)!} = \frac{9!}{5!3!1!} = 504$$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \to A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

$$P_{n-3}^{n_{n-1}, n_{n-2}, n_{n-3}} * A_n^p = P_9^{5,3,1} * A_4^3 = 12096$$

تمرين06:

صندوق به 10 كرات منها 3 خضراء و7 صفراء، نسحب 4 كرات على التوالي ودون ارجاع، ما احتمال الحصول:

1) 3 كريات صفراء وكرة خضراء بهذا الترتيب؟
2) 3 كريات صفراء وكرة خضراء؟
3) على الأقل 3 كريات خضراء؟

الحل:

السحب	المجموع	كريات صفراء J	كريات خضراءv
4	10	7	3

عد السحابات : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = 5040$

السؤال الأول: الحصول على 3 كريات صفراء وكرة خضراء بهذا الترتيب:

$$P_1 = \frac{(JJJV)}{A_{10}^4} = \frac{A_7^3 * A_3^1}{A_{10}^4} = 0.125$$

السؤال الثاني: الحصول على 3 كريات صفراء وكرة خضراء:

$$P_2 = \frac{(JJJV)+(VJJJJ)+(JVJJ)+(JJVJ)}{A_{10}^4} = \frac{4*(A_7^3 * A_3^1)}{A_{10}^4} = 0.5$$

السؤال الثالث: الحصول على الأقل 3 كريات خضراء:

$$P_3 = \frac{(VVVJ)+(JVVV)+(VJVV)+(VVJV)}{A_{10}^4} = \frac{4*(A_7^3 * A_3^1)}{A_{10}^4} = 0.03$$

تمرين 07:

صندوق به 8 كرات منها 2 بيضاء 3 حمراء و3سوداء، نسحب 3 كرات على التوالي بالإرجاع، ما احتمال الحصول:

1) 3 كريات من نفس اللون؟
2) كرة بيضاء وكرتين سوداوين؟

الحل:

السحب	المجموع	كريات سوداءN	كريات حمراءR	كريات بيضاءB
3	8	3	3	2

ان السحب على التوالي وبالإرجاع فهي قائمة

عدد السحابات : $n^p = 8^3 = 512$

السؤال الأول: الحصول على 3 كريات من نفس اللون.

$$P_1 = \frac{(BBB)(RRR)(NNN)}{n^p} = \frac{n_1^p * n_2^p * n_3^p}{n^p} = \frac{2^3 * 3^3 * 3^3}{8^3} = 0.12$$

السؤال الثاني: الحصول على كرة بيضاء وكرتين سوداوين.

$$P_2=\frac{(BNN)+(NNB)+(NBN)}{n^p}=\frac{n_1^p+n_2^p+n_3^p}{n^p}=\frac{(2^1*3^2)+(2^1*3^2)+(2^1*3^2)}{8^3}=0.10$$

تمرين 08:

صندوق به 8 كرات منها 2 بيضاء 3 حمراء و3سوداء، نسحب 3 كرات على التوالي بدون ارجاع، ما احتمال الحصول:

1) 3 كريات من نفس اللون؟
2) كرة بيضاء وكرتين سوداوين؟

الحل:

السحب	المجموع	كريات سوداءN	كريات حمراءR	كريات بيضاءB
3	8	3	3	2

السحب على التوالي وبدون ارجاع اذن نطبق الترتيب p<n

عدد الساحبات: $A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}=A_8^3=\frac{8!}{(8-3)!}=336$

السؤال الأول: الحصول على 3 كريات من نفس اللون.

$$P_1=\frac{(RRR)+(NNN)}{A_n^p}=\frac{A_{n1}^p+A_{n2}^p}{A_n^p}=\frac{A_3^3+A_3^3}{A_8^3}=0.036$$

السؤال الثاني: الحصول على كرة بيضاء وكرتين سوداوين.

$$P_1=\frac{(BNN)+(NBN)+(NNB)}{A_n^p}=\frac{(A_{n1}^p*A_{n2}^p)+(A_{n3}^p*A_{n4}^p)+(A_{n5}^p*A_{n6}^p)}{A_n^p}$$

$$p_1==\frac{(A_2^1*A_3^2)+(A_3^2*A_2^1)+(A_3^2*A_2^1)}{A_8^3}=0.107$$

تمرين 09:

صندوق به 8 كرات منها 2 بيضاء 3 حمراء و3سوداء، نسحب 3 كرات في ان واحد، ما احتمال الحصول:

1) 3 كريات من نفس اللون؟

2) كرة بيضاء وكرتين سوداوين؟

الحل:

كريات بيضاءB	كريات حمراءR	كريات سوداءN	المجموع	السحب
2	3	3	8	3

ان السحب في ان واحد فهي توفيقة

عدد السحابات : $c_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = c_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$

السؤال الأول: الحصول على 3 كريات من نفس اللون.

$$P_1 = \frac{(RRR)+(NNN)}{c_n^p} = \frac{c_{n1}^p + c_{n2}^p}{c_n^p} = \frac{c_3^3 + c_3^3}{c_8^3} = 0.035$$

السؤال الثاني: الحصول على كرة بيضاء وكرتين سوداوين.

$$P_1 = \frac{(BNN)}{c_n^p} = \frac{\left(c_{n1}^p * c_{n2}^p\right)}{c_n^p} = \frac{c_3^2 * c_2^1}{c_8^3} = 0.107$$

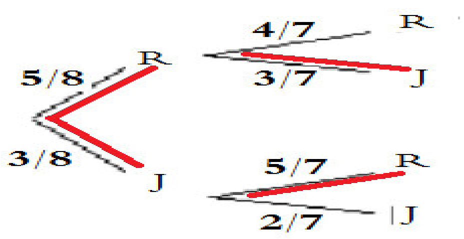
تمرين 10

يحتوي صندوق على 8 كرات، منهم 5 كرات حمراء مرقمة من [5 4 3 2 1] و3كرات صفراء مرقمة من [3 2 1] نسحب على التوالي دون ارجاع كرتين. السؤال:

1. مثل شجرة الاحتمالات؟
2. احسب احتمال الحصول على كرة صفراء باستعمال طريقتين؟
3. ليكن x متغير عشوائي الذي يرفق كل سحب لعدد الأرقام الفردية المسحوبة. عين قانون احتمال المتغير العشوائي؟ احسب التوقع الرياضي والتباين لهذا المتغير.

الحل

السؤال الأول: تمثيل شجرة الاحتمالات



بما ان السحب على التوالي وبدون ارجاع نطبق الترتيبية والقانون يكتب كما يلي: A_n^p ويمثل الحالات الممكنة.

$$A_n^p = A_8^2 = 56$$

السؤال الثاني: احتمال الحصول على كرة صفراء الطريقة الأولى نستعمل الشجرة

p(J) = 5/8*3/7+3/8*5/7= 0.53

احتمال الحصول على كرة صفراء الطريقة الثانية نستعمل الترتيب

$$P(J) = \text{معامل الترتيب}\frac{(A_3^1 * A_5^1)}{(56)} = \frac{(1+1)!}{(1*1)!} * \frac{15}{56} = 0.53$$

السؤال الثالث. تحديد قانون للمتغير العشوائي الذي يرفق كل سحب لعدد الأرقام الفردية المسحوبة

الأرقام الفردية هي: [3 1 5 3 1]   والأرقام الزوجية هي: [2 4 2]

$$P(x=0) = \frac{(A_5^0 * A_3^2)}{(56)} = \frac{6}{56}$$

$$P(x=1) = \text{معامل الترتيب}\frac{(A_3^1 * A_5^1)}{(56)} = \frac{(1+1)!}{(1*1)!} * \frac{30}{56}$$

$$P(x=2) = \frac{(A_3^0 * A_5^2)}{(56)} = \frac{20}{56}$$

جدول قانون التوزيع الاحتمالي

	2	1	0	Xi
1	20/56	30/56	6/56	Pi
70/56	40/56	30/56	0	xi*pi
	4	1	0	xi^2
110/56	80/56	30/56	0	xi^2 *pi

التوقع الرياضي يساوي 70/56

$$E(x) = \sum x_i * p_i$$

التباين يساوي $110/56 - (70/56)^2 = 0.4$

$$V(x) = \sum x_i^2 * p_i - \left(\sum x_i * p_i\right)^2 = 0.4$$

تمرين 11

نرمي زهرة نرد مزورة ومرقمة من الواحد الى ستة مرة واحدة. بحيث احتمال الرقم الفردي يساوي ضعف الرقم الزوجي. السؤال:

ماهو احتمال كل وجه؟

احسب احتمال الحوادث التالية:

1. ظهور الرقم الفردي
2. ظهور الرقم الزوجي
3. ظهور الرقم الفردي والزوجي [1 2 3 4]

الحل

السؤال الأول: احتمال كل وجه $p(1) = p(3) = p(5) = 2x$ و $p(2)=p(4)=p(6)= x$

$$P = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$$
$$P = 2x + x + 2x + x + 2x + x = 1$$

الأرقام الفردية $p(1) = p(3) = p(5) = 2x = \frac{2}{9}$ الأرقام الزوجية $p(2) = p(4) = p(6) = x = \frac{1}{9}$

احتمال الحصول على الحدث A $p(A) = p(1) + p(3) + p(5) = \frac{6}{9}$

احتمال الحصول على الحدث B $p(B) = p(2) + p(4) + p(6) = \frac{3}{9}$

احتمال الحصول على الحدثC $p(C) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = \frac{6}{9}$

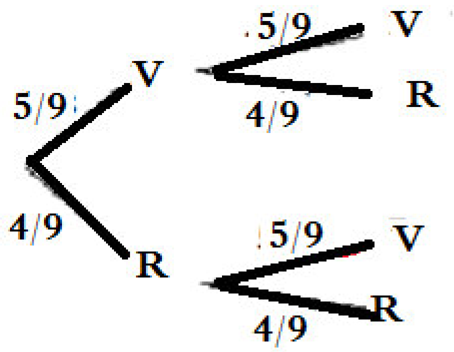
تمرين 12

كيس يحتوي على5 كرات خضراء و4كرات حمراء، نسحب على التولي بالإرجاع كرتين. السؤال

1. ماهو عدد الساحبات الممكنة؟
2. احسب الاحتمال للحصول على كرتين بنفس اللون؟
3. احسب احتمال الحصول على كرتين بلونين مختلفين؟
4. احسب الاحتمال الحصول على الاقل كرة خضرة واحدة؟

الحل

السؤال الأول: الحالات الممكنة



الحالات الممكنة $81= 9^2= n^p$

تمرين13:

اقتطع 16 مسافرا تذاكر في المحطة A بحيث

7منهم يتوجهون إلى المحطة B بسعر 50 دينار للتذكرة الواحدة

5 منهم يتوجهون إلى المحطة C بسعر 60 دينار للتذكرة الواحدة.

4 منهم يتوجهون إلى المحطة Dبسعر 75 دينار للتذكرة الواحدة .

1. نختار عشوائيا واحدا من هؤلاء المسافرين .المتغير العشوائي الذي يرفق بكل مسافر سعر تذكرته بالدينار .

أ – عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي x

ب– احسب التوقع الرياضي للمتغير العشوائيx

2.نختار عشوائيا ثلاثة من هؤلاء المسافرين.

أ– احسب احتمال أن يكون لهؤلاء المسافرين اتجاهات مختلفة.

ب– احسب احتمال أن يكون اتجاه مسافر واحد على الأقل هو نحو المحطة B

ج– ما هو احتمال أن يكون اتجاه المسافرين الثلاثة هو المحطة B علما أنّهم مسافرين في نفس الاتجاه.

الحل:

السؤال الاول: لدينا x هو المتغير العشوائي الذي يرفق بكل مسافر سعر تذكرته بالدينار.

أ– قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x:

xi	50	60	75	المجموع
P(X=xi)	7/16	5/16	4/16	1

7مسافرين من بين 16يتوجهون إلى المحطة B بسعر 50 دينار للتذكرة الواحدة : $p(x=50)=\frac{7}{16}$

5 مسافرين من بين 16 يتوجهون إلى المحطة C بسعر 60 دينار للتذكرة الواحدة $p(x=60)=\frac{5}{16}$.

4 مسافرين من بين 16 يتوجهون إلى المحطة Dبسعر 75 دينار للتذكرة الواحدة $p(x=75)=\frac{4}{16}$.

ومنه الجدول للقانون التوزيع الاحتمالي يكون كما يلي:

ب- حساب التوقع الرياضي: $E(x)=\sum x_i * p_i$

xi	50	60	75	المجموع
P(X=xi)	7/16	5/16	4/16	1
xi*pi	350/16	300/16	300/16	950/16=59.37

التوقع الرياضي للمتغير العشوائي يساوي 59.37

السؤال الثاني: نختار عشوائيا ثلاثة من هؤلاء المسافرين.

أ- حساب احتمال أن يكون لهؤلاء المسافرين اتجاهات مختلفة. عدد الطرق العشوائية لاختيار ثلاثة من هؤلاء المسافرين:

$$c_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}=c_{16}^3=\frac{16!}{3!(16-3)!}=560$$

أ- لتكون V1 الحادثة " للمسافرين الثلاثة باتجاهات مختلفة:

$$p(V_1)=\frac{c_7^1 * c_5^1 * c_4^1}{c_{16}^3}=\frac{140}{560}=0.25$$

ب- حساب احتمال أن يكون اتجاه مسافر واحد على الأقل هو نحو المحطةB

لتكون V_2 حادثة لا أحد من المسافرين الثلاثة متجه نحو المحطة: B لدينا 7 لهم اتجاه B و 9 عدم اتجاه B

$$p(V_2)=\frac{c_9^3}{c_{16}^3}=\frac{84}{560}=0.15$$

الحادثة النافية يكون اتجاه مسافر واحد على الأقل هو نحو المحطة B :

$$p(\overline{V}_2) = 1 - p(V_2) = 1 - 0.15 = 0.85$$

ج- حساب احتمال أن يكون اتجاه المسافرين الثلاثة هو المحطة B ،علما أنّهم مسافرين في نفس الاتجاه

لتكون الحادثة E المسافرين الثلاثة لهم نفس الاتجاه. اولا نحسب الاحتمال ان يكون المسافرين في نفس الاتجاه. $p(E) = \dfrac{c_7^3 + c_5^3 + c_4^3}{c_{16}^3} = 0.087$

لتكون الحادثة F المسافرين الثلاثة لهم اتجاه نحو المحطة B. ثانيا نحسب الاحتمال ان يكون المسافرين في اتجاه المحطةB : $p(E) = \dfrac{c_7^3}{c_{16}^3} = \dfrac{35}{560} = 0.06$

الحادثة :احتمال أن يكون اتجاه المسافرين الثلاثة هو المحطة B ، علما انهم مسافرين في نفس الاتجاه

$$p(F / E) = \frac{P(F \cap E)}{p(E)} = \frac{5}{7} = 0.71$$

تمرين14

وعاء يحتوي على كرتين زرقاء 5 سوداء و3 كرات حمراء. نسحب على التوالي دون ارجاع الكرة المسحوبة:

1. ما هو احتمال ان تكون الكرة الثانية حمراء؟
2. ما هو احتمال ان تكون الكرة الثانية بيضاء؟

الحل:

السحب بدون ارجاع:

السؤال الأول: احتمال ان تكون الكرة الثانية حمراء هو:

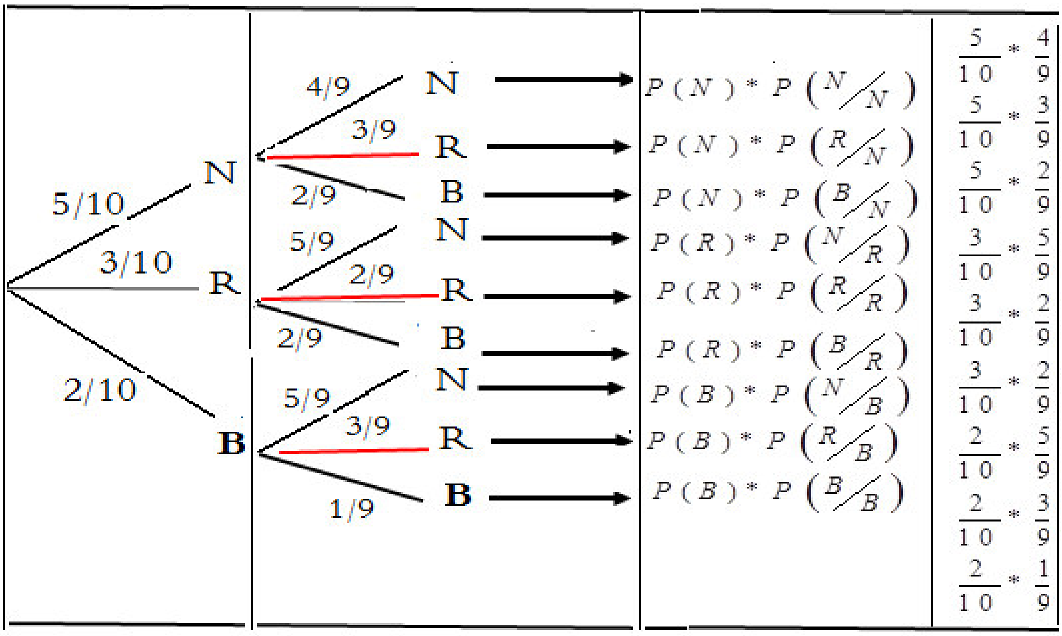
$$P(N) * P\left(R/N\right) + P(R) * P\left(R/R\right) + P(B) * P\left(R/B\right) =$$

$$\frac{5}{10} * \frac{3}{9} + \frac{3}{10} * \frac{2}{9} + \frac{2}{10} * \frac{3}{9} = 0.27$$

السؤال الثاني: احتمال ان تكون الكرة الثانية بيضاء هو:

$$P(N) * P\left(B/N\right) + P(R) * P\left(B/R\right) + P(B) * P\left(B/B\right) =$$

$$\frac{5}{10} * \frac{2}{9} + \frac{3}{10} * \frac{2}{9} + \frac{2}{10} * \frac{1}{9} = 0.18$$



تمرين15:

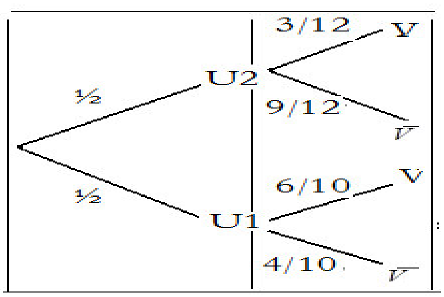
اناء U_1 يحتوي على 10 كرات منها 6 خضراء واناء 2U يحتوي على12كرة منها3 خضراء. نرمي قطعة نقدية بها شعار الرقم، فاذا ظهر الرقم قمنا بسحب كرة من U_1، إذا ظهر الشعار قمنا بسحب كرة من U_2.

1. ماهو احتمال سحب كرة خضراء؟
2. ماهو احتمال ان يكون السحب من U_1 علما ان الكرة المسحوبة خضراء؟

الحل:

$U_1=10$	$U_2=12$
3V	6V

الشجرة البيانية للاحتمالات تكون كما يلي:



من الشجرة البيانية نتحصل على النتائج التالية:

$$P(U_2)*P\left(V/U_2\right)=\frac{1}{2}*\frac{3}{12}$$
$$P(U_2)*P\left(\bar{V}/U_2\right)=\frac{1}{2}*\frac{9}{12}$$
$$P(U_1)*P\left(V/U_1\right)=\frac{1}{2}*\frac{6}{10}$$
$$P(U_1)*P\left(\bar{V}/U_1\right)=\frac{1}{2}*\frac{4}{10}$$

السؤال الاول: احتمال سحب كرة خضراء:

$$P(V)=P(U_2)*P\left(V/U_2\right)+P(U_1)*P\left(V/U_1\right)=$$
$$\frac{1}{2}*\frac{3}{12}+\frac{1}{2}*\frac{6}{10}=\frac{17}{40}=0.42$$

السؤال الثاني: احتمال ان يكون السحب من U_1 علما ان الكرة المسحوبة خضراء؟

$$P\left(U_1/V\right)=\frac{P(U_1\cap V)}{P(V)}$$
$$P(V)=P(U_2)*P\left(V/U_2\right)+P(U_1)*P\left(V/U_1\right)$$
$$P\left(U_1/V\right)=\frac{P(U_1)*P\left(V/U_1\right)}{P(U_2)*P\left(V/U_2\right)+P(U_1)*P\left(V/U_1\right)}$$
$$P\left(U_1/V\right)=\frac{\frac{1}{2}*\frac{6}{10}}{0.42}=\frac{0.3}{0.42}=0.71$$

تمرين 16:

في مصنع الهاتف النقال 2% من انتاجه فاسدا، فقررت الإدارة مراقبة الإنتاج الفاسد عن طريق برنامج الحاسوب. إذا كانت القطعة صالحة تقبل باحتمال 0.96، إذا كانت القطعة فاسدة ترفض باحتمال 0.98. ليكن لدينا الحادثين: E_1 القطعة فاسدة ومقبولة وE_2 القطعة صالحة ومرفوضة. المطلوب:

1. احسب الاحتمال $P(E_1), P(E_2)$
2. احسب الاحتمال ان يكن خلال في البرنامج؟
3. احسب الاحتمال ان القطعة صالحة علما انها رفضت؟
4. احسب الاحتمال ان القطعة فاسدة علما انها مرفوضة؟
5. ارسم الشجرة البيانية للاحتمالات؟

الحل:

نفرض الرمز للأحداث التالية:

الحدث: القطعة صالحة S والقطعة فاسدة $\bar{S}$

الحدث: القطعة مقبولةM والقطعة مرفوضة $\bar{M}$

السؤال الأول: حساب الاحتمال $P(E_1), P(E_2)$

$$P(E_1)=P(\bar{S})*P\left(M/\bar{S}\right)=0.02*0.02=0.0004=4.10^{-4}$$
$$P(E_2)=P(S)*P\left(\bar{M}/S\right)=0.98*0.04=0.0392=3.92*10^{-2}$$

السؤال الثاني: حساب الاحتمال ان يكن خلال في البرنامج: معناه إذا كانت فاسدة يقبلها او إذا كانت صالحة يرفضها هو:

نرمز للحادثة خلال في البرنامج بالرمز F

$$P(F)=P(S,\bar{M}) \text{ أو } P(\bar{S},M)$$
$$P(F)=P(S\cap\bar{M})+P(\bar{S}\cap M)$$
$$P(F)=P(E_1)+P(E_2)=0.0396=3.96*10^{-2}$$

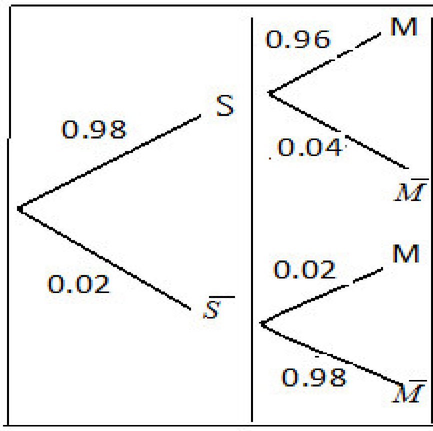
السؤال الثالث: حساب الاحتمال ان القطعة صالحة علما انها رفضت:

$$P\left(S/\bar{M}\right)=\frac{P(S\cap\bar{M})}{P(\bar{M})}=\frac{P(S)*P\left(\bar{M}/S\right)}{P(\bar{M})}$$
$$P(\bar{M})=P(S)*P\left(\bar{M}/S\right)+P(\bar{S})*P\left(\bar{M}/\bar{S}\right)$$
$$P\left(S/\bar{M}\right)=\frac{P(S)*P\left(\bar{M}/S\right)}{P(S)*P\left(\bar{M}/S\right)+P(\bar{S})*P\left(\bar{M}/\bar{S}\right)}$$
$$P\left(S/\bar{M}\right)=\frac{0.98*0.04}{0.98*0.04+0.02*0.98}=\frac{0.0392}{0.0392+0.0196}=0.67$$

السؤال الرابع: حساب الاحتمال ان القطعة فاسدة علما انها مرفوضة:

$$P\left(\bar{S}/\bar{M}\right)=\frac{P(\bar{S}\cap\bar{M})}{P(\bar{M})}=\frac{P(\bar{S})*P\left(\bar{M}/\bar{S}\right)}{P(\bar{M})}$$
$$P(\bar{M})=P(S)*P\left(\bar{M}/S\right)+P(\bar{S})*P\left(\bar{M}/\bar{S}\right)$$
$$P\left(\bar{S}/\bar{M}\right)=\frac{P(\bar{S})*P\left(\bar{M}/\bar{S}\right)}{P(S)*P\left(\bar{M}/S\right)+P(\bar{S})*P\left(\bar{M}/\bar{S}\right)}$$
$$P\left(\bar{S}/\bar{M}\right)=\frac{0.02*0.98}{0.98*0.04+0.02*0.98}=\frac{0.0196}{0.0392+0.0196}=0.33$$

السؤال الخامس: رسم الشجارة البيانية للاحتمالات:



نتائج الاحتمالات

$P(S).P\left(M/S\right) = 0.98 * 0.96 = 0.9408$

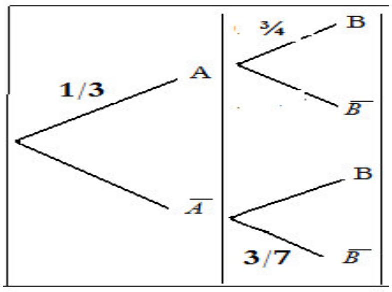
$P(S).P\left(\bar{M}/S\right) = 0.98 * 0.0.04 = 0.0392$

$P(\bar{S}).P\left(M/\bar{S}\right) = 0.02 * 0.02 = 0.0004$

$P(\bar{S}).P\left(\bar{M}/\bar{S}\right) = 0.02 * 0.98 = 0.0196$

<u>تمرين 17:</u>

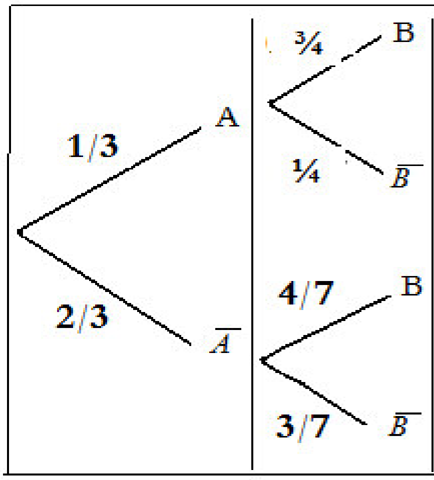
باستعمال المعطيات المدونة على الشجرة المقابلة احسب ما يلي:



$$P(\bar{A}),P\left(\bar{B}/A\right),P\left(\bar{B}/\bar{A}\right),P(A\cap B),P(A\cap\bar{B}),P(\bar{A}\cap B),P(\bar{A}\cap\bar{B})$$

<u>الحل:</u>

أولا نكمل نتائج الشجرة الاحتمالية:



نتائج الاحتمالات

$P(A)*P\left(B/A\right) = \frac{1}{3}*\frac{3}{4} = \frac{3}{12} = 0.2500$

$P(A)*P\left(\bar{B}/A\right) = \frac{1}{3}*\frac{1}{4} = \frac{1}{12} = 0.0833$

$P(\bar{A})*P\left(B/\bar{A}\right) = \frac{2}{3}*\frac{4}{7} = \frac{8}{21} = 0.3809$

$P(\bar{A})*P\left(\bar{B}/\bar{A}\right) = \frac{2}{3}*\frac{3}{7} = \frac{6}{21} = 0.2857$

ثانيا: من خلال الشجرة نقوم بحساب الاحتمالات التالية:

$$P(\bar{A})=\frac{2}{3},P\left(\bar{B}/A\right)=\frac{1}{4},P\left(\bar{B}/\bar{A}\right)=\frac{3}{7}$$
$$P(A\cap B)=\frac{1}{3}*\frac{3}{4}=\frac{3}{12},P(A\cap\bar{B})=\frac{1}{3}*\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$
$$P(\bar{A}\cap B)=\frac{2}{3}*\frac{4}{7}=\frac{8}{21},P(\bar{A}\cap\bar{B})=\frac{2}{3}*\frac{3}{7}=\frac{2}{7}$$

<u>تمرين 18:</u>

A, B حادثان بحيث : $P(A)=\frac{2}{3},P(B)=\frac{1}{4},P(A\cap B)=\frac{1}{5}$

احسب ما يلي:
$$1.P\left(B/A\right),P\left(A/B\right)?$$
$$2.P(\bar{A}\cap\bar{B}),P\left(\bar{B}/\bar{A}\right)?$$

<u>الحل:</u>

$$1.P\left(B/A\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1/5}{2/3}=\frac{3}{10}=0.3$$
$$P\left(A/B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1/5}{1/4}=\frac{4}{5}=0.8$$
$$2.P(\bar{A}\cap\bar{B})=?$$
$$P\left(\overline{A\cup B}\right)=P(\bar{A}\cap\bar{B})$$
$$P\left(\overline{A\cap B}\right)=P(\bar{A}\cup\bar{B})$$
$$P(\bar{A}\cap\bar{B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]=1-\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right]=\frac{17}{60}=0.28$$
$$P\left(\bar{B}/\bar{A}\right)=\frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{A})}=\frac{17/60}{1-P(A)}=\frac{17/60}{1-\frac{1}{3}}=\frac{17}{20}=0.85$$

<u>تمرين 18:</u>

في قسم اللغات يوجد 120 طالب يدرسون الاسبانية 40 يدرسون الإنجليزية و10 يدرسون الاسبانية والإنجليزية. نختار طالب عشوائيا من هذا القسم المطلوب:

1. ما احتمال ان يكون هذا الطالب يدرس الاسبانية او الإنجليزية؟
2. ما احتمال ان يكون هذا الطالب لا يدرس الاسبانية ولا الإنجليزية؟

الحل:

نفرض رموز الاحداث: A يدرس الإنجليزية B يدرس الاسبانية

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$P(A\cup B)=\frac{50}{120}+\frac{40}{120}-\frac{10}{120}=\frac{2}{3}$$
$$P\left(\overline{A\cap B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

تمرين 19:

كيس يحتوي على6 كرات خضراء و3 كرات حمراء، نسحب على التوالي وبالإرجاع كرتين.

المطلوب:

1. ماهو عدد الساحبات الممكنة؟
2. ماهو احتمال للحصول على كرتين بنفس اللون؟
3. ماهو احتمال للحصول على كرتين بلونين مختلفتين؟
4. ماهو احتمال للحصول على الأقل كرة خضراء واحدة؟

الحل:

بما ان السحب على التوالي وبالإرجاع نطبق قانون القائمة:

$$\Omega=\{6V,3R\}\Rightarrow n=9$$

السؤال الأول: عدد الساحبات الممكنة:

$$P=2$$
$$n^p=9^2=81$$

السؤال الثاني احتمال للحصول على كرتين بنفس اللون: أي قد تكون حمراء او خضراء، نرمز للحدث بA

$$P(A)=\frac{n_1^P+n_2^P}{n^P}=\frac{6^2+3^2}{9^2}=\frac{5}{9}=0.55$$

السؤال الثالث: احتمال للحصول على كرتين بلونين مختلفتين: نرمز للحدث بB

$$P(B)=\frac{\left(n_1^P*n_2^P\right)+\left(n_2^P*n_1^P\right)}{n^P}=\frac{2.\left(n_1^P*n_2^P\right)}{n^P}=\frac{2*6^1*3^1}{9^2}=\frac{36}{81}=0.44$$

السؤال الرابع: احتمال للحصول على الأقل كرة خضراء واحدة نرمز للحدث بC

$$P(C)=\frac{\left(n_1^P * n_2^P\right)+\left(n_2^P * n_1^P\right)+n_1^P}{n^P}=\frac{2.\left(n_1^P * n_2^P\right)+n_1^P}{n^P}=\frac{2*6^1*3^1+6^2}{9^2}=\frac{8}{9}=0.88$$

تمارين حول الفصل الرابع والخامس : التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المتصلة والمنفصلة

تمرين1

بينت دراسة ان عدد حوادث العمل في مصنع معين يخضع لتوزيع بواسوني بمعدل حادثين يوميا.

المطلوب:

1. اوجد احتمال ان لا يسجل أي حادث في يوم معين؟
2. اوجد احتمال ان يسجل حادث على الأقل في يوم واحد؟

الحل:

نعلم ان معدل الحوادث هو حادثين اذن: $\boxed{E(x)=V(x)=\lambda=2}$

السؤال الأول: احتمال ان لا يسجل أي حادث في يوم معين

$$P(x,\lambda)=P(0,2)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=\frac{e^{-2}2^0}{0!}=0.13$$

السؤال الثاني: احتمال ان يسجل حادث على الأقل في يوم واحد

$$P(x,\lambda)=P(x\geq 1)=1-P(x<1)=1-P(x=0)=1-0.13=0.87$$

تمرين2

I. مستودع به 200 سيارة، هناك 50% منها لا تكون قابلة للاستعمال الى بعد 10 دقائق من عملية تشغيل محركها. قمنا ب 5 معاينات للسيارات الموجودة بالمستودع بصورة عشوائية وبالإعادة.

1. عين دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي يمثل عدد السيارات التي لا تستعمل الا بعد 10 دقائق من عملية تشغيل المحرك، ؟
2. احسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري؟

II. في تجربة أخرى نقلنا 80 سيارة من المستودع الأول الى مستودع اخر بصورة عشوائية، فوجدنا ان 55% من السيارات لا تحتوي على البنزين.

1.ما احتمال ان نجد اكثر من 35 سيارة لا تحتوي على البنزين؟

2.ما هو عدد السيارات N الذي يكون عنده $P(x>N)=2\%$ ؟

الحل:

1. 1.تعيين دالة التوزيع الاحتمالي:

لدينا مجتمع متكون من 200 سيارة وعينة متكونة من 5 سيارات، لدينا حادثين أساسيين:

A_1 سيارات لا تستعمل الا بعد 10 دقائق $P(A_1)=0.5$

A_2 سيارات تستعمل مباشرة $P(A_2)=0.5$

السحب بالإعادة

اذن المتغير العشوائي الذي يمثل عدد السيارات التي لا تستعمل الا بعد 10 دقائق يتبع قانون التوزيع الثنائي:

$$\boxed{x_i \sim \beta(n,p) = \beta(5,0.5)}$$

والقانون يكتب كما يلي:

$$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{x}) = C_n^x \mathrm{p}^{\mathrm{x}}\mathrm{q}^{\mathrm{n-x}} = \frac{\mathrm{n}!}{\mathrm{x}!\,(\mathrm{n}-\mathrm{x})!}\mathrm{p}^{\mathrm{x}}\mathrm{q}^{\mathrm{n-x}}}$$

$$\mathrm{p}(\mathrm{x}=0) = C_5^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5!}{0!\,(5-0)!}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0.031$$

$$\mathrm{p}(\mathrm{x}=1) = C_5^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5!}{1!\,(5-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0.156$$

$$\mathrm{p}(\mathrm{x}=2) = C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5!}{2!\,(5-2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.313$$

$$\mathrm{p}(\mathrm{x}=3) = C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.313$$

$$p(x=4) = C_5^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5!}{4!\,(5-4)!}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0.156$$

$$p(x=5) = C_5^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{5!}{5!\,(5-5)!}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0.031$$

جدول قانون التوزيع الاحتمالي

xi	0	1	2	3	4	5	المجموع
pi	0.031	0.156	0.312	0.312	0.156	0.031	1

ومنه نستنتج ان مجموع الاحتمالات تساوي واحد اذن نقول ان المتغير العشوائي يخضع الى توزيع احتمالي.

2.حساب التوقع الرياضي والانحراف المعياري

$$E(x) = np = 5 * 0.5 = 2.5$$

$$\sqrt{V(x)} = \sqrt{npq} = \sqrt{5 * 0.5 * 0.5} = \sqrt{1.25} = 1.118$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.031 & 0 \le x < 1 \\ 0.187 & 1 \le x < 2 \\ 0.500 & 2 \le x < 3 \\ 0.813 & 3 \le x < 4 \\ 0.969 & 4 \le x < 5 \\ 1 & \ge 5 \end{cases}$$

2. لدينا عينة متكونة من 80 سيارة.

الحادثين الاساسين هما: B1 : سيارات بها بنزين $P(B1)=0.45$ و B2 : سيارات ليس لها بنزين $P(B2)=0.55$

نفرض x المتغير العشوائي الذي يمثل عدد السيارات التي ليس فيها بنزين، نقول ان المتغير العشوائي يخضع الى القانون التوزيع الثنائي ويكتب كما يلي:

$$\boxed{\begin{array}{c} X\sim\beta(n,p) \\ X\sim\beta(80;0.55) \end{array}}$$

ولتكن n كبيرة و $p \cong q \cong \frac{1}{2}$ اذن نستطيع تقريب المتغير العشوائي من القانون الثنائي الى القانون الطبيعي بحيث:

$$\boxed{X\sim N(np;npq)}$$

التوقع الرياضي يحسب كما يلي

$$E(X) = np = 80 * 0.55 = 44 = \mu$$

التباين يحسب كما يلي: $V(X) = npq = 80 * 0.55 * 0.45 = 19.8 = \sigma^2$

الانحراف المعياري $\sqrt{V(X)} = \sqrt{npq} = \sqrt{19.8} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma = 4.45$

$$\boxed{X \sim N(44; 19.8)}$$

السؤال الأول: احتمال ان نجد أكثر من 35 سيارة لا تحتوي على البنزين

$$P(X > 35) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{35-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{35-44}{4.45}\right) = P(Z > -2.02)$$

$$P(X > 35) = P(Z < 2.02) = 0.58706$$

السؤال الثاني: عدد السيارات الذي يكون عنده $P(X > N) = 2\%$

لدينا: $P(X > N) = 0.02$

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{N-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{N-44}{4.45}\right) = 0.02$$

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{N-44}{4.45}\right) = 0.98$$

$$\Rightarrow \frac{N-44}{4.45} = 2.06 \quad \Rightarrow N = 44 + 9.185 = 53.185 \cong 53$$

تمرين3:

نفرض متغير عشوائي حقيقي منفصل x يمثل عدد وحدات منهوج ما المرفوضة يوميا من طرف مصلحة مراقبة النوعية التابعة لمؤسسة اقتصادية ما، حيث يقدر معدل الوحدات المرفوضة يوميا ب04 وحدات.

1. عرف القانون الاحتمال لx
2. احسب الاحتمالات التالية: $P(X = 0); \quad P(X \geq 2)$

3. احسب الانحراف المعياري لهذا المتغير

الحل:

السؤال الأول: المتغير يخضع الى توزيع بواس $\Omega = \{0,1,2,3 \dots \infty\}$

$$X \sim P(x, \lambda)$$

السؤال الثاني: حساب الاحتمالات التالية:

$$P(x, \lambda) = P(0,4) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-4} * 4^{0}}{0!} = 0.018$$

$$P(x \geq 2) = 1 - P(x < 2) = 1 - [P(x = 0) + P(x = 1)]$$

$$P(x, \lambda) = P(1,4) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-4} * 4^{1}}{1!} = 0.073$$

$$P(x \geq 2) = 1 - [P(x = 0) + P(x = 1)] = 1 - (0.018 + 0.073) = 0.909$$

السؤال الثالث: حساب الانحراف المعياري $\sqrt{V(X)} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{4} = 2$

<u>تمرين 4</u>

اذا كان في توزيع ثنائي $n = 80$ و $P=0.16$، المطلوب:

إيجاد احتمال الحصول على نجاحا باستعمال التقريب بين التوزيع الثنائي والتوزيع الطبيعي؟

الحل:

نقوم بحساب التوقع الرياضي والانحراف المعياري كما يلي:

التوقع الرياضي: $E(X) = np = 80 * 0.16 = 12.8$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{80 * 0.16 * 0.84} = 3.279$

نعوض النتائج في العلاقة التالية

$$\boxed{Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}}$$

الانتقال من المنفصل الى المتصل أي من الثنائي الى الطبيعي يفصل ان نضيف ثم نسحب 0.5 على اليمين ثم على اليسار لتقليل من الخطاء.

$$P(x=20)=P(20-0.5\le x\le 20+0.5)=P(19.5\le x\le 20.5)$$

$$P(x=20)=P\left(\frac{19.5-\mu}{\sigma}\le Z\le\frac{20.5-\mu}{\sigma}\right)=P\left(\frac{19.5-12.8}{3.279}\le Z\le\frac{20.5-12.8}{3.279}\right)$$

ب

$$P(x=20)=P(2.04\le Z\le 2.35)=\pi(2.35)-\pi(2.04)=0.9906-0.9793=0.011$$

لما نطبق القانون لتوزيع الثنائي نتحصل بالتقريب على نفس النتائج:

$$P(x=20)=C_{80}^{20}p^{20}q^{80-20}=C_{80}^{20}(0.16)^{20}(0.84)^{80-20}=0.012$$

تمرين5

إذا كان 1% من انتاج مصنع لصناعة المصابيح هو انتاج معيب، نسحب عشوائيا عينة من انتاج هذا المصنع مكونة من 30 مصباح. المطلوب: هو إيجاد احتمال الحصول على اكثر من مصباح واحد معيب ، باستعمال طريقتين؟

الحل:

نستعمل التوزيع الثنائي ونقول: $X\sim\beta(x,n\ ,p)$

$$\boxed{P(X=x)=C_n^x p^x q^{n-x}=\frac{n!}{x!\,(n-x)!}p^x q^{n-x}}$$

$$P(x>1)=1-P(x\le 1)=1-[P(x=0)+P(1)]$$

$$P(X=0)=C_{30}^{0}0.01^{0}0.99^{30}=\frac{30!}{0!\,(30-0)!}0.01^{0}0.99^{30}=0.7398$$

$$P(X=1)=C_{30}^{1}0.01^{1}0.99^{29}=\frac{30!}{1!\,(30-1)!}0.01^{1}0.99^{29}=0.2241$$

$$P(x>1)=1-[P(x=0)+P(1)]=1-(0.7398+0.2241)=0.0361$$

نطبق قانون توزيع بواسون: أي نقرب قانون الثنائي الى قانون بواسون لان الشروط متوفرة:

لدينا n أكبر او يساوي 30 والاحتمال صغير جدا يمكن التقريب.

$$\boxed{P(X=x)=C_n^x p^x q^{n-x} \cong P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}}$$

نبحث عن التوقع الرياضي: $E(X)=np=\lambda=30*0.01=0.3$

$$P(x>1)=1-[P(x=0)+P(x=1)]=1-\left[\frac{e^{-0.3}0.3^0}{0!}+\frac{e^{-0.3}0.3^1}{1!}\right]=1-0.963=0.03$$

تمرين 6

كيس يحتوي على 100كرة 1بيضاء، نسحب عشوائيا بإرجاع كرة واحدة nمرة،

x متغير عشوائي يمثل عدد الحصول على الكرة البيضاء خلال السحب المتكرر nمرة بإرجاع الكرة الى الكيس. المطلوب:

1. عرف القانون الاحتمالي لهذا المتغير؟
2. حدد العدد ليكون احتمال الحصول على الكرة البيضاء مرة واحدة على الأقل يساوي على الاقل0.95

الحل:

احتمال النجاح هو سحب كرة بيضاء $P=\frac{1}{100} \quad q=\frac{99}{100}$

يعاد السحب الاحداث مستقلة نطبق قانون الثنائي $X\sim\beta(x,n,p)$

$$\boxed{P(X=x)=C_n^x p^x q^{n-x}=\frac{n!}{x!\,(n-x)!}p^x q^{n-x}}$$

السؤال الثاني: نبحث عن العدد

$$\big(P(x\geq 1)\big)\geq 0.95$$

$$\big(1-P(x<1)\big)\geq 0.95$$

$$\big(1-P(x=0)\big)\geq 0.95 \Rightarrow 1-0.95\geq P(x=0)$$

$$0.05\geq P(x=0)\Rightarrow 0.05\geq C_n^x p^x q^{n-x})\Rightarrow 0.05\geq C_n^0\left(\frac{1}{199}\right)^0\left(\frac{99}{100}\right)^n\Rightarrow 0.05\geq\left(\frac{99}{100}\right)^n$$

بإدخال دالة لوغاريتمية نتحصل على عدد n وهو يساوي بالتقريب 300

<u>تمرين7</u>

x متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي ذو معلمتين الوسط يساوي 10 والانحراف المعياري يساوي4

احسب احتمال الحوادث التالية. $P(X \leq 9)\,, P(X > 11)\,, P\left(\frac{X > 6}{X > 5}\right)$

الحل:

دالة التوزيع الطبيعي تكتب على الشكل التالي:

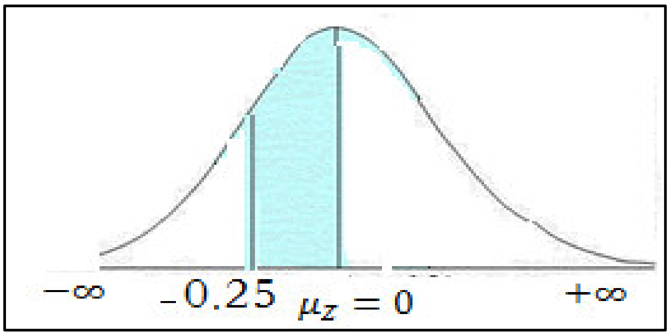
$$X \sim N(\mu, \sigma) \qquad \mathrm{P}((\mathrm{x}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} < 9) = \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}-\mu}{\sigma} < \frac{9-\mu}{\sigma}\right)$$

باستعمال الجدول الطبيعي والمعياري نتحصل على النتيجة التالية

$$P\left(Z < \frac{9-10}{4}\right) \Rightarrow P(Z < -0.25) \Rightarrow 1 - P(Z < 0.25) = 1 - 0.5987 = 0.4013$$

التمثيل البياني:



لتذكير:

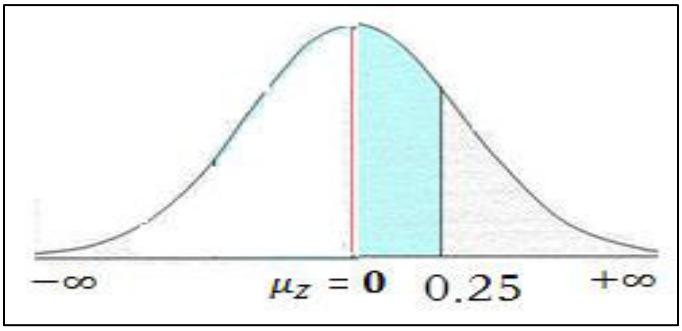
$$\boxed{\begin{array}{c} \mathrm{P}(\mathrm{Z} > \mathrm{t}) = 1 - P(Z < t) \\ \mathrm{P}(\mathrm{Z} < -\mathrm{t}) = P(Z > t) \end{array}}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > 11) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 11) = 1 - \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}-\mu}{\sigma} < \frac{11-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > 11) = 1 - \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{11-10}{4}\right) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Z} < 0.25)$$

باستعمال الجدول الطبيعي والمعياري نتحصل على النتيجة التالية:

$$P(X > 11) = 1 - P(Z < 0.25) = 1 - 0.5987 = 0.4013$$



حساب الاحتمال التالي: $P\left(\frac{X>6}{X>5}\right)??$

$$P\left(\frac{X>6}{X>5}\right) = \frac{P(X>6) \cap P(X>5)}{P(X>5)}$$

نحسب كل احتمال على حداء:

$$P(X > 6) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{6-10}{4}\right) = P(Z > -1) = 1 - P(Z \le -1)$$

باستعمال الجدول الطبيعي والمعياري نتحصل على ما يلي: $P(X > 5) = P(Z \le 1) = 0.8413$

$$P(X > 5) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{5-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{5-10}{4}\right) = P(Z < 1.25) = 0.8944$$

$$P\left(\frac{X>6}{X>5}\right) = \frac{0.8413}{0.8944} = 0.94$$

<u>تمرين8</u>

ينتج معمل البطاريات صغيرة حيث ان عمر البطاريات يتوزع وفق التوزع الطبيعي. إذا علمت ان احتمال ان تعيش بطارية ما اقل من 38 ساعة هو 0.9452، واحتمال ان تعيش بطارية أخرى اكثر من 36ساعة هو 0.1151 ما هو احتمال ان تعيش بطارية ما اقل من 23ساعة؟

<u>الحل:</u>

xi متغير عشوائي مستمر يمثل عمر بطاريات صغيرة يتبع التوزيع الطبيعي

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$P(X < 38) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{38-\mu}{\sigma}\right) = 0.9452$$

من الجدول الطبيعي والمعياري نبحث عن القيمة المعيارية باستعمال القيمة 0.9452، من العمود الأول نلاحظ القيمة المناظرة هي 1.6

$$\pi\left(\frac{38-\mu}{\sigma}\right) = 1.6 \Rightarrow 38-\mu = 1.6 * \sigma \quad [1]$$

$$P(X > 36) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{36-\mu}{\sigma}\right) = 0.1151$$

$$\Rightarrow 1 - P(X \leq 36) = 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{36-\mu}{\sigma}\right) = 0.1151$$

من الجدول الطبيعي والمعياري نبحث عن القيمة المعيارية باستعمال القيمة 0.1151، من العمود الأول نلاحظ القيمة المناظرة هي 1.2

$$\pi\left(\frac{36-\mu}{\sigma}\right) = 1.2 \Rightarrow 36-\mu = 1.2 * \sigma \quad [2]$$

لدينا معدلتين

$$\begin{cases} 38-\mu = 1.6 * \sigma & [1] \\ 36-\mu = 1.2 * \sigma & [2] \end{cases}$$

من خلال الحل للمعادلتين يمكن ان نستنتج الوسط والانحراف المعياري:

منه $X_i \sim N(\mu = 30; \sigma = 5)$

السؤال: احتمال ان تعيش بطارية ما اقل من 23ساعة يحسب كما يلي:

$$P(X < 23) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{23-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{23-30}{5}\right) = P(Z < -1.4)$$

$$\Rightarrow P(Z < -1.4) = 1 - \pi(1.4) = 1 - 0.91924 = 0.08076$$

تمرين9

نفرض ان وزن 800 شخص يتبع قانون التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 66 كلغ وبانحراف معياري قدره 5 كلغ. احسب عدد الأشخاص الذين لديهم وزن:

1. ما بين 65 كلغ و 70 كلغ؟

2. أكبر او يساوي 72 كلغ؟

الحل:

xi متغير عشوائي يمثل وزن الأشخاص ويتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 66كلغ وبانحراف معياري قدره 5كلغ، n عدد الأشخاص 800

$$X_i \sim N(\mu = 66; \sigma = 5)$$

السؤال الأول: تحديد عدد الأشخاص الذين لديهم وزن ما بين 65كلغ و70كلغ

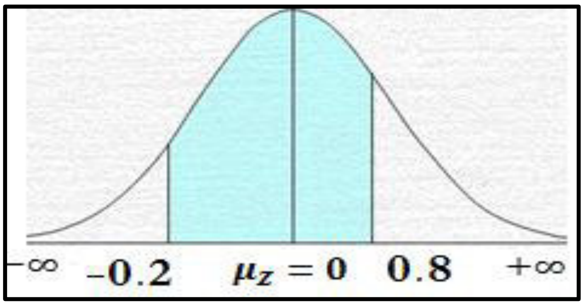
$$P(65 \leq X \leq 70) = P\left(\frac{65-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{70-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{65-66}{5} \leq Z \leq \frac{70-66}{5}\right)$$

$$\Rightarrow P(-0.2 \leq Z < 0.8) = \pi(0.8) - \pi(-0.2) = 0.3674$$

والنتيجة تكون كما يلي:

n = 800*0.3674= 297

التمثيل البياني:



السؤال الثاني: تحديد عدد الأشخاص الذين لديهم وزن أكبر او يساوي 72 كلغ

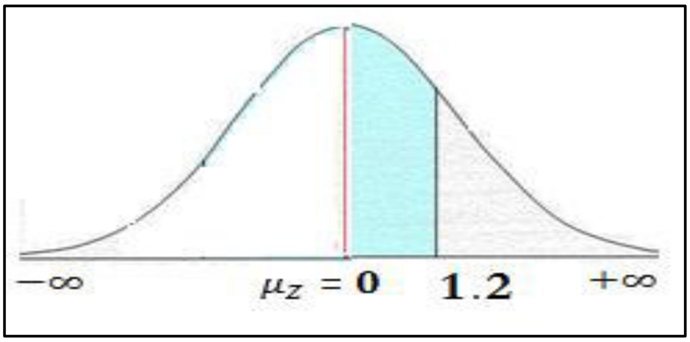
$$P(X \geq 72) = P\left(Z \geq \frac{72-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{72-66}{5}\right) = P(Z \geq 1.2)$$

$$\Rightarrow 1 - P(Z \leq 1.2) = 1 - \pi(1.2) = 0.1151$$

والنتيجة تكون كما يلي:

n = 800*0.1151= 92

التمثيل البياني:



تمرين 10

بفرض ان عدد العيوب x في جهاز تلفزة يخضع لقانون توزيع بواسون باا $\lambda = 4$

المطلوب: احسب احتمال الحوادث التالية

1. ولا عيب في الجهاز
2. هناك أكثر من عيبين في الجهاز
3. عدد العيوب محصورة بين 3و7

الحل:

عدد العيوب x في جهاز التلفزة هو متغير عشوائي بواسوني، يخضع لهذا القانون:

$$P(X,\lambda) = P(1,4) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{X}}{X!} \qquad X=0,1,2\ ,3,\ldots$$

السؤال الأول: ولا عيب في الجهاز

$$P(X,\lambda) = P\big((X=0),(\lambda=4)\big) = \frac{e^{-4}4^{0}}{0!} = 0.0183$$

السؤال الثاني: هناك أكثر من عيبين في الجهاز

$$P(X>2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)]$$

لنحسب الاحتمالات الأخرى:

$$P(X,\lambda) = P\big((X=1),(\lambda=4)\big) = \frac{e^{-4}4^{1}}{1!} = 0.0732$$

$$P(X,\lambda) = P\big((X=2),(\lambda=4)\big) = \frac{e^{-4}4^{2}}{2!} = 0.1464$$

ومنه نتحصل على النتيجة التالية:

$$P(X > 2) = 1 - [0.0183 + 0.0732 + 0.1464] = 1 - 0.2379 = 0.7621$$

السؤال الثالث: عدد العيوب محصورة بين 3و7

$$P(3 \leq X \leq 7) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7)$$

نقوم بحساب الاحتمالات التالية

$$P(X, \lambda) = P\big((X = 3), (\lambda = 4)\big) = \frac{e^{-4}4^3}{3!} = 0.19541$$

$$P(X, \lambda) = P\big((X = 4), (\lambda = 4)\big) = \frac{e^{-4}4^4}{4!} = 0.19541$$

$$P(X, \lambda) = P\big((X = 5), (\lambda = 4)\big) = \frac{e^{-4}4^5}{5!} = 0.15633$$

$$P(X, \lambda) = P\big((X = 6), (\lambda = 4)\big) = \frac{e^{-4}4^6}{6!} = 0.10422$$

$$P(X, \lambda) = P\big((X = 7), (\lambda = 4)\big) = \frac{e^{-4}4^7}{7!} = 0.05955$$

$$P(3 \leq X \leq 7) = 0.71092$$

تمرين11

تم اختيار لأول مرة نسخة مذكرة المستار تحتوي على 200 صفحة انه نجم عن عملية الطبع 20 خطاء ناتج عن الطباعة. المطلوب: ماهو احتمال

1. ان يكون فصل من المذكرة مكون من 30 صفحة يحتوي على خطائين او أكثر؟
2. ان يكون فصل من المذكرة مكون من 50 صفحة يحتوي على خطائين او أكثر؟
3. ان تكون صفحة مأخوذة عشوائيا لا تحتوي على أي خطاء؟

الحل:

المذكرة تحتوي على 200صفحة بمعدل الخطاء 20، إذا كانت عدد الصفحات تساوي 30، يمكن استنتاج المعدل انه يساوي 3 أي:

$$\lambda = \frac{20 * 30}{200} = 3$$

السؤال الأول: نحسب الاحتمال ان يكون فصل من المذكرة مكون من 30 صفحة يحتوي على خطائين او أكثر:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$P(X, \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{X}}{X!}$$

$$P(X, \lambda) = P(X = 0, \lambda = 3) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{X}}{X!} = \frac{e^{-3}3^{0}}{0!} = 0.049$$

$$P(X, \lambda) = P(X = 1, \lambda = 3) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{X}}{X!} = \frac{e^{-3}3^{1}}{1!} = 0.149$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [0.049 + 0.149] = 0.80$$

السؤال الثاني: نحسب الاحتمال ان يكون فصل من المذكرة مكون من 50 صفحة يحتوي على خطائين او أكثر

$$\lambda = \frac{20 * 50}{200} = 5$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$P(X, \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{X}}{X!}$$

$$P(X, \lambda) = P(X = 0, \lambda = 5) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{X}}{X!} = \frac{e^{-5}5^{0}}{0!} = 0.0067$$

$$P(X, \lambda) = P(X = 1, \lambda = 5) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{X}}{X!} = \frac{e^{-5}5^{1}}{1!} = 0.0337$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [0.0067 + 0.0337] = 0.9596$$

السؤال الثالث: ان تكون صفحة مأخوذة عشوائيا لا تحتوي على أي خطاء؟

$$\boxed{\lambda = \frac{20 * 1}{200} = 0.1}$$

$$P(X, \lambda) = P(X = 0, \lambda = 0.1) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{X}}{X!} = \frac{e^{-0.1}0.1^{0}}{0!} = 0.9048$$

تمرين 12

إذا كان 20% من انتاج الة لصناعة المسامير هو انتاج تالف. المطلوب:

1. اوجد احتمال ان يكون مسمار تالف من بين أربعة مسامير؟
2. اوجد احتمال ان يكون مسمارين تالفين من بين أربعة مسامير؟
3. اوجد احتمال بعدم وجود أي مسمار تالف؟

الحل:

الاحداث مستقلة ولدينا نتيجتين اذن نطبق قانون الثنائي الحد:

$$\boxed{P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!\,(n - x)!} p^x q^{n-x}}$$

السؤال الأول: نحسب الاحتمال ان يكون مسمار تالف من بين أربعة مسامير

$$P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!\,(n - x)!} p^x q^{n-x}$$

احتمال النجاح: P=0.2 احتمال الفشل q=0.8 الاحتمال الكلي يساوي واحد

عدد المشاهدات: n=4

$$P(X = 1) = C_n^x p^x q^{n-x} = \frac{4!}{1!\,(4 - 1)!} 0.2^1 0.8^{4-1} = 0.4096$$

السؤال الثاني: نحسب الاحتمال ان يكون مسمارين تالفين من بين أربعة مسامير

$$P(X = 2) = C_n^x p^x q^{n-x} = \frac{4!}{2!\,(4 - 2)!} 0.2^2 0.8^{4-2} = 0.1536$$

السؤال الثالث: نحسب الاحتمال بعدم وجود أي مسمار تالف

$$P(X = 0) = C_n^x p^x q^{n-x} = \frac{4!}{0!\,(4 - 0)!} 0.2^0 0.8^{4-0} = 0.4096$$

تمرين 13

نرمي زهرة النرد أربعة مرات، إذا افترضنا ان الحصول على الرقم 2 او 3 يمثل احتمال النجاح، السؤال:

احسب الاحتمال الحصول على 3 نجاحات على الأقل؟

الحل:

لدينا زهرة النرد $\Omega = \{1,2,3,4,56\}$ باحتمالات متساوية

xi	1	**2**	**3**	4	5	6
Pi	1/6	**1/6**	**1/6**	1/6	1/6	1/6

احتمال النجاح هو: $P = \left\{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\right\}$ نستنتج احتمال الفشل q= 2/3

$$P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$\boxed{P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]}$$

نقوم بحساب الاحتمالات التالية

$$P(X = 0) = C_4^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{4-0} = \frac{4!}{0!\,(4-0)!} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{4-0} = 0.19$$

$$P(X = 1) = C_4^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^{4-1} = \frac{4!}{1!\,(4-1)!} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^{4-1} = 0.39$$

$$P(X = 2) = C_4^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{4-2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{4-2} = 0.29$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - [0.19 + 0.39 + 0.29\,] = 0.13$$

تمرين 15

اختيرت سيدة التي لديها 4مواليد، ان احتمال ان يكون المولود ذكر فهو 0.5، المطلوب:

احسب الاحتمال ان يكون عدد المواليد الذكور أكثر من الواحد؟

الحل:

احتمالات المواليد متساوية أي p =q =0.5

$$P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

نقوم بحساب الاحتمالات التالية

$$P(X = 0) = C_4^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-0} = \frac{4!}{0!\,(4-0)!} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-0} = 0.0625$$

$$P(X = 1) = C_4^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} = \frac{4!}{1!\,(4-1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} = 0.25$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - [0.0625 + 0.25] = 0.687$$

تمرين16

اذا كانت نسبة نجاح طريقة معينة لتلقيح النباتات 60% اختيرت عينة مكونة من 500 نبتة ما احتمال:

1. نجاح تلقيح 300 منها؟
2. نجاح تلقيح280-320

الحل:

السؤال الأول: نلاحظ ان استخدام التوزيع الثنائي صعب لصعوبة حساب التوافيق للعدد كبير من المفردات ، لهذا يفضل استخدام التوزيع الطبيعي.

$$np = \mu = 500 * 0.6 = 300\,, \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{500 * 0.6 * 0.4} = 11$$

باستعمال الجدول الطبيعي معياري نجد النتيجة

$$P(X = 300) = P\left(Z = \frac{X - \mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{300 - 300}{11}\right) = P(Z = 0) \Rightarrow \pi(0) = 0.5$$

اذن نسبة نجاح للقاح تكون 50% لتلقيح 300 نبتة

السؤال الثاني:

$$P(280 \le X \le 320) = P\left(Z_1 = \frac{320 - 300}{11}\right) - P\left(Z_2 = \frac{280 - 300}{11}\right)$$

$$P(280 \le X \le 320) = P(Z_1 = 1.818) - P(Z_2 = -1.818) \Rightarrow \pi(1.818) - [1 - \pi(1.818)]$$

$$\Rightarrow 2 * \pi(1.818) - 1 = 2 * 0.96562 - 1 = 0.931$$

الملاحظة: لتصحيح الاستمرارية يتم طرح واضافة 0.5 الة القيمة المطلوبة لأجل تحويل المتغير العشوائي المنفصل الى متغير عشوائي مستمر.

تمرين 17

صندوق يحتوي على 20 مصباح من بينها 10 صالحة، قمنا بسحب 5 مصابيح بحيث السحب بدون إعادة. ليكن X يمثل عدد المصابيح الصالحة المسحوبة. المطلوب: اثبت ان المتغير X يخضع الى توزيع احتمالي؟ احسب الانحراف المعياري لهذا المتغير؟

الحل:

$$X \sim H(20{,}10{,}5) \qquad X \sim H(N, M, n)$$

$$\boxed{X_i \epsilon [\mathrm{Max}(0, n - Nq), \mathrm{Min}(n, Np)]}$$

$$X_i \epsilon \left[\mathrm{Max}\left(0{,}5 - 20\left(\frac{1}{2}\right)\right), \mathrm{Min}\left(5{,}20\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right] \Rightarrow \mathrm{Max}(0, -5), \mathrm{Min}(5{,}10)$$

$$\mathbf{P(X = 0)} = \frac{C_{10}^{0} C_{20-10}^{5-0}}{C_{20}^{5}} = 0.016 \qquad \mathbf{P(X = x_i)} = \frac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n} = \frac{C_{NP}^x C_{Nq}^{n-x}}{C_N^n}$$

$$\mathbf{P(X = 2)} = \frac{C_{10}^{2} C_{20-10}^{5-2}}{C_{20}^{5}} = 0.348 \qquad \mathbf{P(X = 1)} = \frac{C_{10}^{1} C_{20-10}^{5-1}}{C_{20}^{5}} = 0.135$$

$$\mathbf{P(X = 4)} = \frac{C_{10}^{4} C_{20-10}^{5-4}}{C_{20}^{5}} = 0.135 \qquad \mathbf{P(X = 3)} = \frac{C_{10}^{3} C_{20-10}^{5-3}}{C_{20}^{5}} = 0.348$$

$$\mathbf{P(X = 5)} = \frac{C_{10}^{5} C_{20-10}^{5-5}}{C_{20}^{5}} = 0.016$$

نقوم بإنشاء جدول قانون التوزيع الاحتمالي

xi	0	1	2	3	4	5	المجموع
pi	0.016	0.135	0.348	0.348	0.135	0.016	1

حساب الانحراف المعياري:

$$\sqrt{V(X)} = \sqrt{npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = \sqrt{5 * \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{20-5}{20-1}\right)} = 0.99$$

تمرين18

اختيرت نقطة بشكل عشوائي، تنتمي الى الفترة المغلقة: $[0,12]$

جد احتمال ان تقع بين العددين(2,5)

احسب القيم العددية المميزة لهذا المتغير؟

الحل:

$$P(2 \le x \le 5) = \int_2^5 \frac{1}{12}dx = \frac{5-2}{12} = 0.25$$

نحسب التوقع الرياضي والتباين وفق العلاقة

$$E(x) = \frac{a+b}{2} = \frac{12+0}{2} = 6$$

$$V(x) = \frac{(12-0)^2}{12} = 12$$

ومنه نستنتج الانحراف المعياري

$$\sqrt{V(x)} = \sqrt{12} = 3.46$$

تمرين19

إذا كانت نسبة الإنتاج غير صالح للاستعمال لإحدى المكائن 0.20، فاذا اختيرت عينة مكونة من 100 وحدة من انتاجها. ما احتمال ان تكون عدد الوحدات المعابة اقل من عشر وحدات؟

الحل:

$$\mu = np = 100 * 0.2 = 20$$

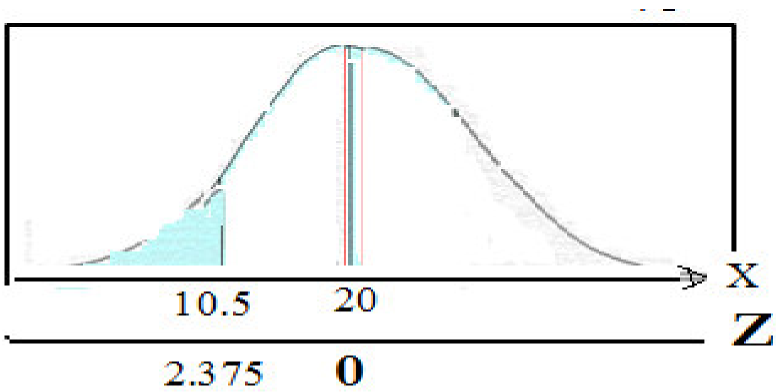
$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 * 0.2 * 0.8} = 4$$

لتحويل من المتغير المنفصل الى المتغير المتصل نضيف 0.5

$$P(Z < 10) = P\left(Z < \left(\frac{10.5 - -20}{4}\right)\right) = P(Z < -2.375)$$

و من الجدول مباشرة نجد القيمة المناظرة لها وهي:

$$P(Z < 10) = 0.0088$$



تمرين20

10%من انتاج الة يعد تالفا ، نأخذ 30 وحدة من انتاج هذه الالة عشوائيا، احسب الاحتمال ان تكون هناك وحدتان تالفتان؟

الحل:

$$P(X = 2) = C_{30}^{2}(0.1)^{2}(0.9)^{28} = 0.22$$

لدينا حجم العينة اكبر او يساوي 25 الاحتمال اقل او يساوي 0.1 الشروط متوفرة للانتقال الى توزيع بواسون

$$\lambda = \mu = np = 30 * 0.1 = 3$$

$$\mathrm{P}(X = 2) = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{x!} = \frac{3 * e^{-3}}{2!} = 0.22$$

نلاحظ نتحصل على نفس النتيجة

تمارين عامة

غير محلولة

تمارين عامة حول الفصل الاول

تمرين 01

اربعة كتب مختلفة في الاحصاء، 6 مختلفة في التسيير وكتابان مختلفان في الاقتصاد. المطلوب: ترتيبهما على الرف.

ماهي عدد التراتيب المختلفة والممكنة إذا:

1. توضع الكتب المتعلقة بنفس الموضوع متجاورة بالترتيب المذكور أعلاه؟
2. كتب الاحصاء فقط يجب ان توضع متجاورة؟

تمرين 02

في احدى ليالي رمضان نشت صراع في احدى الاحياء الشعبية بين 20 شخص من عائليتين كبيرتين، من بينهم 5 كهول الكهل اسمه عمرو 9 من الشباب و6 أطفال. جاءت الشرطة بعد اتصال أحد الجيران بها لتفصيل الأمر. فقرر الشرطي أن يأخذ مجموعة مكونة من ثلاث اشخاص الى السيارة ليستجوبنهم. المطلوب:

1. ماهو عدد المجموعات المختلفة فيما بينها التي يمكن ان يأخذها الشرطي؟
2. ماهو عدد المجموعات المختلفة فيما بينها التي يمكن ان يأخذها الشرطي بحيث المجموعة تضم عمر؟
3. ماهو عدد المجموعات المختلفة فيما بينها التي يمكن ان يأخذها الشرطي بحيث المجموعة تتكون من كهلين على الأقل؟
4. ماهو عدد المجموعات المختلفة فيما بينها التي يمكن ان يأخذها الشرطي بحيث المجموعة تتكون من كهل شاب وطفل؟

تمرين 03

ماهو عدد الطرق الممكنة لاختيار لجنة مكونة من 6 طلاب من قسم علوم التسيير و3 طلاب من قسم علوم الاقتصادية، اذا كان عدد الطلاب المرشحين من قسم علوم التسيير20 و عدد الطلاب الرشحين من قسم علوم الاقتصادية 210 ؟

تمرين04:

بكم طريقة يمكن تكوين كلمة مكونة من ثلاث حروف MARS

1. بدون تكرار الحروف
2. مع تكرار الحروف

تمرين 05:

قررت دائرة كهرباء تشكيل لجنة تتألف من أربعة موظفين، يتم اختيارهم من بين ستة موظفين يعملون في قسم الادارة وثمانية موظفين في قسم المالية:

المطلوب:

1. كم عدد الطرق الممكنة لتشكيل اللجنة المذكورة في هذه الدائرة؟
2. كم عدد الطرق الممكنة لتشكيل اللجنة إذا طلبت الدائرة ان يكون من ضمن اللجنة:
   a) موظف اداري واحد وثلاثة موظفين من قسم المالية؟
   b) موظف من قسم الإدارة وموظف واحد من قسم المالية؟
   c) موظفي من قسم الإدارة وموظفي من قسم المالية؟

تمارين عامة حول الفصل الثاني

تمرين 06 :

صندوق يحتوي على 10كرات حمراء و5 كرات صفراء و 4 كرات بيضاء، نسحب كرتين مع الارجاع:

1. ما هو احتمال ان تكون الكرتان بيضاوان؟
2. ما هو احتمال ان تكون الكرة الثانية بيضاء على ان تكون الكرة الأولى حمراء؟
3. ما هو احتمال ان تكون الكرة الثانية صفراء على ان تكون الكرة الأولى بيضاء؟

تمرين07:

إذا كان لديك الحوادث الاتية:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$
$$A = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$B = \{4,5,6,7\}$$
$$C = \{1,2,3,5,12\}$$

المطلوب: احسب احتمال الحوادث التالية:

$$P\left(\overline{A\cap B}\right),P\left(A\cap\bar{B}\right),P\left(A\cap\bar{B}\cap\bar{C}\right),P\left(\overline{A\cap B\cap C}\right)$$

تمرين08:

إذا كان احتمال ان يكون الجو ملبد بالغيوم هو 0.3 واحتمال ان يمون الجو عاصفا هو 0.5 واحتمال ان يكون الجو ملبدا بالغيوم او عاصفا هو 0.6. المطلوب: احسب احتمال الحوادث الاتية:

1. ان يكون الجو ملبدا بالغيوم وعاصفا؟
2. ان يكون الجو ملبدا بالغيوم وغير عاصف؟
3. ان يكون الجو غير ملبدا بالغيوم وغير عاصف؟

تمرين 09:

إذا كان لديك المعلومات الاتية:

$$P(A)=0.6$$
$$P\left(B/A\right)=0.5$$
$$P\left(B/\bar{A}\right)=0.5$$

المطلوب: جد ما يلي: $P(B),P(A\cup B),P\left(A/B\right),P\left(A/\bar{B}\right)$

تمرين 10:

لدينا ثلاث أكياس فاكهة، يحتوي الكيس الأول على ثلاث تفاحات و6 برتقالات ويحتوي الكيس الثاني على 6 تفاحات و4برتقالات اما الكيس الثالث يحتوي على 5 تفاحات و4برتقالات. تم اختيار أحد الاكياس عشوائيا، واختيرت منه حبة فاكهة بطريقة عشوائية. المطلوب: جد ما يلي:

1. احتمال ان تكون حبة الفاكهة تفاحة؟
2. احتمال ان تكون حبة الفاكهة من الكيس الثاني، إذا علم بانها تفاحة؟

تمارين عامة حول الفصل الثالث

تمرين11

لتكن الدالة التالية، هي دالة الكثافة تأخذ الشكل التالي:

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{x}{c}, x=1,2,3,4\\ 0, x\notin\left]1,2,3,4\right[\end{cases}$$

المطلوب: جد ما يلي:

1. قيمة الثابت
2. التوقع الرياضي والتباين
3. رسم دالة التوزيع الاحتمالي

تمرين 12:

لديك دالة التوزيع الاحتمالي الاتية:
$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{9}x, 0\le x\le 3\\ 0, x\notin]0,3[\end{cases}$$

المطلوب:

1. اثبت ان الدالة أعلاه هي دالة الكثافة؟
2. احسب قيمة التباين والانحراف المعياري؟

تمرين 13

متغير عشوائي موصوف بدالة الكثافة التالية:
$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2, -1\le x\le +1\\ 0, x\notin]-1,+1[\end{cases}$$

المطلوب :

1. حساب
$$P\left(|x|<\frac{1}{2}\right)$$
$$P\left(-\frac{1}{4}<x<\frac{2}{3}\right)$$
2. اوجد التوقع الرياضي والتباين لهذا المتغير؟

تمرين14:

ليكن متغير عشوائي له كثافة التوزيع الاحتمالي تأخذ الشكل التالي:
$$f(x)=\begin{cases}1-|x|, |x|\le 1\\ 0, |x|>1\end{cases}$$

المطلوب:

1. إيجاد تابع التوزيع؟
2. ارسم تابع الكثافة وتابع التوزيع؟
3. حساب الاحتمال التالي: $p(x>1/2)$

تمرين 15

نرمي قطعة نقود مرتين على التوالي

احتمال الحصول على الوجه يساوي 0.4 ادا كانت النتيجة على الوجه نتحصل على الربح بنقطتين إذا كانت النتيجة على الكتابة نتحصل على الفشل بنقطة واحدة. نفرض x متغير عشوائي يمثل الربح اللاعب.

العمل المطلوب

1. تحديد قيم المتغير العشوائي
2. تحديد قانون التوريع الاحتمالي لهذا المتغير
3. تحديد التوقع الرياضي والتباين لهذا المتغير

تمرين 16

اوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي xi الذي يمثل عدد ظهور الصور في تجربة رمي خمسة قطع من النقود مرة واحدة؟

ارسم دالة التوزيع الاحتمالي؟

حدد قيمة الانحراف المعياري لهذا المتغير؟

تمرين17

في احدى الكليات يعمل 20عضو هيئة تدريس منهم 10 جزائريين6 سوريين4اردنيين، اختيرت عينة حجمها8 مدرسين، ما احتمال وجود 5 جزائريين 2 سوريين وأردني واحد في العينة؟

تمارين عامة حول الفصل الرابع والخامس

تمرين 18

طبقا لإحصائيات الحماية المدنية لولاية جيجل، فان متوسط حوادث الغرق بين المصطافين على شاطئ سطورة خلال صائفة لفترة معينة هو 3 لكل 100.000مصطاف وان شاطئ سطورة يعمه 200.000 مصطاف في كل صائفة.

المطلوب: اوجد احتمال:

1. حدوث ولا غرق بين المصطافين
2. ان يغرق اثنان من المصطافين
3. ان يغرق ستة مصطافين
4. ان يغرق بين ستة وثمانية مصطافين

5. حدوث ثلاث حالات غرق على الاقل

<u>تمرين 19</u>

مدة رحلة من جامعة جيجل الى جامعة بجاية تنقسم الى ثلاث مراحل:

x_1 تمثل الفترة للمرحلة الأولى

x_2 تمثل الفترة للمرحلة الثانية

x_3 تمثل الفترة للمرحلة الثالثة

نفرض ان المتغيرات العشوائية مستقلة

x_1 يخضع الى قانون طبيعي وسطه يساوي 5 وانحرافه يساوي واحد

x_2 يخضع الى قانون طبيعي وسطه يساوي 3 وانحرافه يساوي 0.4

x_3 يخضع الى قانون طبيعي وسطه يساوي 4 وانحرافه يساوي 0.5

احسب الاحتمالات التالية ان تكون الرحلة :

1. اقل من 10ساعات
2. على الأقل 10ساعات
3. ما بين 9 و11 ساعة

<u>تمرين 20</u>

إذا كانت مدة خدمة احدى قطع الغيار في سيارة تأخذ شكل التوزيع الاسي بمتوسط مقداره ثلاث سنوات جد:

احتمال ان تخدم هذه القطعة سنتين على الأقل

احسب احتمال ان تخدم هده القطعة مدة ثلاث سنوات على الأكثر

احتمال ان تخدم القطعة خمس سنوات على الأقل إذا علم انها خدمت ثلاث سنوات على الأقل؟

<u>تمرين 21</u>

إذا كنت تمتلك 12منديلا منها 5 حمراء4 خضراء 3 بيضاء، فاذا اردت اختيار عينة من 5 مناديل بدون ارجاع، ما احتمال ان تحتوي على 2 ابيض 2 اخضر1 احمر.

<u>تمرين 22</u>

20% من انتاج الة ما يعد تالفا، نأخذ 50 وحدة من انتاج هذه الالة عشوائيا. احسب احتمال ان تكون ثلاث وحدات تالفة، استخدم التوزيع الثنائي والتوزيع بواسون وقارن التقارب؟

تمرين 23

تتكون هيئة التدريس من في أحد الفروع الجامعة من اربعة كيميائيين وسبعة فيزيائيين سحبنا بصورة عشوائية لجنة مؤلفة من اربعة أساتذة. لنفرض ان X متحول عشوائي يمثل عدد الكيميائيين في هذه اللجنة. المطلوب: حدد التوزيع الاحتمالي للمتغير X

تمرين 24

في توزيع ذات الحدين $\beta(x; 10; 0.5)$

1. احسب الاحتمال $P(X=6)$ باستعمال التوزيع الثنائي ؟
2. احسب الاحتمال $P(X=6)$ بواسطة التقريب بالتوزع الطبيعي؟
3. احسب الاحتمال $P(6 \leq X \leq 8)$ بواسطة توزيع ذات الحدين وبواسطة التقريب بالتوزيع الطبيعي؟ وقارن الإجابات؟

تمرين 25

إذا كانت العلامات النهائية للطلبة في احدى المسافات تخضع لتوزيع الطبيعي ذي الوسط 68 والانحراف المعياري12 . إذا كان اعلى%15 من الطلبة يحصلون على تقدير ممتاز، فما هي اقل علامة تحصل على تقدير ممتاز؟

تمرين 26

في تجربة عشوائية، يراد سحب كية من بين الكليات التابعة الى جامعة جيجل والبالغ عددها5 كليات، بهدف اجراء دراسة حول تقييم الأداء العلمي للكلية.

المطلوب:

1. اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يمثل الكلية الظاهرة على ورقة السحب؟
2. حدد قيمة التوقع الرياضي والتباين؟

قائمة المراجع

قائمة المراجع بالعربية والأجنبية

أولا: قائمة المراجع بالعربية

1. عبد الحفيظ مصطفى. نظريات الاحتمالات، مبادئ وتطبيقات. الجزء 1. ديوان المطبوعات الجامعية.2008، ص130.
2. محمد يوسف اشقر و عبد اللطيف يوسف الصديقي. اساسيات الإحصاء والاحتمالات. Statistics and probability. الطبعة الأولى بيروت. دار التراب الجامعية. 2001 ص118
3. محمد حسين محمد رشيد القادري منى الله الشويلات. مبادئي الإحصاء والاحتمالات ز معالجتها، باستخدام برنامج SPSS، دار صفاء للنشر والتوزيع عمان، 2014 .
4. احمد السيد عامر. الإحصاء الوصفي والتحليلي. دار الفجر للنشر والتوزيع.2007 ص 90
5. صلاح الدين حسين الهيتي. الأساليب الإحصائية في العلوم الإدارية. تطبيقات باستخدام SPSS. كلية الاقتصاد والعلوم الإدارية، جامعة مؤتة. 2004.
6. سالم عيسى بدر وعماد غصاب عبابنة. مبادئ الإحصاء الوصفي والاستدلالي. دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة. الطبعة الأولى 2007.
7. محمد عبد العال النعيمي وحسن ياسين طعمة. الإحصاء التطبيقي،Applied Statistics . دار وائل للنشر والتوزيع. الطبعة الأولى 2008.
8. جان بول ماندري. الاحتمالات. محاضرات واعمال موجهة تضم تمارين محلولة. ديوان المطبوعات الجامعية. الطبعة الثانية 1993.
9. يحي يسعد زغلول عباس وحبيبي النبي العطار. الاستدلال الإحصاء للتجاريين. الدار الجامعية طبع النشر والتوزيع. 1995
10. جبار عبد مضحي. مقدمة في الإحصاء الرياضي. دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، الطبعة الأولى 2015
11. سليم ذياب السعدي. مبادئ علم الإحصاء. جامعة بغداد، دار الكتاب الجديد المتحدة. الطبعة الأولى 2001
12. سيمور ليستتر. الاحتمالات. الطبعة العربية السادسة، سلسلة شوم. الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، جامعة تمبل. 2008
13. حسين فتح الله. مبادئي علم الإحصاء والطرق الإحصائية. الطبعة الأولى، كلية الاقتصاد والعلوم الإدارية، جامعة ال البيت، الاكاديمية للنشر، 1999

14.بن لحسن الهواري وبلقايد براهيم. الإحصاء الرياضي محاضرات وتمارين ، الطبعة الأولى، دار الراية للنشر والتوزيع، 2020

15.خالد قاسم سمور. الإحصاء Statistic، كلية عمان للهندسة التكنولوجية، الطبعة الأولى، دار الفكر ناشرون وموزعون. 2007

ثانيا: قائمة المراجع الأجنبية

16. Laporte Gilbert & Ouellet Roch. Probabilités et statistiques. Théorie et problèmes résolus ; Editions sciences et culture inc.1982.
17. Laporte Gilbert & Ouellet Roch. Solutionnaire de Probabilités et statistiques. Théorie et problèmes résolus ; Editions sciences et culture inc.1982.
18. Léonard J. Kazmier. Statistiques de la gestion. Théorie et problèmes. Incluant 683 problèmes résolus. Edition Mc Graw-Hill 1982.