الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université d'Alger 3
Faculté des Sciences Economique, Sciences commerciales et Sciences de Gestion

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الجزائر 03
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

مطبوعة تحت عنوان:

محاضرات في الإحصاء (2)

مطبوعة موجهة لطلبة السنة الأولى (ل.م.د)

جذع مشترك علوم اقتصادية، علوم تجارية وعلوم التسيير

من إعداد الأستاذ(ة):

عائشة سمسوم

السنة الجامعية: 2023/2022

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université d'Alger 3
Faculté des Sciences Economique, Sciences commerciales et Sciences de Gestion

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الجزائر 03
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

مطبوعة تحت عنوان:

محاضرات في الإحصاء (2)

مطبوعة موجهة لطلبة السنة الأولى (ل.م.د)

جذع مشترك علوم اقتصادية، علوم تجارية وعلوم التسيير

من إعداد الأستاذ(ة):

عائشة سمسوم

السنة الجامعية: 2023/2022

دليل المادة التعليمية Syllabus			
اسم المادة: إحصاء 2			
الميدان:	علوم اقتصادية وعلوم تجارية وعلوم التسيير	الفرع الشعبة:	جميع الشعب
التخصص:	جذع مشترك	المستوى:	الأولى ليسانس
السداسي:	الثاني	السنة الجامعية:	....

التعرف على المادة التعليمية

اسم المادة	إحصاء 2	وحدة التعليم	المنهجية
عدد الأرصدة	5	المعامل	3
الحجم الساعي الأسبوعي	4.5 ساعة	المحاضرة (عدد الساعات فيالأسبوع)	3 ساعة
أعمال م/تط(عدد الساعات في الأسبوع)	/	أعمال م/ت (عدد الساعات في الأسبوع)	1.5 ساعة

مسؤول المادة التعليمية

الاسم، اللقب	....	الرتبة	....
تحديد موقع المكتب	....	البريد الالكتروني	....
رقم الهاتف	....	توقيت الدرس ومكانه	....

وصف المادة التعليمية

المكتسبات	لقد تم دراسة الاحتمالات والإحصاءات على نطاق واسع في المدرسة الثانوية ولكننا سنقوم بالتذكير بجميع الأساسيات.من ناحية أخرى، فإن مشتقات الدوال وحساب التفاضل والتكامل ضروريان للمادة: لقد تم مراجعة هذه المفاهيم في السداسي الأول في محاضرات الرياضيات.بالإضافة إلى خصائص الدالة اللوغاريتمية والأسية تعتبر متطلبات مسبقة مهمة وضرورية.
الهدف العام للمادة التعليمية	يهدف هذا المقياس إلى التعرف على نظرية الاحتمالات واستخداماتها في مجال الاقتصاد والتسيير، وعلىكيفية تطبيقها على البيانات الحقيقية
أهداف التعلم (المهارات المراد الوصول إليها)	بعد دراسة مقياس إحصاء2، سيتمكن الطالب من التعرف على: 1. مفهوم الاحتمال وطرق حسابه. 2. المتغيرات العشوائية المتقطعة والمستمرة 3. العزوم والدالة المولدة للعزوم 4. مفهوم التوقع الرياضي والتباين وكيفية حسابهما 5. أهم نظريات الاحتمالات (نظرية شيبيشيف ونظرية الأعداد الكبيرة)

الــفــهــرس

فهرس المحتويات

المحور الرابع: الاحتمالات

المحور الخامس: المتغيرة العشوائية المنقطعة وتوزيعها الاحتمالي

المحور السادس: المتغيرة العشوائية المستمرة وتوزيعها الاحتمالي

المحور السابع: المميزات العددية للمتغيرة العشوائية

مقــــدمــــة

مــــقــدمـــة

تعد نظرية الاحتمالات من النظريات المهمة التي اتسع نطاق استخدامها في الحالات الإدارية والاقتصادية والمالية بشكل خاص بعد ظهور دراسات ونظريات تعتمد بشكل أساسي على نظرية الاحتمالات ومنها دراسات الاستثمار ونظريات التمويل ومواضيع المخاطرة والمخاطر والتي تهتم دائما بترجيح احتمال حدوث حالة على حالة أخرى في ظل ظروف عدم التأكد التي يلعب الاحتمال فيها دورا كبيرا في الاستنتاج والتنبؤ واتخاذ القرار.

فلا بد إذا على الطالب الجامعي أن يتقن هذه الأداة (نظرية الاحتمالات)، وأن يكون متمكنا من معرفة مفاهيمها وأساسيات استخدام هذه المفاهيم لأنها لا تقتصر في مجال تكوينه الجامعي فحسب، بل تمتد حتى إلى مجال عمله، وهو ما دفعنا لإعداد هذه المطبوعة التي سنقدم من خلالها موجزا لنظرية الاحتمالات في شكل سلسلة من المحاضرات في الإحصاء 2 موجهة لطلبة السنة الأولى جذع مشترك بكلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير بجامعة الجزائر (03)، ولطلبة الكليات الأخرى والمعاهد والمدارس التي تتضمن مناهجها الدراسية مقياس الإحصاء 2، وكذا للأساتذة المهتمين بمجال الاحتمالات وبتطبيقاته المختلفة.

ولقد سعينا إلى تقديم ما هو مقرر دراسته في مقياس الإحصاء 2 لطلبة العلوم الاقتصادية وفقا للمنهاج المطلوب، والذي نهدف من خلاله للإلمام بمبادئ نظرية الاحتمالات تحديدا، بهدف إكساب الطالب مجموعة من الخبرات بطريقة مبسطة وسهلة الفهم.

وعليه تم تقسيم المواضيع التي تم التطرق إليها إلى تسعة محاور، يتضمن المحور الأول نظرية المجموعات والمحور الثاني مصطلحات الفراغ الاحتمالي المتمثلة في التجربة العشوائية والحدث ، فيما خصصنا المحور الثالث للتحليل التوافقي والمحور الرابع لدراسة الاحتمالات، و يتعرض المحور الخامس إلى المتغيرة العشوائية المنقطعة وتوزيعها الاحتمالي، يليه المحور السادس الذي يتناول المتغيرة العشوائية المستمرة وتوزيعها الاحتمالي، ويتناول المحور السابع المميزات العددية لمختلف أنواع المتغيرة العشوائية، في حين خصصنا المحورين الأخيرين للتوزيعات الاحتمالية الشهيرة، حيث تطرقنا في المحور الثامن للتوزيعات الاحتمالية الشهيرة المتعلقة بالمتغيرة العشوائية المنقطعة والمحور التاسع للتوزيعات الاحتمالية الشهيرة للمتغيرة العشوائية المستمرة والذي يعتبر آخر محور في هذا المقرر.

المحور الأول

نظرية المجموعات

تمهيد:

ترتبط الاحتمالات بدراسة الظواهر أو التجارب العشوائية التي تتضمن مجموعة حوادث تنتمي إلى الفضاء الاحتمالي للتجربة العشوائية، لكن قبل التوسع في نظرية الاحتمالات يجب التطرق إلى نظرية المجموعات لما لها علاقة بنظرية الاحتمالات، حيث تعتبر أحد فروع علم الرياضيات الذي يهتم بدراسة المجموعات، أنواعها ومختلف العمليات الجبرية عليها.

1- تعريف المجموعة:

إن أي تجميع لعناصر أو مفردات أو مشاهدات معينة يسمى بالمجموعة، بشرط أن تكون هذه العناصر من نفس النوع أي لها خصائص معينة تجعلها تنتمي لهذه المجموعة، ومن أمثلة المجموعات مجموعة الحروف الأبجدية أو مجموعة الأرقام الطبيعية أو مجموعة أسماء...الخ.[1]

فالمجموعة هي اجتماع لعدد من العناصر المتباينة والمشتركة مع بعضها البعض في صفة واحدة أو عدة صفات بحيث يمكننا من خلال تلك الصفة أو الصفات تحديد انتماء عنصر ما إلى تلك المجموعة أو عدم انتمائه.

ويرمز للمجموعة عادة بالأحرف الكبيرة A, B, C,... أما عناصر هذه المجموعة فيرمز لها بالحروف الصغيرة a,b,c...., ويقال أن العنصر a ينتمي إلى المجموعة A واختصارا نقول (**$a \in A$**)، أما إذا كان العنصر a لا ينتمي إلى المجموعة A فنقول **($a \notin A$)**.

✓ **تعيين المجموعة:** يتم كتابة وتعيين المجموعات بعدة طرق نذكر منها:

أ- **طريقة القائمة:** يتم فيها ذكر جميع عناصر المجموعة وكتابتها بين حاضنتين، وهذه الطريقة تخص عادة المجموعات القابلة للعد.

مثال: المجموعة A هي عبارة عن مجموعة الأعداد الفردية الأقل أو تساوي 10. المطلوب: عين المجموعة A.

الحل: A= {1,3,5,7,9}

ب- **طريقة القاعدة:** تعتمد على ذكر الخاصية أو الخواص التي تميز عناصر المجموعة.

مثال: نفس المثال السابق، المطلوب هو تعيين المجموعة A وفق طريقة القاعدة.

الحل: تقرأ المجموعة A بأنها المجموعة التي تحتوي على العناصر a_i بحيث a عدد فردي وأقل أو يساوي 10، وتكتب بالشكل الموالي:

A= {a/a,عدد فردي, $a \leq 10$ }

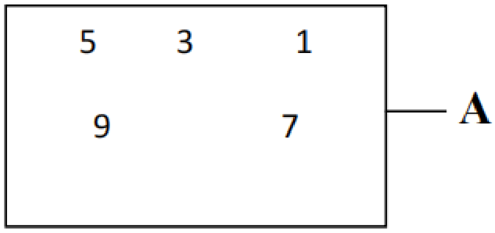
✓ **تمثيل المجموعة:**

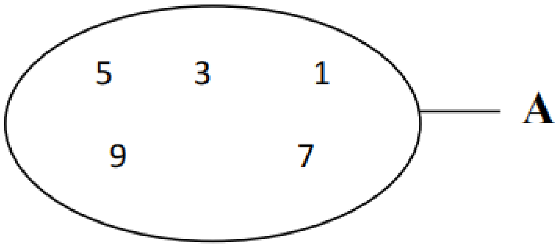
تمثل المجموعة بيانيا باستخدام مخطط أولر فن أو باختصار "**مخطط فـــن**" باعتماد أشكال هندسية مختلفة كالدائرة أو المستطيل أو بخط مغلق.

---

[1] ثائر فيصل شاهر، الإحصاء في العلوم الإدارية والمالية، الطبعة الأولى، دار الحامد، عمان، 2010، ص 273.

مثال: لتكن $A=\{1,3,5,7,9\}$، يمكن تمثيل المجموعة A كما يلي:





2- أنواع المجموعات: ضمن نظرية المجموعات نجد الأنواع التالية:

2-1- المجموعة المنتهية: نقول عن المجموعة A بأنها مجموعة منتهية إذا كانت خالية (فارغة) أو تحتوي على عدد محدود من العناصر (أي بها n عنصر)، وهذا العدد n يسمى أصلي المجموعة (cardinal A)، ونكتب: **Card A = n**

مثال: - إذا كان $A=\{2,4,6,8,10\}$، فإن Card A = 5

- إذا كان { } =B أو بتعبير آخر $B=\emptyset$، فإن Card B = 0

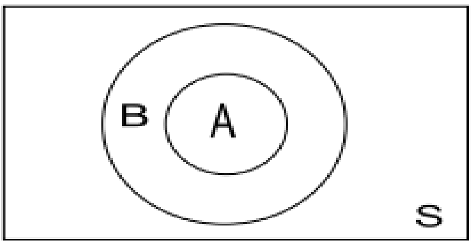
2-2- المجموعة غير المنتهية: نقول عن المجموعة A بأنها مجموعة غير منتهية إذا تضمنت عدد غير منتهي من العناصر المختلفة عن بعضها البعض مثنى مثنى.

مثال: - مجموعة الأعداد الطبيعية: $\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\ldots,+\infty\}$

- مجموعة الأعداد الصحيحة: $\mathbb{Z}=\{-\infty,\ldots\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\ldots,+\infty\}$

- مجموعة الأعداد الحقيقية: $\Re=\{-\infty,\ldots\ldots,0,\ldots\ldots,+\infty\}$

2-3- المجموعة الجزئية: نقول عن المجموعة A بأنها مجموعة جزئية من المجموعة B إذا كان كل عنصر من A ينتمي إلى المجموعة B، وفي هذه الحالة نقول أن المجموعة A محتواة في المجموعة B، ونكتب: $(A\subset B)\Leftrightarrow(a\in A\Rightarrow a\in B)$، ويتم تمثيلها حسب "**مخطط فــن**" كما يلي:



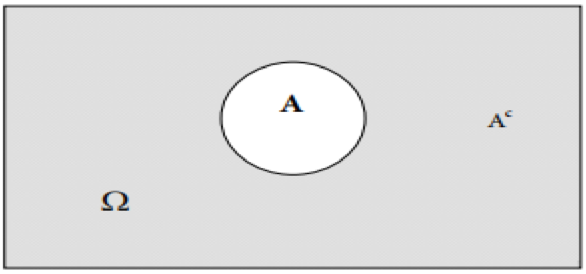
مثال: إذا عرفنا المجموعة B على أنها مجموعة الأعداد الطبيعية الأقل من 8، والمجموعة A مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية الأقل من 8، فإن: $B=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ و $A=\{1,3,5,7\}$

نلاحظ أن $(A\subset B)$ وبذلك فإن A هي مجموعة جزئية من B.

2-4- المجموعة الكلية: إذا كانت المجموعة Ω تحتوي على كل المجموعات الجزئية نسمي المجموعة Ω بالمجموعة الكلية أو الفضاء. يرمز للمجموعة الكلية عادة بالرمز Ω أو S.

2-5- المجموعة الخالية: هي المجموعة التي لا تحتوي على عناصر، ويرمز لها بالرمز $\emptyset$ ويقرأ "فاي" أو بالرمز { } وهي محتواة في أي مجموعة، بمعنى $(\emptyset \subset A)$ و $(\emptyset \subset \Omega)$.

2-6- المجموعة المكملة: إذا كانت A مجموعة معرفة على المجموعة الشاملة Ω فإن المجموعة المكملة للمجموعة A هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى Ω ولا تنتمي إلى A، ونرمز لها بالرمز A^C أو $\bar{A}$، ويمكن التعبير عنها رياضيا كما يلي: $\bar{A} = \{a/\ a \in \Omega \wedge a \notin A\}$. و"**مخطط فن**" الموالي يوضح المجموعة A^C.

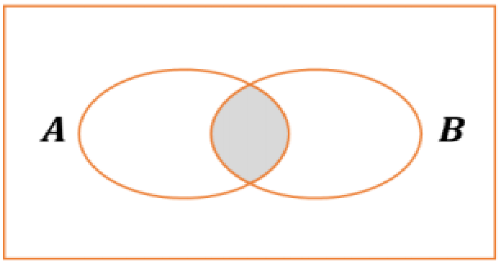


3- العمليات على المجموعات: تتمثل العمليات الأساسية في نظرية المجموعات في كل من التقاطع، الاتحاد والفرق، وفيما يلي شرح مفصل لكل عملية.

3-1- التقاطع في المجموعات:

تقاطع المجموعة A مع المجموعة B هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A وتنتمي إلى B، أي هي المجموعة التي تحتوي على العناصر المشتركة بين المجموعتين، ويرمز لها بالرمز $(A \cap B)$، ويمكن التعبير عنها رياضيا كما يلي: $A \cap B = \{a/\ a \in A \wedge a \in B\}$

و



يمكن توضيح عملية التقاطع باستخدام "**مخطط فـن**" المقابل، بحيث يمثل الشكل المظلل مجموعة التقاطع $(A \cap B)$.

✓ **خصائص التقاطع:** يمكن اختصارها في العمليات التالية:

$$A \cap \emptyset = \emptyset\ ;\ A \cap \Omega = A\ ;\ A \cap A = A$$

مثال: إذا كان $B = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ و $A = \{1,3,5,7\}$ فإن مجموعة تقاطعهما تعطى بالشكل التالي:

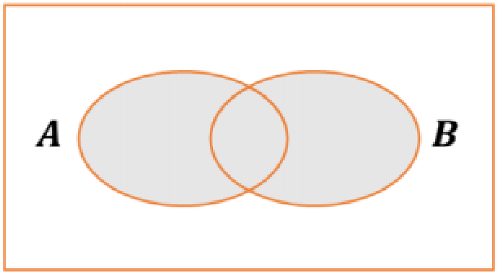
$$A \cap B = \{1,3,5,7\}$$

3-2- الاتحاد في المجموعات:

الاتحاد بين المجموعة A والمجموعة B هو مجموعة تحتوي على كل من عناصر A وعناصر B المشتركة وغير المشتركة بينهما، ويرمز لها بالرمز $(A \cup B)$، ويمكن التعبير عنها رياضيا كما يلي:

$$A \cup B = \{a/\ a \in A \vee a \in B\}$$

أو



يمكن توضيح عملية الاتحاد باستخدام "**مخطط فـن**" المقابل،

بحيث يمثل الشكل المظلل مجموعة الاتحاد $(A \cup B)$.

✓ **خصائص الاتحاد:** يمكن اختصارها في العمليات التالية:

$$A \cup \emptyset = A \; ; \; A \cup \Omega = \Omega \; ; \; A \cup A = A$$

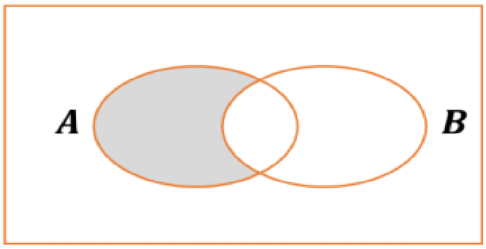
مثال: إذا كان $B= \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ و $A= \{1,3,5,7\}$

فإن مجموعة اتحادهما تعطى بالشكل التالي: $A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$، حيث لا يجوز تكرار العنصر أكثر من مرة في نفس المجموعة.

3-3- الفرق في المجموعات:

الفرق بين المجموعة A والمجموعة B هو مجموعة تحتوي على كل من العناصر الموجودة في A وغير الموجودة في B، ويرمز لها بالرمز $(A - B)$ أو $(A \setminus B)$، ويمكن التعبير عنها رياضيا كما يلي:

$$A - B = \{a / a \in A \underbrace{\wedge}_{و} a \notin B\}$$



يمكن توضيح عملية الفرق باستخدام "**مخطط فـن**" المقابل،

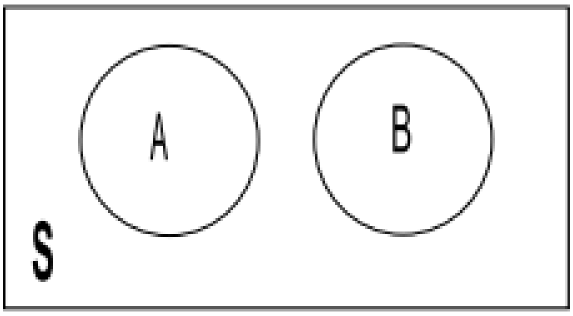
بحيث يمثل الشكل المظلل مجموعة الفرق $(A - B)$.

مثال: إذا كان $A= \{1,3,5,7,9,11,13\}$ و $B= \{1,2,3,4,5\}$

فإن مجموعة الفرق بين A و B تعطى بالشكل التالي: $A - B = \{7,9,11,13\}$

4- المجموعات المنفصلة:

إذا كانت A و B مجموعتان معرفتان على المجموعة الشاملة **S**، يقال عنهما مجموعتان منفصلتان إذا لم يكن بينهما عنصر مشترك أي أن مجموعة التقاطع بينهما تساوي المجموعة الخالية، ويمكن التعبير عنها رياضيا كما يلي: $A \cap B = \emptyset$. كما يمكن توضيح المجموعات المنفصلة باستخدام "**مخطط فـن**" الموالي.



5- التساوي في المجموعات:

نقول أن المجموعة A تساوي المجموعة B إذا كان لهما نفس العناصر أي أن المجموعة A محتواة في المجموعة B والمجموعة B محتواة في المجموعة A، بمعنى $(B \subset A)$ و $(A \subset B)$، ونكتب كما يلي:

$$(A \subset B \wedge B \subset A) \Leftrightarrow (A = B)$$

مثال: إذا كانت المجموعة A معرفة كالتالي: $A= \{-1,1\}$

والمجموعة B معرفة كما يلي: $B = \{x/\ x^2 - 1 = 0\}$

المطلوب: هل المجموعة A تساوي المجموعة B؟

الحل: يمكن إيجاد عناصر المجموعة B من حل المعادلة: $x^2 - 1 = 0$

$$x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

وبذلك فإن عناصر المجموعة B هي (-1، 1)، وهي عناصر تنتمي إلى المجموعة A أيضا أي أن ($B \subset A$) كما نجد أن عناصر المجموعة A تنتمي إلى المجموعة B وبذلك فإن ($A \subset B$).

مما سبق نستنتج أن ($A= B$).

6- تجزئة المجموعة أو مجموعة أجزاء المجموعة:

لتكن E مجموعة معينة، إن المجموعة المؤلفة من كل المجموعات الجزئية لـ E تسمى مجموعة أجزاء المجموعة E أو تجزئة المجموعة E ويرمز لها بالرمز P(E)، ونكتب $P(E) = \{x/\ \{x\} \subset E\}$، وهي المجموعة التي عناصرها عبارة عن مجموعات.

ولتحديد عدد المجموعات الجزئية المكونة لتجزئة هذه المجموعة نستخدم العلاقة التالية: (2^n) حيث n هو عدد عناصر المجموعة E، أي أن **$card\ P(E)= 2^n$**.

مثال: إذا كانت المجموعة E تمثل مجموعة الأعداد الفردية الأقل من 6 فإن $E= \{1,3,5\}$، وبالتالي فإن عدد عناصرها هو: **$card\ (E)= n= 3$**. نستنتج أن عدد المجموعات الجزئية للمجموعة E هو: ($2^n = 2^3 = 8$)،

وتتمثل المجموعة P(E) في العناصر التالية:

$$P(E) = \{ \underset{(1)}{\{1\}};\ \underset{(2)}{\{3\}};\ \underset{(3)}{\{5\}};\ \underset{(4)}{\{1,3\}};\ \underset{(5)}{\{1,5\}};\ \underset{(6)}{\{3,5\}};\ \underset{(7)}{\{1, 3, 5\}};\ \underset{(8)}{\{\ \}} \}.$$

7- قوانين نظرية المجموعات: يقصد بها مختلف خصائص نظرية المجموعات والتي يمكن اختصارها في النقاط التالية:

7-1- خاصية التبديل: $(A \cap B) = (B \cap A)$

$(A \cup B) = (B \cup A)$

7-2- خاصية التجميع: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = (A \cap B \cap C)$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup B \cup C)$

7-3- خاصية التوزيع: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

7-4- خاصية "دي مورغان": $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

6-5- خصائص أخرى: $(A \cup \bar{A})= \Omega\ ;\ (A \cap \bar{A})=\emptyset$

المحور الثاني

التجربة العشوائية والحدث

تمهيد:

بعد التعرف على بعض المفاهيم الأساسية في نظرية المجموعات، لا بد من التطرق إلى المفاهيم الأساسية المستخدمة في نظرية الاحتمالات وعملية حساب الاحتمال، ومن أهمها نجد: التجربة العشوائية، فراغ العينة، الحدث.

1- التجربة أو الاختبار:[1]

تعد التجربة من أهم المفاهيم في نظرية الاحتمالات وهي تقوم على أساس التأكد من تحقق وصول بعض الظروف المشتركة لظاهرة ما، التي قد تكون ظروفا من صنع الإنسان أو وليدة الصدفة. وفيما يلي أمثلة عن التجارب:

- رمي قطعة نقود في الهواء وملاحظة الوجه الذي سيظهر (صورة أو رقم)؛
- مراقبة جودة إنتاج مصنع (ممتاز، متوسط، رديء)؛
- تسجيل كميات هطول الأمطار في منطقة معينة (غزيرة، ضعيفة...).

بصورة عامة، التجربة هي كل عملية تؤدي إلى ملاحظة أو قياس ظاهرة معينة، وليس من الضروري أن تكون الملاحظة عددية مثل ظهور وجه في تجربة إلقاء قطعة نقدية. وعند إجراء أي تجربة نلاحظ ما يلي:

- التجربة ينبغي أن تعطي نتيجة معينة ضمن عدد من النتائج الممكنة؛
- إن نتيجة التجربة، بصورة عامة، تختلف من محاولة إلى أخرى؛
- إن فراغ الإمكانات لتجربة معينة قد يكون منتهيا وقد يكون غير منتهي.

تتعلق نتائج أي تجربة بجملة من الشروط التي تجري ضمنها، وهذه الشروط (K) إما أن تكون موجودة بصورة موضوعية أي خارج نطاق تحكمنا، وإما أن تكون مصطنعة أي نتحكم فيها ونوجهها وفق ما نصبوا إليه. وعليه يمكن تصنيف التجربة إلى صنفين: نظامية وعشوائية (احتمالية).

1-1- التجربة النظامية: التجربة النظامية هي كل تجربة يمكننا تحديد نتائجها مسبقا على أساس القوانين العلمية المعروفة وانطلاقا من جملة الشروط (K) المرتبطة بالظاهرة والمتوفرة أثناء التجربة، مثل تجربة تسخين الماء وملاحظة درجة غليانه، حيث يمكننا تحديد النتيجة بدقة قبل عمل التجربة.

والهدف من القيام بهذا النوع من التجارب هو اكتشاف قوانين أو الاستفادة مما هو موجود في تحقيق بعض الغايات، وبالتالي نجدها خارج مجال دراستنا (نظرية الاحتمالات).

1-2- التجربة العشوائية (التجربة الاحتمالية):

التجربة العشوائية هي كل تجربة تكون قابلة للتكرار لعدة مرات، وتكون نتائجها غير محددة مسبقا لكونها تعتمد على الصدفة والعشوائية رغم انطلاقنا من نفس جملة الشروط (K) خلال تكرار التجارب.

[1] السعدي رجال، نظرية الاحتمالات: مبادئ الحساب الاحتمالي- دروس وتمارين، الجزء الأول، الطبعة الثالثة، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2008، ص 116-117.

فالمجرب لا يستطيع التنبؤ مسبقا بالنتيجة، وعدم إمكانية التنبؤ تعطي لهذه التجربة صفتها العشوائية، نأخذ مثلا تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة الرقم الظاهر على الوجه العلوي، لا يمكن في هذه الحالة معرفة النتيجة قبل إجراء التجربة أي أنها مرتبطة بالصدفة.

واختصارا، يمكن القول بأن التجربة العشوائية هي تلك التجربة التي يمكن حصر نتائجها الكلية الممكنة مسبقا ولكن لا يمكن تحديد النتيجة التي ستظهر، مثل رمي قطعة نقدية أو فحص فصيلة الدم لشخص ما.

ملاحظة: تهتم نظرية الاحتمالات بدراسة التجارب العشوائية، كما أن القيام بهذا النوع من التجارب لا يعتبر هدفا بحد ذاته، بل يراد من وراءه، في معظم الأحيان، اكتشاف منحى الظاهرة على الأمد البعيد واعتماد ذلك كأساس لاتخاذ القرارات.

2- فراغ العينة (الفضاء العيني أو فراغ الحوادث الأولية):[1]

الفراغ العيني هو مجموعة النتائج الكلية الممكنة (المتوقعة) للتجربة العشوائية، ويرمز له عادة بالرمز Ω ويقرأ "أوميغا". ولتوضيح مفهوم الفراغ العيني سنعرض فيما يلي أمثلة شائعة في مجال نظرية الاحتمالات:

أ- تجربة إلقاء قطعة نقد مرة واحدة: $\Omega = \{F, P\}$، حيث: F (Face) تعني ظهور صورة على قطعة النقد & P (Pile) تعني ظهور رقم على قطعة النقد.

ب- تجربة إلقاء قطعتي نقد مرة واحدة أو قطعة نقد واحدة مرتين على التوالي:

$\Omega = \{ (F, F) ; (F, P) ; (P, F) ; (P, P) \}$.

ج- تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

د- تجربة رمي حجر نرد وقطعة نقد مرة واحدة:

$\Omega = \{ (1, F) ; (1, P) ; (2, F) ; (2, P) ; (3, F) ; (3, P) ; (4, F) ; (4, P) ; (5, F) ; (5, P) ; (6, F) ; (6, P) \}$.

و- تجربة رمي حجري نرد مرة واحدة أو حجر نرد واحد مرتين على التوالي:

حجر 2 / حجر 1	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$\Omega = \{ (1,1) ; (1,2) ; (1,3) ; (1,4) ; (1,5) ; (1,6) ; (1,1) ; (1,2) ; (1,3) ; (1,4) ; (1,5) ; (1,6) ; (1,1) ; (1,2) ; (1,3) ; (1,4) ; (1,5) ; (1,6) ; (1,1) ; (1,2) ; (1,3) ; (1,4) ; (1,5) ; (1,6) ; (1,1) ; (1,2) ; (1,3) ; (1,4) ; (1,5) ; (1,6) ; (1,1) ; (1,2) ; (1,3) ; (1,4) ; (1,5) ; (1,6) \}$.

الفراغ العيني في هذه التجربة يحتوي على 36 عنصر، وهذه العناصر تمثل في مجملها عدد النتائج الكلية الممكنة.

[1] كامل فليفل، فتحي حمدان، الإحصاء، دار المناهج، عمان، 2009، ص 115.

نلاحظ أن الفراغات العينية أعلاه تحتوي عدد منتهي من الأعداد فيسمى بذلك فراغ أو فضاء عينة معدود، أما إذا احتوى على عدد غير منتهي من الأعداد فيقال عنه فضاء عينة غير معدود أو غير منتهي.

3- الحدث:

إن أي نتيجة من النتائج الممكنة للتجربة العشوائية يسمى حدثا، [1] فالحدث هو مجموعة جزئية من فراغ العينة Ω لتجربة عشوائية ما، أي أننا إذا رمزنا للحدث بالرمز $\mathbf{A}$ فإن $\mathbf{A \subset \Omega}$. والحدث عموما هو ما يطلب حساب احتمال وقوعه (حدوثه)، فمثلا:

- عند رمي قطعة نقود، إذا كان المطلوب هو معرفة احتمال ظهور الصورة، فإن الحدث هو "ظهور الصورة"؛
- عند رمي حجر نرد وكان المطلوب هو معرفة احتمال ظهور رقم فردي، فإن الحدث هو "ظهور رقم فردي"؛
- عند سحب ورقة من أوراق اللعب فإن الحدث هو "ظهور ورقة لعب معينة".

4- أنواع الحوادث: يختلف الحدث باختلاف عدد العناصر أو النتائج التي يتكون منها، لذا نجد عدة أنواع للحدث نوضحها في النقاط التالية: [2]

4-1- الحدث البسيط: وهو الذي يتكون من عنصر واحد فقط مثل الحدث "ظهور الرقم 5" عند رمي حجر النرد أو الحدث "ظهور صورة" عند رمي قطعة نقود.

4-2- الحدث المركب: هو الذي يتكون من أكثر من عنصر واحد، أي أنه يتكون من عدة حوادث بسيطة.

مثال:

- الحدث "ظهور رقم فردي" في تجربة إلقاء حجر النرد، هذا الحدث يتكون من ثلاثة عناصر (ثلاث نتائج) هي 1، 3، 5 (الأرقام الفردية في حجر النرد)؛
- الحدث "ظهور رقم أكبر من 2" في تجربة إلقاء حجر النرد، هذا الحدث يتكون من أربعة عناصر أي أربع نتائج هي 3، 4، 5، 6 (الأرقام الأكبر تماما من 2 في حجر النرد)؛
- أراد باحث ما أن يصنف مجموعة من الدول حسب الاتفاقيات التي أبرمتها خلال فترة زمنية معينة، وكان المطلوب هو معرفة احتمال أن تكون عدد الاتفاقيات التي أبرمتها إحدى الدول "ثلاث اتفاقيات فأكثر" فإن الحدث هو "حدث مركب" لأنها قد تكون "ثلاث أو أربع أو خمس...الخ".

4-3- الحدث المستحيل: هو الحدث غير القابل للتحقق أبدا وبالتالي فهو لا يحتوي على أي عنصر من فراغ العينة Ω، مثل الحدث "ظهور الرقم 7" في تجربة إلقاء حجر النرد، فلو رمينا حجر النرد إلى ما لا نهاية فلن نحصل على الرقم 7 أبدا.

فالحدث المستحيل هو الحدث الذي عدد عناصره صفر، أي أنه عبارة عن المجموعة الخالية والتي يرمز لها بالرمز $\emptyset$.

---

[1] ثائر فيصل شاهر، مرجع سبق ذكره، ص 280.

[2] جبار عبد مضحي، الإحصاء والاحتمالات، الطبعة الأولى، شركة دار الأكاديميون للنشر والتوزيع، عمان، 2016، ص 147.

4-4- الحدث الأكيد أو المؤكد: هو الذي عدد عناصره يساوي النتائج الكلية التي قد تحدث عند إجراء التجربة. فالحدث الأكيد هو مجموعة النتائج الكلية للتجربة والتي نرمز لها بالرمز Ω. فمثلا عند رمي حجر النرد فإن الحدث "ظهور رقم أقل من 7" حدث أكيد، لأنه من المؤكد أن الرقم الذي سيظهر سيكون أقل من 7، فهذا الحدث يتكون من 6 عناصر هي 1، 2، 3، 4، 5، 6 وهي نفسها النتائج (الحالات) الكلية التي يمكن أن تحدث عند إجراء التجربة.

4-5- الحوادث المتنافية وغير المتنافية:

أ- **الحوادث المتنافية (المنفصلة):** إذا كان كل من A و B حدثين، فإننا نقول عنهما حدثان متنافيان أو منفصلان إذا وفقط إذا كان $A \cap B = \emptyset$، أي لا يمكن حدوثهما معاً حيث وقوع أحدهما يمنع وقوع الحدث الآخر (حدث مستحيل)، وكمثال على ذلك فإنه عند رمي حجر نرد فإنه لا يمكن الحصول على وجهين في وقت واحد.

ب- **الحوادث غير المتنافية (المتصلة):** إذا كان كل من A و B حدثين، فإننا نقول عنهما حدثان غير متنافيان أو متصلان إذا وفقط إذا كان $A \cap B \neq \emptyset$، أي يمكن حدوثهما معاً، وكمثال على ذلك فإنه عند رمي حجر نرد مرة واحدة فإنه يمكن ظهور العدد 3 وهو يعبر عن الحدث **A** كما يمكن ظهور عدد فردي وهو يعبر عن الحدث **B** حيث $B = \{1, 3, 5\}$، ومنه $A \cap B = \{3\}$، أي أن تقاطع الحدثين A و B لا يساوي المجموعة الخالية.

4-6- الحوادث المستقلة وغير المستقلة والشرطية:[1]

نقول علن الحدثين A و B أنهما **مستقلان** إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر ولا يتأثر بوقوع الحدث الآخر، فمثلا نتائج عدة رميات متعاقبة لقطعة النرد تمثل حوادث مستقلة عن بعضها البعض، أي أنّ حادث ظهور رقم معين في إحدى الرميات مستقل عن ظهور الرقم في الرمية التالية لأن حدوث أحدهما مستقل عن حدوث الآخر. وتجدر الإشارة إلى أن الحوادث المتنافية هي بالضرورة حوادث مستقلة، ولكن العطس ليس بالضرورة صحيحا، وهذا يعني أن الحوادث المستقلة ليست دائما متنافية، وأن الحوادث المتنافية قد تكون مستقلة وقد تكون غير مستقلة.

أما الحوادث **غير المستقلة** فهي التي وقوع أحدها يؤثر في وقوع حدث آخر، فمثلا إذا قمنا بسحب مصباح كهربائي عشوائيا من أحد الصناديق التي بها مصابيح صالحة وغير صالحة مرتين على التوالي، فإذا تم إرجاع المصباح الأول إلى الصندوق قبل السحب الثاني للمصباح نكون في هذه الحالة بصدد حوادث مستقلة، لكن إذا لم يتم إرجاع المصباح المسحوب إلى الصندوق فإن عملية السحب الأولى تؤثر في عملية السحب الثانية، ويكون بذلك الحدث الثاني غير مستقل عن الحدث الأول.

[1] السعدي رجال، مرجع سبق ذكره، ص 122.

وإذا كان حدث ما مرتبط بتحقق أو عدم تحقق وقوع حدث آخر، نقول عنه حدث شرطي، ونسمي هذا النوع من الحوادث **بالحوادث الشرطية**.

4-7- حدث إتحاد حدثين $(A \cup B)$: إذا كان A و B حدثان كيفيان، فإن الحدث $(A \cup B)$ يقرأ بالحدث A **أو** الحدث B **يتحقق**، وكمثال على ذلك عند وصول رزمة بريدية معينة لا يهم إن جاء بها ساعي بريد واحد أو ساعيين اثنين.

4-8- حدث تقاطع حدثين $(A \cap B)$: إذا كان A و B حدثان كيفيان، فإن الحدث $(A \cap B)$ يقرأ بالحدث A **و** الحدث B **يتحققان معا**، وكمثال على ذلك فإنه عند رمي زهرتي نرد في آن واحد وحصل ظهور الرقم 4 على وجه الزهرة الأولى والرقم 4 على وجه الزهرة الثانية أيضا فهو حدث متقاطع.

4-9- فرق حدثين $(A - B)$: هو عبارة عن حدث الحصول على الحدث A وليس الحدث B، بمعنى هو حدث الحصول على الحدث A والحدث المتمم لـ B.

4-10- الحدث المتمم (الحدث العكسي): نقول أنّ لكل حدث A من الفضاء العيني أو من فراغ الحوادث الأولية متمم يتكون من مجموعة الإمكانيات غير المحققة لـ A والمرتبطة بالفضاء العيني، ويرمز له بالرمز $\bar{A}$ بحيث: $\bar{A} = \Omega - A$. ونقول أنّ الحدث $\bar{A}$ هو الحدث المتمم أو العكسي للحدث A بالنسبة لفراغ الحوادث Ω إذا وفقط إذا كان: $A \cap \bar{A} = \emptyset$ و $A \cup \bar{A} = \Omega$.

مثال: في تجربة إلقاء زهرة النرد نعتبر الحدث A ظهور رقم فردي ونعبر عنه بالشكل التالي: $A = \{1,3,5\}$، ومنه الحدث المتمم للحدث A وليكن الحدث $\bar{A}$ هو ظهور رقم زوجي والذي نعبر عنه بالشكل التالي:
$\bar{A} = \{2,4,6\}$. الملاحظ أن إتحاد الحدثين يعطينا المجموعة الكلية وهي النتائج (الحالات) الكلية التي يمكن أن تحدث عند إجراء التجربة حيث نجد: $A \cup \bar{A} = \Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

المحور الثالث

التحليل التوافقي

تمهيد:

كثيرا ما نهتم في مجال الدراسات الاقتصادية والاجتماعية بعملية تكوين مجموعات جزئية من مجموعة أصلية وفق شروط محددة مفترضة، كالاهتمام بطبيعة الأشياء أو العناصر وترتيبها في الوقت نفسه. كما يمكن أن تختلف الحالات عن بعضها البعض بافتراض عدم إمكانية تكرار العناصر في المجموعات الجزئية أو بإمكانية تكرارها، ويساعدنا في دراسة ذلك ما يسمى بالتحليل التوافقي الذي يهتم بإعطاء عدد الطرق الممكنة للمجموعات ضمن شروط معينة من خلال بعض القواعد الرياضية التي تمكّن من حساب عدد الحالات الممكنة وعدد الحالات الملائمة المرتبطة بذلك الحدث المراد تكوينه.

ويعتبر التحليل التوافقي من أهم فروع الرياضيات على وجه عام والاحتمالات على وجه خاص، يهتم بحساب عدد الحالات المراد إحصاءها أو تكوينها كأن نقول مثلاً: كم كلمة تتكون من حرفين يمكن تشكيلها من بين الحروف التالية: أ، ب، ج، د، أو في مثال آخر: كم لجنة تحتوي على ثلاثة أعضاء نستطيع تكوينها من بين مجموعة تتألف من عشرة أشخاص. فللإجابة على هذين السؤالين من الواجب الاستناد إلى طرق رياضية بحتة تمكّننا من إيجاد النتيجة والتي يعتمد استعمالها على المفاهيم والأسس التالية:

- **طريقة السحب:** ونقصد بها هل السحب كان على التوالي أم في آن واحد والذي نعني به أهمية ترتيب العناصر أي هل ترتيبها مهم أم لا؛
- **نوع السحب:** ونقصد به هل هو سحب بإرجاع أو بدون إرجاع، وبالتالي إمكانية وجود تكرار أو عدمه.

وباختلاف طرق السحب ونوعيته تختلف طرق حساب الحالات المراد عدّها أو بمعنى آخر حساب عدد العينات الممكن سحبها، وعليه فإننا سنتناول في هذا المحور المواضيع التالية: الترتيبات؛ التبديلات والتوفيقات. لكن قبل التطرق إلى هذه المواضيع الثلاثة لا بد من الإشارة إلى نقطتين أساسيتين:

النقطة الأولى تشكّل المرتكز الحقيقي للتحليل التوافقي وهي قاعدة الضرب أو ما يسمى **بالمبدأ الأساسي في العد؛**

النقطة الثانية تتعلق بالمفاهيم المرتبطة بحساب عدد عناصر المجموعة أو كما يعرف **بأصلي المجموعة.**

أولا- المبدأ الأساسي في العد:

إذا كانت النتائج الممكنة لتجربة ما هي n_1 والنتائج الممكنة لتجربة أخرى هي n_2، فإن النتائج الممكنة للتجربتين معا هي جداء n_1 و n_2 أي $(n_1 \times n_2)$. وعندما يكون هناك أكثر من تجربتين يتعين القيام بها فإن المبدأ الأساسي يمكن تعميمه.[1]

[1] فريدة همال، الإحصاء 2: دروس وتمارين تطبيقية، مطبوعة بيداغوجية موجهة لطلبة السنة الأولى جذع مشترك، جامعة الجزائر 3- الجزائر، 2022/2021، ص 16.

وعليه إذا كان لدينا تجربة عشوائية ما تشمل على عدة مراحل عددها K مرحلة، وكان لكل مرحلة عدد من النتائج الممكنة لها، مثلا المرحلة الأولى لها n_1 نتيجة والمرحلة الثانية لها n_2 نتيجة وهكذا دواليك، فإن العدد الكلي للنتائج الممكنة لهذه التجربة يساوي: $N= n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \dots \times n_k$

مثال 1: يوجد بكلية العلوم الاقتصادية، العلوم التجارية وعلوم التسيير أربع شعب: شعبة العلوم الاقتصادية، شعبة العلوم التجارية، شعبة علوم التسيير، شعبة المالية والمحاسبة، وبهذه الشعب 82، 100، 112، 200 طالب على التوالي. نريد اختيار ممثل لكل شعبة لينظم لمجلس إدارة الكلية، بكم طريقة يمكن اختيار لجنة ممثلي الطلبة؟

الحل: نعتبر اختيار لجنة ممثلي الطلبة نتيجة مشتركة لأربعة تجارب منفصلة لاختيار ممثل واحد عن كل شعبة، وبتطبيق النسخة المعممة من المبدأ الأساسي للعد نجد أن هناك (183680000) طريقة، تم احتسابها كما يلي: $82 \times 100 \times 112 \times 200 = 183680000$.

مثال 2: في تجربة إلقاء قطعة نقدية مرتين على التوالي فإن عدد النتائج الممكن الحصول عليها من هذه التجربة هي (4)، تم احتسابها باعتماد المبدأ الأساسي للعد كما يلي: $2 \times 2 = 4$

حيث يمثل الرقم 2 عدد النتائج الممكنة لإلقاء القطعة النقدية وهي وجه أو رقم أي $\{F, P\}$.

ثانيا- حساب عدد عناصر المجموعة (أصلي المجموعة):

1- أصلي مجموعة منتهية:

لتكن Ω مجموعة منتهية، وليكن n عدد عناصرها. نسمي n بأصلي المجموعة Ω ويرمز لها بالرمز **card (Ω)**.

مثال: لتكن لدينا المجموعة التالية: $\Omega = \{a,b,c,d,e\}$. عدد عناصر هذه المجموعة هو 5، وبالتالي فإن:

$$\text{card}(\Omega)= 5$$

ملاحظة: المجموعة الخالية لا يوجد بها أي عنصر، إذا: $\text{card}(\emptyset)= 0$.

2- العمليات على أصلي المجموعات:

سنحاول تقديم بعض قواعد العمليات على عناصر المجموعات والتي سيتم استخدامها فيما بعد في حساب الاحتمالات.

2-1- أصلي تقاطع مجموعتين:

لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من مجموعة منتهية، نسمي عدد عناصر تقاطع المجموعتين A و B بأصلي مجموعة تقاطعهما، ونرمز لها بالرمز $\text{card}(A \cap B)$.

2-2- أصلي اتحاد مجموعتين:

لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من مجموعة منتهية، نسمي عدد عناصر اتحاد المجموعتين A و B بأصلي مجموعة اتحادهما، ونرمز لها بالرمز $\text{card}(A \cup B)$، وهذه الأخيرة تعطى بالعلاقة التالية:

$$\text{card}\ (A\ \cup B) = \text{card}\ (A) + \text{card}\ (B) - \text{card}\ (A\ \cap B)\ ....\ (1)$$

فإذا كانت المجموعتين A و B لا توجد بينهما عناصر مشتركة أي $(A \cap B) = 0$ فإن العلاقة (1) تصبح:

$$\text{card}\ (A\ \cup B) = \text{card}\ (A) + \text{card}\ (B)\ ....\ (2)$$

2-3- أصلي متممة مجموعة:

إذا كانت المجموعة $\bar{A}$ متممة المجموعة A بالنسبة للمجموعة الكلية Ω فإن: $A \cup \bar{A} = \Omega$; $A \cap \bar{A} = \emptyset$،

ومنه نجد:

- أصلي مجموعة تقاطع المجموعتين A و$\bar{A}$ هو:

$$\text{card}\ (A\ \cap \bar{A}) = \text{card}\ (\emptyset) = 0$$

- أصلي مجموعة إتحاد المجموعتين A و$\bar{A}$ هو:

$$\text{card}\ (A\ \cup \bar{A}) = \text{card}\ (\Omega) = N$$

حيث N هو عدد المجموعة الكلية.

2-4- أصلي مجموعة الجداء الديكارتي:

لتكن A و B مجموعتين منتهيتين، أصلي مجموعة الجداء الديكارتي لهما هو:

$$\text{card}\ (A\ \times B) = \text{card}\ (A) \times \text{card}\ (B)$$

وكنتيجة لذلك فإن:

$$\text{card}\ (A\ \times A) = \text{card}\ (A) \times \text{card}\ (A) = [\text{card}\ (A)]^2$$

فإذا عممنا القاعدة على n نجد العلاقة التالية:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: card\ (A^n)\ = [\text{card}\ (A)]^n$$

ثالثا- طرق حساب عدد العينات:

إن حساب عدد العينات أو المجموعات التي يمكن اختيارها أو سحبها من مجتمع ما لا يمكن عدّها أو حسابها مباشرة، فطرق العد تختلف كما ذكرنا سابقا باختلاف طرق سحب العينات ونوع السحب أي هل هذا السحب كان بإرجاع أو بدون إرجاع، وهل كان على التوالي أو في آن واحد، وفيما يلي أهم الطرق المعتمدة.

1- ترتيبة بتكرار (قانون القائمة):

إنّ شرط تطبيق قانون القائمة مبني أساسا على عنصرين هما:

- وجود تكرار (سحب بإرجاع أو بالإعادة)؛
- ترتيب العناصر المختارة في العينة الواحدة مهم (سحب على التوالي).

فإذا اعتبرنا مجتمعا يتكون من N عنصر، نريد أن نختار منه عينة تتكون من P عنصر حيث نقوم باختيارها وفقا للشرطين السابقين، ولتكن Ω مجموعة الإمكانيات الكلية لسحب العينات، نقصد بذلك أن Ω تمثل عدد العينات الكلية الممكن تشكيلها من بين عناصر المجتمع والتي تتكون كل واحدة منها من P عنصر. في هذه الحالة نجد أنّ عدد الحالات الكلية يعطى بقانون القائمة التالي:

$$\textbf{card } (\Omega) = [\mathrm{N}]^P$$

حيث: N هو عدد عناصر المجموعة الكلية، وP هو عدد عناصر العينة (الاختيارات أو عدد التجارب).

مثال رقم 1 : لتكن لدينا المجموعة التالية: $E = \{x_1, x_2, x_3\}$، وبالتالي: card (E) = 3.

نريد تكوين مجموعة من الثنائيات من بين عناصر المجموعة E باستعمال شرطي ترتيبة بتكرار فنتحصل على المجموعة التالية:

$$\Omega = \{(x_1,x_1),(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_2,x_1),(x_2,x_2),(x_2,x_3),(x_3,x_1),(x_3,x_2),(x_3,x_3)\}$$

أي أننا نتحصل على 9 حالات ممكنة وهو ما يتطابق مع قانون القائمة، حيث:

$$\text{card } (\Omega) = [\mathrm{N}]^P = 3^2 = 9 \text{ ثنائيات}$$

نلاحظ أنه في حالة استعمال ترتيبة بتكرار وجود بعض التكرارات كما في حالة (x_1,x_1)، كما أنها تأخذ بأهمية الترتيب للعناصر المختارة، مثلا: $(x_1,x_2) \neq (x_2,x_1)$.

مثال رقم 2: كم كلمة متكونة من حرفين يمكن تشكيلها من بين الأحرف الأربعة التالية: $\{a, b, c, d\}$.

في البداية عدد عناصر المجموعة المدروسة هو N= 4، وعدد الاختيارات هو P= 2. الكلمات التي يمكننا تشكيلها يمكن أن تكون على سبيل المثال $(aa),(ab),(ba),(cb),(bc)$، ما يعني وجود تكرار كما في حالة (aa) مع كون ترتيب العناصر المختارة مهم فمثلا $(ab) \neq (ba)$. الملاحظ أن شرطي تطبيق قانون ترتيبة بتكرار متوفرين، إذا للحصول على عدد الحالات الكلية لتشكيل الكلمات من حرفين نطبق قانون الترتيبة بتكرار كما يلي:

$$\text{card } (\Omega) = [\mathrm{N}]^P = 4^2 = 16$$

2- ترتيبة بدون تكرار:

إنّ شرط تطبيق قانون ترتيبة بدون تكرار يعتمد أساسا على عنصرين هما:

- لا يسمح بوجود تكرار ضمن العينة الواحدة المختارة (سحب بدون إرجاع أو بدون إعادة)؛
- ترتيب العناصر المختارة في العينة الواحدة مهم (سحب على التوالي).

فإذا اعتبرنا مجتمعا يتكون من N عنصر، نريد أن نختار منه عينة تتكون من P عنصر حيث نقوم باختيارها وفقا للشرطين السابقين، ولتكن Ω مجموعة الإمكانيات الكلية لسحب هذه العينات. في هذه الحالة نجد أنّ عدد الحالات الكلية يعطى بقانون الترتيبة بدون تكرار الذي يرمز له بـ (A_N^P) ويعطى بالعلاقة التالية:

$$\textbf{card } (\Omega) = A_N^P = \frac{N!}{(N-P)!}$$

حيث: N هو عدد عناصر المجموعة الكلية، وP هو عدد عناصر العينة (الاختيارات أو عدد التجارب).

ملاحظة: يحسب $(N!)$ بالطريقة التالية:

$$N! = N.(N-1)! = N.(N-1).(N-2)! = \ldots\ldots\ldots = N.(N-1).(N-2)\ldots.3.2.1!$$

خواص: $0! = 1$ و $1! = 1$

مثال تطبيقي: $5! = 5.4.3.2.1 = 120$ و $4! = 4.3.2.1 = 24$ و $3! = 3.2.1 = 6$

مثال رقم 1: انطلاقا من المثال السابق للمجموعة E والتي كانت بالشكل التالي: $E = \{x_1, x_2, x_3\}$، نريد تكوين مجموعة من الثنائيات من بين عناصر المجموعة E باستعمال شرطي ترتيبة بدون تكرار، نتحصل بذلك على المجموعة التالية:

$$\Omega = \{(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_2,x_1),(x_2,x_3),(x_3,x_1),(x_3,x_2)\}$$

أي أننا نتحصل على 6 حالات ممكنة وهو ما يتطابق مع قانون الترتيبة بدون تكرار، حيث:

$$\text{card}\ (\Omega) = A_3^2 = \frac{3\,!}{(3-2)\,!} = \frac{3\,!}{1\,!} = 6 \text{ ثنائيات}$$

مثال رقم 2: لدينا مجموعة طلبة متكونة من 5 عناصر، نريد تشكيل لجنة ممثلة لهؤلاء الطلبة متكونة من عنصرين، أحدهما رئيس والثاني نائب له. كم حالة يمكن تشكيلها؟

الحل: عدد اللجان الممكن تشكيلها هو:

$$\text{card}\ (\Omega) = A_5^2 = \frac{5\,!}{(5-2)\,!} = \frac{5\,!}{3\,!} = 20$$

مثال رقم 3: تقدّم 4 أشخاص لشغل 3 مراكز وظيفية (رئيس فريق العمل، مساعده الأول، مساعده الثاني)، وهم مساوون بالكفاءة. كم عدد الحالات الممكنة لاختيار هؤلاء الأشخاص؟

الحل: عدد الحالات الممكنة لاختيار الأشخاص هو:

$$\text{card}\ (\Omega) = A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)\,!} = \frac{4\,!}{1\,!} = 24$$

3- التبديلة:

تعتبر التبديلة حالة خاصة من الترتيبة بدون تكرار، أي أننا نفترض وجود شرط عدم وجود تكرار وشرط ترتيب العناصر المختارة في العينة مهم، مع إضافة شرط ثالث وهو أنّ عدد عناصر المجموعة الكلية المدروسة يساوي عدد عناصر العينة المختارة (حجم العينة) بمعنى: $N = P$.

فقانون التبديلة والذي يرمز له بالرمز (P_n) يستعمل عندما يكون حجم العينة يساوي حجم المجتمع مع الشرطين السابقين للترتيبة بدون تكرار، ويعطى قانونها وفقا للعلاقة التالية:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

وتجدر الإشارة لوجود الحالات التالية في التبديلة:

3-1- حالة التبديلة بدون تكرار العناصر: أي عدم وجود تكرار العناصر في المجموعة، وتعطى بالعلاقة التالية: $P_n = n!$، حيث:

$$P_n = \boldsymbol{n}\,.(\boldsymbol{n}-\mathbf{1}).(\boldsymbol{n}-\mathbf{2}).(\boldsymbol{N}-\mathbf{3})........\mathbf{3.2.1}$$

مثال: - ما هي عدد الحالات الممكنة لجلوس أربعة أشخاص في الصف الأول للمسرح؟

- ما هي عدد مرات ترتيبهم إذا كان اثنان منهم يجب أن يجلسوا متلازمين؟

الحل: - عدد الحالات الممكنة لجلوس أربعة أشخاص في الصف الأول للمسرح هو:

$P_4 = 4\,! = 24$

– عدد مرات ترتيبهم إذا كان اثنان منهم وليكونوا A و B يجب أن يجلسوا متلازمين، يمكن ان نعتبرهم شخص واحد، وعليه فإننا أمام ترتيب ثلاثة أشخاص هم AB و C و D، وعليه فإن التراتيب الممكنة للأشخاص الثلاثة هي: $3! = 3.2.1 = 6$، وكذلك فإن الشخصين A و B عدد ترتيبهم فيما بينهم هي: $2! = 2$، أي AB وBA. **وعليه فإن عدد التراتيب الكلية الممكنة هي:** $3!\,2! = 6\,.2 = 12$

3–2– حالة التبديلة مع وجود تكرارات في العناصر: أي بعض عناصر المجموعة تتكرر. فإذا كان لدينا مجموعة أشياء عدد عناصرها n حيث أن بعض العناصر تتكرر أي هي من نفس النوع، بمعنى آخر إذا كان لدينا مجموعة مشكلة من n عنصر تحتوي على v زمرة متمايزة ذات عناصر غير متمايزة، مثلا:

$$\{(a_1, a_2, \dots . a_n)_{n_1}, (b_1, b_2, \dots . b_n)_{n_2}, \dots \dots \dots, (s_1, s_2, \dots . s_n)_{n_k}\}$$

أي n_1 من النوع الأول، n_2 من النوع الثاني، n_3 من النوع الثالث، .... الخ ونريد ترتيبها، فإن عدد الحالات الممكنة تعطى بالعلاقة التالية:

$$P_n^{n_1 n_2 n_3 \dots n_k} = \frac{n!}{n_1!\; n_2!\; n_3! \dots \dots \dots n_k\,!}$$

مثال رقم 1: كم عدد مكون من 5 أرقام يمكننا تشكيله بالاعتماد على قاعدة البيانات التالية:

$\{4,4,3,2,2\}_5$

الحل: – مجموعة الأرقام الكلية تحتوي على 5 عناصر أي $n = 5$

– عدد مرات تكرار الرقم 4 في المجموعة هو 2 أي $n_1 = 2$

– عدد مرات تكرار الرقم 3 في المجموعة هو 1 أي $n_2 = 1$

– عدد مرات تكرار الرقم 1 في المجموعة هو 2 أي $n_3 = 2$

ومنه عدد إمكانيات تشكيل عدد مكون من 5 أرقام هو:

$$P_5^{2,1,2} = \frac{5!}{2!\,1!\,2!} = \frac{60}{2} = 30$$

مثال رقم 2: ما هي عدد الكلمات (ليس بالضرورة أن يكون لها معنى) يمكن تشكيلها من نفس حروف كلمة STATISTICS.

الحل: – مجموعة الأحرف الكلية التي تكون كلمة STATISTICS هي $n = 10$

– عدد مرات تكرار الحرف S في المجموعة هو 3 أي $n_1 = 3$

– عدد مرات تكرار الحرف T في المجموعة هو 3 أي $n_2 = 3$

– عدد مرات تكرار الحرف A في المجموعة هو 1 أي $n_3 = 1$

– عدد مرات تكرار الحرف I في المجموعة هو 2 أي $n_4 = 2$

– عدد مرات تكرار الحرف C في المجموعة هو 1 أي $n_5 = 1$

ومنه عدد إمكانيات تشكيل كلمات من الحروف السابقة هو:

$$P_{10}^{3,3,1,2,1} = \frac{10!}{3!\,3!\,1!\,2!\,1!} = \frac{3628800}{6.6.1.2.1} = 50400$$

3–2– حالة التبديلة الدائرية: في بعض الأحيان نحتاج إلى تبديل أو ترتيب عناصر مجموعة معينة في وضعية دائرية مثل طاولة دائرية الشكل،عدد الطرق الممكنة لذلك تعطى بالعلاقة التالية:

$$\mathrm{P_n} = (n-1)! = (n-1).(n-2).(N-3)\ldots\ldots.3\ .2\ .1$$

أي أننا نقوم بتثبيت العنصر الأول ثم نرتب بقية العناصر حوله وبالنسبة له.

مثال تطبيقي: كيف يجلس 10 أشخاص على طاولة مستديرة مؤلفة من 10 أماكن؟

الحل: $\mathrm{P_{10}} = (10-1)! = 9! =$

4– التوفيقة بدون تكرار:

إنّ شرط تطبيق قانون توفيقة بدون تكرار يعتمد أساسا على عنصرين هما:

– لا يسمح بوجود تكرار ضمن العينة الواحدة المختارة أكثر من مرة؛

– ترتيب العناصر المختارة في العينة الواحدة غير مهم (سحب في آن واحد).

فإذا اعتبرنا مجتمعا يتكون من N عنصر، نريد أن نختار منه عينة تتكون من P عنصر حيث نقوم باختيارها وفقا للشرطين السابقين، ولتكن Ω مجموعة الإمكانيات الكلية لسحب هذه العينات. في هذه الحالة نجد أنّ عدد الحالات الكلية يعطى بقانون التوفيقة بدون تكرار الذي يرمز له بـ $(\mathrm{C_N^P})$ ويعطى بالعلاقة التالية:

$$\text{card}\ (\Omega) = \mathrm{C_N^P} = \frac{N!}{P!\,(N-P)!} = \frac{A_N^P}{P!}$$

مثال رقم 1: انطلاقا من المثال السابق للمجموعة E والتي كانت بالشكل التالي: $\mathrm{E} = \{\mathrm{x_1, x_2, x_3}\}$، نريد تكوين مجموعة من الثنائيات من بين عناصر المجموعة E باستعمال شرطي توفيقة بدون تكرار، نتحصل بذلك على المجموعة التالية:

$$\Omega = \{(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_2,x_3)\}$$

أي أننا نتحصل على 3 حالات ممكنة وهو ما يتطابق مع قانون التوفيقة بدون تكرار، حيث:

$$\text{card}\ (\Omega) = \mathrm{C_3^2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = 3 \text{ ثنائيات}$$

مثال رقم 2: لدينا قسم يتكون من 10 طلبة، نريد تشكيل لجنة لهؤلاء الطلبة تتكون من 3 أعضاء.

بكم طريقة يمكن تشكيل هذه اللجنة؟

الحل: عدد الحالات الكلية الممكنة هو:

$$\text{card}\ (\Omega) = C_{10}^{3} = \frac{10\,!}{3!\,(10-3)\,!} = 120$$

5- التوفيقة بتكرار:

إنّ شرط تطبيق قانون توفيقة بتكرار يعتمد أساسا على عنصرين هما:

- إمكانية وجود تكرار ضمن العينة الواحدة المختارة؛
- ترتيب العناصر المختارة في العينة الواحدة غير مهم (سحب في آن واحد).

فإذا اعتبرنا مجتمعا يتكون من N عنصر، نريد أن نختار منه عينة تتكون من P عنصر حيث نقوم باختيارها وفقا للشرطين السابقين، ولتكن Ω مجموعة الإمكانيات الكلية لسحب هذه العينات. في هذه الحالة نجد أنّ عدد الحالات الكلية يعطى بقانون التوفيقة بتكرار الذي يرمز له بـ (K_N^P) ويعطى بالعلاقة التالية:

$$\textbf{card}\ (\boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{K_N^P} = \mathbf{C_{N+P-1}^{N-1}} = \mathbf{C_{N+P-1}^{P}}$$

مثال: نقوم بإلقاء 3 قطع نقدية دفعة واحدة، ما هو عدد الحالات الكلية لهذه التجربة؟

الحل: يمكن التعبير عن عدد الحالات الكلية لهذه التجربة بالمجموعة التالية:

$$\boldsymbol{\Omega = \{FFF, PPP, PFF, FPP\}}$$

أي أننا نتحصل على 4 حالات ممكنة وهو ما يتطابق مع قانون التوفيقة بتكرار، حيث:

$$\textbf{card}\ (\boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{K_2^3} = \mathbf{C_{2+3-1}^{2-1}} = \mathbf{C_4^1} = \mathbf{4}$$

6- خواص التوفيقات:

1) $\forall N \in \mathbb{N}: C_N^N = C_N^0 = 1$

2) $\forall N \in \mathbb{N}: C_N^1 = C_N^{N-1} = N$

3) $\forall N \in \mathbb{N}, P \in \mathbb{N} / P \leq N : C_N^P = C_N^{N-P}$

مثلا: $C_8^3 = = C_8^{8-3} = C_8^5$

4) $\forall N \in \mathbb{N}, P \in \mathbb{N} / P \leq N :$

$$C_N^0 + C_N^1 + \ldots\ldots\ldots + C_N^P + C_N^N = \sum_{P=0}^{N} C_N^P = 2^N$$

هذا القانون يسمح بحساب عدد عناصر مجموعة أجزاء المجموعة المتكونة من N، وهناك طريقتان لذلك:

- ✓ نحسب على التوالي المجموعة الجزئية المتكونة من 0 عنصر وعدد حالاتها هو $1 = C_N^0$ وهذا يعني فقط المجموعة الخالية لأنها المجموعة الوحيدة التي لا يوجد بها أي عنصر، ثم ننتقل إلى حساب عدد المجموعات الجزئية الأخرى إلى غاية المجموعة الجزئية المتكونة من N عنصر وعدد حالاتها هو $C_N^N = 1$ أي توجد مجموعة واحدة وهي حتما المجموعة الكلية.
- ✓ كل عنصر من عناصر المجموعة له حالتين، يمكن أن يظهر في المجموعة الجزئية كما لا يمكن أن يظهر فيها، وبالتالي لدينا حالتين لكل عنصر أي 2^N حالة في المجموع.

5) $\forall N \in \mathbb{N}, P \in \mathbb{N} / P \leq N : \mathrm{C}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{P}} = \mathrm{C}_{\mathrm{N-1}}^{\mathrm{P}} + \mathrm{C}_{\mathrm{N-1}}^{\mathrm{P-1}}$

6) $\forall N \in \mathbb{N}, P \in \mathbb{N} / P \leq N : N^P \geq A_N^P \geq C_N^P$

7) $P = 1, \forall N \in \mathbb{N} : N^1 = A_N^1 = C_N^1 = K_N^1 = N$

8) $\forall N \in \mathbb{N}, P \in \mathbb{N} / P \leq N : K_N^P \geq C_N^P$

9) $\forall N \in \mathbb{N}, P \in \mathbb{N} : K_N^P = K_N^{P-1} + K_{N-1}^P$

10) في حالة ترتيبة بتكرار وتوفيقة بتكرار يمكن أن يكون: $P > N$

11) عندما يكون N كبير بما فيه الكفاية بحيث يصبح من الصعب حساب قيمة !N، نستعمل علاقة ستيرلينغ (STIRLING) التقريبية التالية: $N! \approx \sqrt{2\pi N}\; N^N e^{-N}$

7- مثلث باسكال:

إن الخاصية الخامسة من خواص التوفيقات تسمح لنا ببناء جدول يسمى "مثلث باسكال"، يتكون هذا الجدول من أسطر تتمثل في عدد عناصر المجموعة المدروسة N، وأعمدة تتمثل في عدد عناصر العينة المختارة P والتي تحسب وفق الطريقة التالية: $\mathrm{C}_{\mathrm{N-1}}^{\mathrm{P}} + \mathrm{C}_{\mathrm{N-1}}^{\mathrm{P-1}}$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{C}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{P}}$$

ويكون بذلك الجدول كما يلي:

N \ P	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

كما يوجد جدول آخر يشبه جدول مثلث باسكال يخص التوفيقات بتكرار والذي يعتمد أساسا على علاقة التراجع التالية: $K_N^P = K_N^{P-1} + K_{N-1}^P$

N \ P	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7
3	1	3	6	10	15	21	28
4	1	4	10	20	35	56	84

210	126	70	35	15	5	1	5
462	252	126	56	21	6	1	6

8- دستور ثنائي الحد:

يقصد به الدستور الذي يعطي مجموع معاملات العددين الكيفيين a و b عند أي أس طبيعي كيفي n.

نعلم أن: $\forall(a,b)$

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

يمكن كتابة المعادلات السابقة على النحو التالي:

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1\, a^0 b^1$

$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 a^0 b^2$

$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^3$

.

.

.

.

.

$(a+b)^n = C_n^0 a^{n-0} b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_n^n a^0 b^n$

ومنه يمكن كتابة الصياغة العامة لدستور ثنائي الحد عند أي أس طبيعي كيفي n على النحو التالي:

$$\boldsymbol{(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\, a^{n-p} b^p}$$

مثال: أوجد ما يلي: $(x+2)^4$

$(x+2)^4 = \sum_{p=0}^{4} C_n^p\, x^{4-p} 2^p = C_4^0 x^4 2^0 + C_4^1 x^3 2^1 + C_4^2 x^2 2^2 + C_4^3 x^1 2^3 + C_4^4 x^0 2^4$

$= x^4 + (4\times 2)\, x^3 + (6\times 4)\, x^2 + (4\times 8)\, x + 16$

$= x^4 + 8\,x^3 + 24\,x^2 + 32\,x + 16$

المحور الرابع

الاحتمالات

تمهيد:

في كل تجربة عشوائية هناك دوما شك متعلق بالنتيجة التي ستقع وبالتالي تحقق أو عدم تحقق الحدث، لأجل ذلك كان من الضروري تعيين عدد محصور بين 0 و 1 لإعطاء نسبة ظهور أو تحقق هذا الحدث. نقول أن نسبة ظهور أو تحقق هذا الحدث هي 100 % أي باحتمال يساوي 1، ونقول أن نسبة وقوع هذا الحدث هو 0 % أي باحتمال يساوي 0، أو أن نقول أيضا أن نسبة وقوع هذا الحدث هي 40 % أي باحتمال يساوي 0,4 وهكذا. حاولنا في هذا المحور عرض المفاهيم الأساسية في نظرية الاحتمالات مع تحديد مختلف الخواص، إضافة إلى التطرق للاحتمالات الشرطية والدساتير الأساسية للاحتمالات.

1- تعريف الاحتمال:

يعرّف احتمال وقوع الحادثة (A) بأنه نسبة الحالات الملائمة لوقوع الحادثة (A) إلى الحالات الكلية والتي يمثلها فضاء العينة. ويعطى الاحتمال بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{P\ (A)} = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة لـ}(A)}{\text{عدد الحالات الكلية الممكنة لـ}(\Omega)} = \frac{\boldsymbol{card\ (A)}}{\textbf{card }(\boldsymbol{\Omega})} = \frac{\boldsymbol{m}}{\textbf{N}}$$

فلو رمينا حجر نرد وعرفنا الحادثة (A) ظهور الرقم أقل من (5) مثلا فإن احتمال (A) هو:

$$\mathrm{P\ (A)} = \frac{4}{6}$$

حيث أن: $\Omega = \{1, 2\ ,3\ , 4, 5\ ,6\}$ و $A = \{1, 2\ ,3\ ,4\}$

2- خصائص الاحتمال:

2-1- قيمة الاحتمال تتراوح بين الصفر والواحد: بمعنى $0\ \leq \boldsymbol{P\ (A)}\ \leq 1$

- ✓ فإذا كانت عناصر الحادثة (A) مساوية لعناصر فضاء العينة تصبح قيمة الاحتمال 1:

$$\boldsymbol{P\ (A)} = \frac{\boldsymbol{card\ (A)}}{\textbf{card }(\boldsymbol{\Omega})} = \frac{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{N}} = \mathbf{1}$$

- ✓ وإذا كانت الحادثة (A) ذات نتائج مستحيلة تصبح قيمة الاحتمال 0:

$$\boldsymbol{P(A)} = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{N}} = \mathbf{0}$$

مثال: لدينا بطاقات مرقمة من 1 إلى 10، سحبنا بطاقة منها وعرفنا الحوادث التالية:

A البطاقة كانت تحمل رقم زوجي؛

B البطاقة كانت تحمل رقم فردي؛

C البطاقة كانت تحمل رقم فردي أو زوجي؛

D البطاقة كانت تحمل رقم فردي و زوجي.

المطلوب: إيجاد احتمال الحوادث السابقة.

الحل: لدينا مجموعة الحوادث الأولية التالية:

$\Omega = \{ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}.$

✓ *احتمال الحدث* (A):

$A = \{ 2; 4; 6; 8; 10\}.$

ومنه: $P(A) = \frac{5}{10}$

✓ *احتمال الحدث* (B):

$B = \{ 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 \}.$

ومنه: $P(B) = \frac{5}{10}$

✓ *احتمال الحدث* (**C**):

$C = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 \}.$

ومنه: $P(C) = \frac{10}{10} = 1$

✓ *احتمال الحدث* (D):

$D = \{ \} = \emptyset$

ومنه: $P(D) = \frac{0}{10} = 0$

2-2- احتمال الحدث المكمل: إذا كان A حدث كيفي، ومتممه بالنسبة لـ Ω هو $\bar{A}$ فإن: $A \cup \bar{A} = \Omega$

ومنه نجد:

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

مثال: في إنتاج احد المعامل كانت ثلاثة من المنتجات غير سليمة من بين ثماني وحدات منتجة. سحبت أحد المنتجات من إنتاج المعمل:

- ما هو احتمال أن تكون غير سليمة؟
- ماهو احتمال أن تكون سليمة؟

الحل: إذا اعتبرنا الإنتاج غير السليم هو A فإن الإنتاج السليم سيكون حدثه المكمّل أي $\bar{A}$. ومنه:

- $P(A) = \frac{3}{8}$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

2-3- قانون الجمع أو الاتحاد: يعرف قانون الجمع أو الاتحاد للحدثين A و B المعرفين على الفضاء العيني Ω كما يلي:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال: إذا كان عملاء أحد البنوك يتوزعون كالآتي: 100 من العملاء يدخرون أموالهم بالدينار الجزائري، و 80 يدخرون أموالهم بالدولار الأمريكي، و 20 من العملاء يدخرون أموالهم بالدولار والدينار الجزائري.
تم اختيار أحد عملاء البنك بصفو عشوائية، ما هو احتمال أن يكون هذا العميل يدخر أمواله بالدينار الجزائري أو بالدولار الأمريكي؟

الحل: نعتبر الحوادث التالية:

A: يدخر الأموال بالدينار الجزائري؛

إذا: $P(A) = \frac{100}{200} = 0.5$

B: يدخر الأموال بالدولار الأمريكي؛

إذا: $P(B) = \frac{80}{200} = 0.4$

$(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$: يدخر الأموال بالدينار الجزائري والدولار الأمريكي؛

إذا: $P(A \cap B) = \frac{20}{200} = 0.1$

في هذه الحالة نجد احتمال أن العميل يدخر أمواله بالدينار الجزائري أو بالدولار الأمريكي هو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.4 - 0.1 = 0.8$$

➢ **حالات متنوعة في قانون الجمع أو الاتحاد:**

أ- **إذا كانت الحوادث متنافية (منفصلة):** إذا كانت الحادثة A منفصلة عن الحادثة B أو كانتا متنافيتان في الحدوث فإن تقاطعهما سيكون مجموعة خالية (لا يمكن حدوثهما معا)، أي أن:

$$(A \cap B) = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

ويكون بذلك قانون الاتحاد أو الجمع لهذه الحوادث بالشكل التالي:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ويمكن تعميم صيغة الجمع في حالة الحوادث المتنافية بالشكل التالي:

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

مثال: في أحد مديريات الضرائب تمّ تحصيل الضريبة لـ 40 شركة تأمين و 50 شركة صناعية و 10 مؤسسات بنكية، وبعد انتهاء العملية سحبت إحدى المعاملات لتدقيقها. ما هو احتمال أن تكون لمؤسسة بنكية أو شركة صناعية.

الحل: نعتبر الحوادث التالية:

A: مؤسسة بنكية؛

إذا: $P(A) = \frac{10}{100} = 0.1$

B: شركة صناعية؛

إذا: $P(B) = \frac{50}{100} = 0.5$

$(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$: مؤسسة بنكية وشركة صناعية ؛

إذا: $P(A \cap B) = \frac{0}{100} = 0$

في هذه الحالة نجد احتمال أن المعاملة لمؤسسة بنكية أو شركة صناعية هو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.1 + 0.5 = 0.6$$

ب- إذا كانت الحوادث مستقلة: نقول عن حدثين أنهما مستقلين إذا كان تحقق أحدهما لا يرتبط بتحقق لحدث الآخر، ونقول عن حدثين أنهما مرتبطين إذا كان تحقق أحدهما يتأثر بتحقق الحدث الآخر. ومنه نقول أن الحدث **A** مستقل عن الحدث **B** إذا كان احتمال تحقق **A** لا يتأثر بحدوث أو عدم حدوث **B**.

وعليه فإن قانون الاستقلالية يعطى بالعلاقة التالية:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

وإذا كان لدينا **A** و **B** و **C** حوادث مستقلة عن بعضها البعض فإن:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

ملاحظة: إذا كان **A** و **B** حدثين مستقلين فإنه يكون لدينا كذلك:

- ✓ **B** و $\bar{\mathbf{A}}$ حدثين مستقلين؛
- ✓ **A** و $\bar{\mathbf{B}}$ حدثين مستقلين؛
- ✓ $\bar{\mathbf{B}}$ و $\bar{\mathbf{A}}$ حدثين مستقلين.

مثال: إذا كان احتمال ان يصيب اللاعب **A** الهدف هو $\frac{1}{3}$، واحتمال أن يصيب اللاعب **B** الهدف هو $\frac{1}{4}$، ما هو احتمال أن يصاب الهدف؟

الحل: باعتبار أن الحوادث كانت مستقلة فإن احتمال إصابة الهدف من كلا اللاعبين هو:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

أما احتمال أن يصاب الهدف فإنه يمثل احتمال إصابته من اللاعب **A** أو من اللاعب **B**:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

2-4- قوانين أخرى: من أجل **A** و **B** حدثين كيفيين (غير متنافيين) فإن احتمال حدوث **A** وعدم حدوث **B** يساوي احتمال **A** مطروحا منه احتمال حدوث (**A** و **B**)، أي:

$$P(A-B)=P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)$$

ومنه يصبح لدينا:

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\bar{B})$$

وكذلك بالنسبة لـ **B**، أي حدوث **B** وعدم حدوث **A** نجد:

$$P(B-A)=P(\bar{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$$

2-5- خاصية دي مورغان:

- ✓ $P(\overline{A\cap B})=P(\bar{A}\cup\bar{B})$
- ✓ $P(\overline{A\cup B})=P(\bar{A}\cap\bar{B})$

ولدينا أيضا:

- ✓ $P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)$
- ✓ $P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$

ولدينا أيضا:

- ✓ $P(\bar{A}\cup B)=P(\bar{A})+P(A\cap B)$
- ✓ $P(A\cup\bar{B})=P(\bar{B})+P(A\cap B)$

3- الاحتمال الشرطي (الحوادث المترابطة):

عادة ما يكون احتمال ظهور أو وقوع حدث معين مثلا **A** مرتبط بوقوع حدث آخر مثلا **B**، حيث أن **A** و **B** حدثين غير مستقلين، نسمي هذا الاحتمال بالاحتمال الشرطي ونرمز له بالرمز $\boldsymbol{P\left({}^{A}/_{B}\right)}$، وتقرأ كما يلي: احتمال وقوع **A** علما أن **B** قد وقع فعلا، ويعطى بالعلاقة التالية:

$$P\left({}^{A}/_{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

بشرط أن لا يكون $P(B)$ مساويا للصفر.

ملاحظة: من خلال علاقة الاحتمال الشرطي الموضحة أعلاه، إذا كان **A** و **B** حدثين مستقلين فإنه يصبح لدينا:

$$P\left({}^{A}/_{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)\times P(B)}{P(B)}=P(A)$$

ومنه إذا كان **A** و **B** حدثين مستقلين فإنه:

$$P\left({}^{A}/_{B}\right) = P\ (A)\ ;\ P\left({}^{B}/_{A}\right) = P\ (B)$$

مثال: البيانات التالية تمثل عددا من العاملين في احد المصانع حسب الجنس وكفاءة العامل:

الكفاءة / الجنس	ماهر (G)	غير ماهر ($\bar{G}$)	المجموع
ذكر (M)	20	10	30
أنثى (F)	15	5	20
المجموع	35	15	50

قمنا باختيار أحد العمال بشكل عشوائي، ما هو احتمال:

- ✓ أن يكون ذكرا؛
- ✓ أن يكون ماهرا؛
- ✓ أن تكون أنثى ماهرة؛
- ✓ إذا كانت أنثى، ما هو احتمال أن تكون ماهرة؛
- ✓ إذا كانت ذكرا، ما هو احتمال أن يكون ماهرا؛
- ✓ إذا كان ماهرا، ما هو احتمال أن يكون أنثى.

الحل:

- ✓ $P(\mathrm{M}) = \frac{30}{50}$
- ✓ $P(\mathrm{G}) = \frac{35}{50}$
- ✓ $P(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) = \frac{15}{50}$
- ✓ $P\left({}^{\mathrm{G}}/_{\mathrm{F}}\right) = \frac{P(\mathrm{F}\cap\mathrm{G})}{P(\mathrm{F})} = \frac{\frac{15}{50}}{\frac{20}{50}} = \frac{15}{50}$
- ✓ $P\left({}^{\mathrm{G}}/_{\mathrm{M}}\right) = \frac{P(\mathrm{M}\cap\mathrm{G})}{P(\mathrm{F})} = \frac{\frac{20}{50}}{\frac{30}{50}} = \frac{15}{20}$
- ✓ $P\left({}^{\mathrm{F}}/_{\mathrm{G}}\right) = \frac{P(\mathrm{F}\cap\mathrm{G})}{P(\mathrm{G})} = \frac{\frac{15}{50}}{\frac{35}{50}} = \frac{15}{35}$

4- الدساتير الأساسية للاحتمالات:

4-1- دستور الاحتمال الكلي:

يعالج دستور الاحتمال الكلي احتمال تحقق حدث ما يكون مرافقا لتحقق أحد الحوادث المتنافية مثنى مثنى وغير مستقلة عنه.

لتكن الحوادث $A_1,A_2,\dots,A_n$ حوادث شاملة ومتنافية مثنى مثنى (متنافية تبادليًا) ومعرفة على فضاء العينة S، أي أن:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S$$

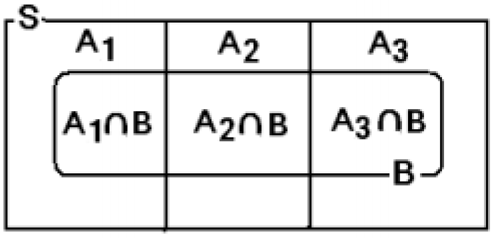
$$A_i \cap A_j = \phi; \forall i \neq j$$

إذا كانت الحادثة B هي أي حادثة معرفة على نفس فضاء العينة S، فإن:

$$P(B) = P(A_1)\,P(B|A_1) + P(A_2)\,P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)\,P(B|A_n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)$$

ملاحظات :

1. يمكن استنباط هذا القانون بالشكل التالي (للحالة $n = 3$):



من الشكل السابق يمكن استنباط ما يلي:

1. $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B) = \bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap B)$
2. $(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = \phi\,,\ \forall\, i \neq j$
3. $P(B) = P\{(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)\}$

$$= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} P(A_k \cap B)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)$$

2. يمكن تلخيص قانون الاحتمال الكلي بواسطة شكل الشجرة التالي (للحالة $n = 3$):

$$A_1 \xrightarrow{P(A_1)} B \mid A_1 \xrightarrow{P(B|A_1)} \Rightarrow P(A_1)\, P(B|A_1)$$

$$A_2 \xrightarrow{P(A_2)} B \mid A_2 \xrightarrow{P(B|A_2)} \Rightarrow P(A_2)\, P(B|A_2)$$

$$A_3 \xrightarrow{P(A_3)} B \mid A_3 \xrightarrow{P(B|A_3)} \Rightarrow P(A_3)\, P(B|A_3)$$

$$\text{المجموع} = P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\, P(B \mid A_k)$$

شكل : شجرة الاحتمال الكلي

مثال:

يتم إنتاج المصباح الكهربائي في أحد المصانع بواسطة إحدى ثلاث آلات. تنتج الآلة الأولى 20% من الإنتاج الكلي للمصنع وتنتج الآلة الثانية 30% من الإنتاج الكلي للمصنع وتنتج الآلة الثالثة 50% من الإنتاج الكلي للمصنع. ومعلوم من الخبرة السابقة أن نسبة الإنتاج التالف للآلة الأولى هي 1% و نسبة الإنتاج التالف للآلة الثانية هي 4% و نسبة الإنتاج التالف للآلة الثالثة هي 7%. إذا كانت التجربة هي اختيار مصباح واحد من إنتاج هذا المصنع بشكل عشوائي فما هو احتمال أن يكون هذا المصباح تالف؟

الحل:

لنعرف الحوادث التالية:

B = { المصباح تالف };

A_1 ={ المصباح من إنتاج الآلة الأولى };

A_2 ={ المصباح من إنتاج الآلة الثانية };

A_3 ={ المصباح من إنتاج الآلة الثالثة };

المعطيات:

$$P(A_1)=\frac{20}{100}=0.2;\quad P(B|A_1)=\frac{1}{100}=0.01$$

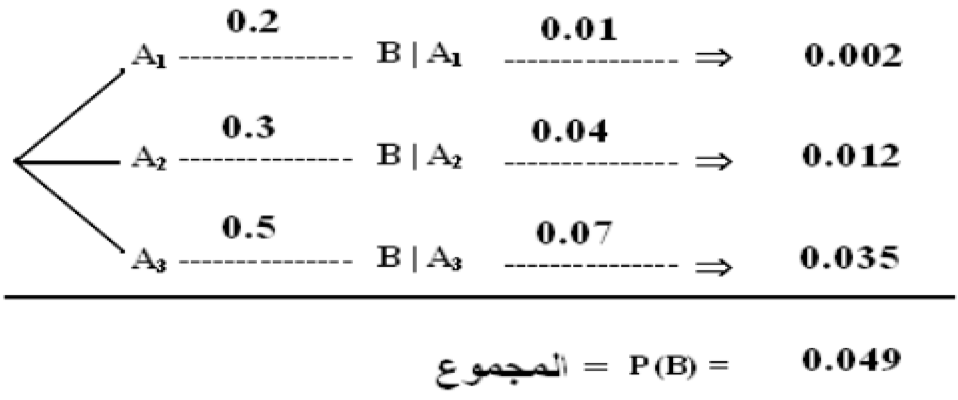
$$P(A_2)=\frac{30}{100}=0.3;\quad P(B|A_2)=\frac{4}{100}=0.04$$

$$P(A_3)=\frac{50}{100}=0.5;\quad P(B|A_3)=\frac{7}{100}=0.07$$

المطلوب:

$$\begin{aligned}
P(B) &= \sum_{k=1}^{3} P(A_k)P(B|A_k)\\
&= P(A_1)\,P(B|A_1) + P(A_2)\,P(B|A_2) + P(A_3)\,P(B|A_3)\\
&= 0.2\times0.01 + 0.3\times0.04 + 0.5\times0.07\\
&= 0.002 + 0.012 + 0.035\\
&= 0.049
\end{aligned}$$

يمكن تلخيص حل هذا المثال بواسطة شكل الشجرة التالي:



4-2- دستور بايز:

لنفرض أن هناك عدد من الأسباب المعينة التي يؤدي وقوع أحدها إلى وقوع حادثة ما، وهذه الحادثة تقع إذا وقع أحد أسبابها، فنظرية بايز تعتمد على مختلف القوانين السابقة حيث تعالج كيفية حساب الاحتمالات الشرطية لحوادث متنافية تشكل باتحادها مجموعة كلية ومرافقة لحدث ما ليكن مثلا B.

لتكن الحوادث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ حوادث شاملة ومتنافية مثنى مثنى (متنافية تبادليًا) ومعرفة على فضاء العينة S، أي أن:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S$$

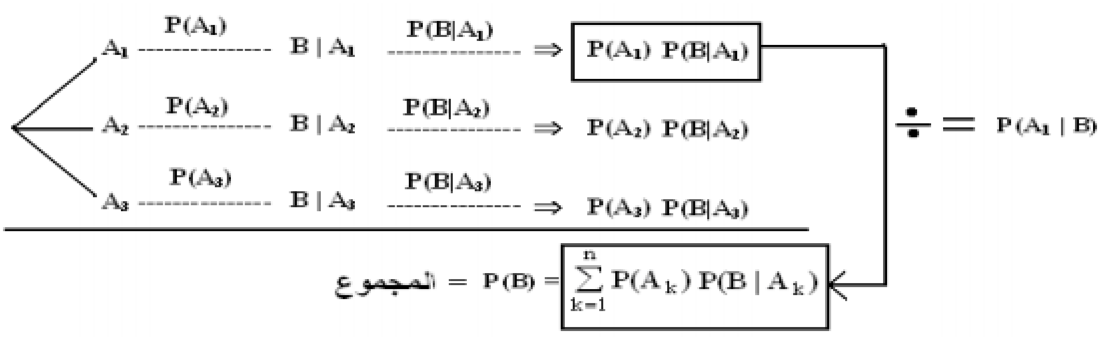
$$A_i \cap A_j = \phi; \quad \forall i \neq j$$

إذا كانت الحادثة B هي أي حادثة معرفة على نفس فضاء العينة S، فإن:

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i) P(B | A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k) P(B | A_k)} = \frac{P(A_i) P(B | A_i)}{P(B)}; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

ملاحظة:

يمكن تلخيص قانون بايز بواسطة شكل الشجرة التالية (للحالة n=3):



مثال: في نفس المثال السابق، لنفترض أن المصباح المختار كان تالفا، ما هو احتمال:

- ✓ أن يكون قد أنتج بواسطة الآلة الأولى؟
- ✓ أن يكون قد أنتج بواسطة الآلة الثانية؟
- ✓ أن يكون قد أنتج بواسطة الآلة الثالثة؟

الحل:

✓ احتمال أن يكون قد أنتج بواسطة الآلة الأولى:

إن المطلوب هو إيجاد $P(A_1|B)$ وباستخدام التعريف الشرطي وقانون الضرب للاحتمال فإن:

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.2\times 0.01}{0.049} = \frac{0.002}{0.049} = 0.0408$$

فالقانون المستخدم لحل هذا السؤال هو قانون بايز الذي تم التطرق له سابقا.

✓ احتمال أن يكون قد أنتج بواسطة الآلة الثانية:

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)} = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}$$

$$= \frac{0.3\times 0.04}{0.049} = \frac{0.012}{0.049} = 0.2449$$

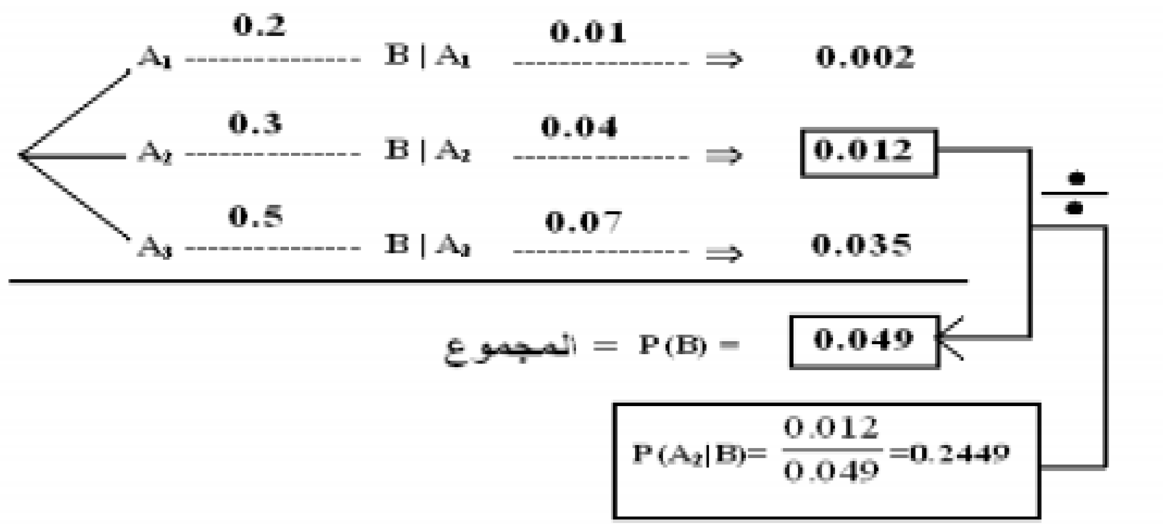
✓ احتمال أن يكون قد أنتج بواسطة الآلة الثالثة:

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)} = \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}$$

$$= \frac{0.5\times 0.07}{0.049} = \frac{0.035}{0.049} = 0.7142$$

نلاحظ أنه لو كان المصباح المختار تالفا فإن الاحتمال الأكبر هو أن يكون من إنتاج الآلة الثالثة

ملاحظة: يمكننا تلخيص استخدام قانون بايز لحل هذا المثال (السؤال الثاني أي احتمال أن يكون قد أنتج بواسطة الآلة الثانية) في شكل الشجرة التالي:



0.2
A1 B | A1
0.01
0.002
0.3
A2 B | A2
0.04
0.012
0.5
A3 B | A3
0.07
0.035
المجموع = P(B) =
0.049
P(A2|B)= 0.012 / 0.049 =0.2449

المحور الخامس

المتغيرة العشوائية المنقطعة وتوزيعها الاحتمالي

تمهيد:

بيّنّا من خلال المحور الرابع أن الاحتمالات تتعلق بأحداث عشوائية غير أكيدة، وللتعبير عن نتائج هذه التجارب العشوائية بشكل عددي سنتعرف على المتغيرات العشوائية.

1- المتغيرات العشوائية وأنواعها:

يرافق نتائج التجربة العشوائية مقدار يسمى المتغير العشوائي، وهذا المقدار يأخذ قيما مختلفة حسب نتيجة التجربة العشوائية.

مثال (1): (إلقاء زهرتي نرد مرة واحدة) هنا التجربة العشوائية هي إلقاء الزهرتين، ونتيجة التجربة هي النقاط التي تظهر على السطح العلوي للزهرتين والمقدار الذي يرافق نتائج هذه التجربة يمكن أن يكون مجموع النقط التي تظهر على السطح العلوي للزهرتين،هذا المقدار يأخذ القيم 2،3،4،...،12 وعلى ذلك فإن مجموع النقط التي تظهر على السطح العلوي للزهرتين متغير عشوائيا، سمي **متغير** لأنه يأخذ قيما **مختلفة** حسب نتيجة التجربة و سمي **عشوائي** لأنه يرافق نتائج تجربة **عشوائية**.

مثال (2): (اختيار طالب من بين طلاب الجامعة)، التجربة العشوائية هي اختيار طالب ونتيجة التجربة أحد طلاب الجامعة، والمقدار الذي يرافق نتائج هذه التجربة يمكن أن يكون طول الطالب، دخل أسرة الطالب، عدد أفراد أسرة الطالب...فإن اقتصرت دراستنا على طول الطالب فإن هذا المقدار يأخذ قيما مختلفة حسب طول الطالب الذي اختير وربما تأخذ أي قيمة 165سم أو 166سم أو أي قيمة بينهما، وعلى ذلك فإن طول الطالب **متغير عشوائي** لأنه يأخذ قيما مختلفة حسب نتيجة التجربة.[1]

مثال (3):

لنعتبر تجربة إلقاء قطعة من النقود ثلاث مرات متتالية، ونرمز لظهور الصورة بـ **(F)** والرقم بـ **(P)** و**(X)** هو المتغير العشوائي، يصبح عدد الحالات الممكنة هو Ω بحيث:

$$\Omega = (F,F,F),(F,F,P),(F,P,F),(P,F,F),(F,P,P),(P,F,P),(P,P,F),(P,P,P)$$

وإذا كان المتغير العشوائي (X) يعبر عن عدد الصور في التجربة السابقة فالتعبير كما يلي:

يعني حدث ظهور الصورة ثلاث مرات $X_{=3}$

يعني حدث ظهور الصورة مرتين $X_{=2}$

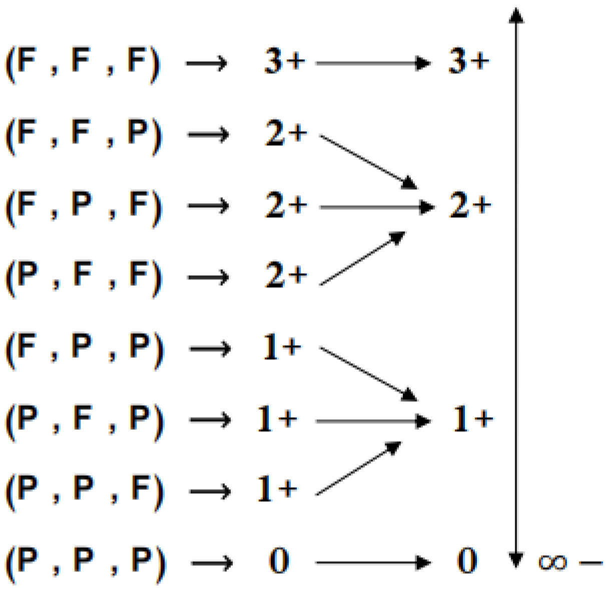
يعني حدث ظهور الصورة مرة واحدة $X_{=1}$

يعني حدث عدم ظهور الصورة $X_{=0}$

[1] جلال الصياد، مبادئ الطرق الاحصائية، الطبعة الأولى،دار تهامة للنشر والتوزيع،السعودية،1983،ص43.

وعليه قيم المتغير العشوائي لـ (X) هي:

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$



– **أنواع المتغيرات العشوائية:** يرمز للمتغير العشوائي بالرمز X وتكون المتغيرات العشوائية على نوعين: المتغير العشوائي المنقطع (المنفصل) و المتغير العشوائي المستمر(المتصل).

مثال: من بين الأحداث التالية حدد المتغيرات العشوائية المنقطعة والمتغيرات العشوائية المستمرة؟

1–عدد البنات لعائلة مكونة من خمسة أطفال.

2–قياس أوزان عدد معين من الأطفال.

3–نسبة الأشخاص المتعافين من فيروس ما خلال فترة زمنية معينة.

4–نتيجة القاء حجر النرد.

5–كمية الأمطار المتساقطة في منطقة ما خلال شهر جانفي.

6–عدد المباريات التي يفوز فيها الفريق الوطني خلال مباراة ما.

7–مدة حياة المصابيح الكهربائية المنتجة.

8–عدد حوادث المرور في منطقة ما وخلال فترة ما.

9–درجات الحرارة المسجلة في منطقة ما خلال شهر أوت.

10–عدد مرات ظهور الوجه (F) عند رمي قطعة نقدية عدة مرات.

الحل:

تحديد المتغيرات العشوائية المنقطعة (المنفصلة) والمتغيرات العشوائية المستمرة (المتصلة):

1–عدد البنات لعائلة مكونة من خمسة أطفال.← متغير عشوائي منقطع.

2-قياس أوزان عدد معين من الأطفال.← متغير عشوائي مستمر.

3-نسبة الأشخاص المتعافين من فيروس ما خلال فترة زمنية معينة.← متغير عشوائي مستمر.

4-نتيجة القاء حجر النرد. ← متغير عشوائي منقطع.

5-كمية الأمطار المتساقطة في منطقة ما خلال شهر جانفي.← متغير عشوائي مستمر.

6-عدد المباريات التي يفوز فيها الفريق الوطني خلال مباراة ما. ← متغير عشوائي منقطع.

7-مدة حياة المصابيح الكهربائية المنتجة. ←متغير عشوائي مستمر.

8-عدد حوادث المرور في منطقة ما وخلال فترة ما.← متغير عشوائي منقطع.

9-درجات الحرارة المسجلة في منطقة ما خلال شهر أوت. ←متغير عشوائي مستمر.

10-عدد مرات ظهور الوجه (F) عند رمي قطعة نقدية عدة مرات.← متغير عشوائي منقطع.

2- المتغير العشوائي المنقطع: هو ذلك المتغير الذي يكون فضاؤه العيني أي عدد حالاته الممكنة قيما منتهية أو غير منتهية ولكنها قيما قابلة للعد(منفصلة).

تعريف المتغير العشوائي المنقطع: هو المتغير العشوائي المنفصل الذي يأخذ قيما بينية ومتباعدة، ويرمز للمتغير العشوائي بشكل عام بحرف من الحروف الأبجدية الكبيرة X،Y،Z..ويرمز للقيم التي يأخذها المتغير بالحروف الأبجدية الصغيرة x،y،z..ومن أمثلة هذه المتغيرات:

1-عدد الأولاد الذكور في الأسرة المكونة من أربع أولادX ، $X:\{x=0,1,2,3,4\}$.

2-عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلا الشهر.

3-عدد مرات استخدام نوع معين من الأسمدة خلال الدورة الزراعية.

4-عدد الوحدات التالفة من إنتاج مزرعة معينة كل موسم.[1]

3- قانون التوزيع الاحتمالي المنقطع: كل جدول أو معادلة يعطي جميع القيم التي يمكن أن يأخذها متغير عشوائي منفصل مع احتمال كل قيمة منها يسمى توزيعا احتماليا منفصلا، [2] فإذا كان لكل متغير عشوائي

[1] خليل شرف الدين،الإحصاء الوصفي،شبكة الأبحاث والدراسات الاقتصادية،ص105.

[2] محمد صبحي أبو صالح، مبادئ الإحصاء، دار اليازوري للنشر و التوزيع، الأردن،2007، ص173.

منفصلX الذي يأخذ القيم $x_1, x_2, \dots, x_n$ احتمالا $P_1, P_2, \dots, P_n$ مقابلا له، فإنه يمكن تكوين جدول يدعى بجدول قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنقطع X الذي يتكون من سطرين أو عمودين لقيم كل من X و P ويتحقق قانون التوزيع الاحتمالي بتوفر شرطين أساسيين وهما:

-يجب أن يكون مجموع الاحتمالات للقيم التي يأخذها X تساوي الواحد الصحيح.

-وأن يكون احتمال كل قيمة من قيم X موجبة.

ويعرف قانون التوزيع الاحتمالي على شكل جدول كالآتي:

X	x_1	x_2	....	x_n	$\Sigma(P(X=x_i)$
$P(X=x_i)$	P_1	P_2	....	P_n	1

حيث:
$$\begin{cases} \Sigma(P(X=x_i)) = 1 \\ 0 \leq P(X=x_i) \leq 1 \end{cases}$$

ملاحظة: يجب أن تكون قيم X في الجدول مرتبة ترتيبا تصاعديا

نصطلح دائما على أن نرمز للمتغير العشوائي بحرف لاتيني كبير $(\boldsymbol{X, Y, Z, \dots})$ ولقيمه الممكنة بأحرف صغيرة $(\boldsymbol{x, y, z, \dots})$

مثال (4): (عند رمي قطعة نقدية مرتين)، وإذا عرفنا المتغير العشوائي X بأنه عدد الصور الظاهرة فأوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X؟

الحل: أولا يجب تكوين الفضاء العيني Ω حيث: $\Omega = \{(P, P), (P,F), (F, P), (F,F)\}$

حيث X تأخذ القيم: 2،1،0 ومنه: $P(X=0) = P((P, P)) = \frac{1}{4}$

$$P(X=1) = P((P,F), (F, P)) = \frac{2}{4}$$

$$P(X=2) = P((F,F)) = \frac{1}{4}$$

وعليه يكون قانون التوزيع الاحتمالي للمتغيرX حسب الجدول التالي:

X	0	1	2	$\Sigma(P(X=x_i)$
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

مع تحقق الشرطين التاليين:

$$\begin{cases} \Sigma(P(X = x_i)) = 1 \\ 0 \le P(X = x_i) \le 1 \end{cases}$$

محقق $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$

مع قيم الاحتمال كلها موجبة.

مثال (5):

أوجد التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي الذي يعبر عن مجموع العددين الظاهرين في التجربة رمي حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين.

الحل :

بالرجوع إلى المثال المتمثل في رمي حجري نرد علما أن:

$$\boxed{\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}}$$

$$p(x=2) = \frac{1}{36}, p(x=3) = \frac{2}{36}, \quad p(x=4) = \frac{3}{36}$$
$$p(x=5) = \frac{4}{36}, p(x=6) = \frac{5}{36}, \quad p(x=7) = \frac{6}{36}$$
$$p(x=8) = \frac{5}{36}, p(x=9) = \frac{4}{36}, \quad p(x=10) = \frac{3}{36}$$
$$p(x=11) = \frac{2}{36}, p(x=12) = \frac{1}{36}$$

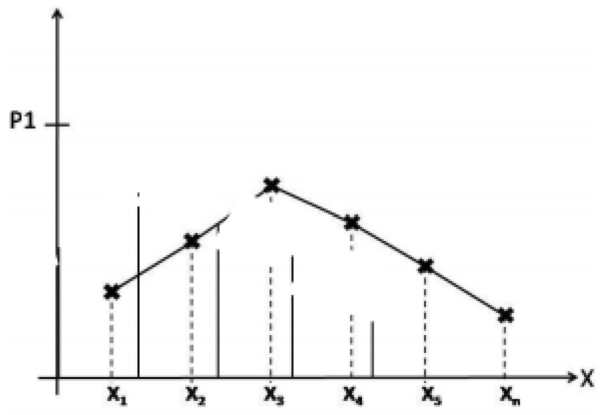
ونرتب هذه القيم في الجدول الآتي :

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

نقول أن **x** يحقق قانون التوزيع الإحتمالي لأن الشرطين محققين وهما:

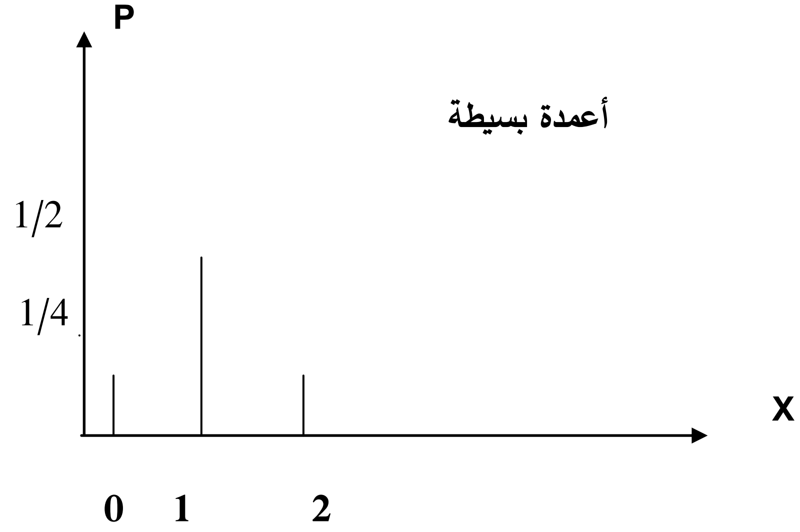
$$\sum P_i = 1 \quad \text{و} \quad 0 \le P_1 \le 1$$

4- التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي المنقطع: يتم التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي المنقطع بواسطة الأعمدة البسيطة (الأعمدة البيانية) على الشكل التالي:



مثال(6): مثل بيانيا التوزيع الاحتمالي للمثال (4)؟

الحـل:



5- دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير المنقطع F(X): تعرف دالة التوزيع للمتغير العشوائي المنقطع (دالة تراكمية) على النحو التالي: $F(X)= P\ (X\leq x_i)$

حيث يكون X رقم حقيقي ويشترط أن تكون قيما X مرتبة ترتيبا تصاعديا.

ولدالة التوزيع الخصائص التالية:

1-عندما X يؤول إلى نقطة (∞-)، فإن دالة التوزيع تساوي الصفر أي أن: $F(-\infty)= 0$

2-عندما X يؤول إلى نقطة (∞+)، فإن دالة التوزيع تساوي الواحد أي أن: $F(+\infty)= 1$

3- F(X) تكون غير سالبة: أي: $F(X)\geq 0$

4- دائما دالة التوزيع تكون محصورة بين الصفر و الواحد[1] $0 \leq F(X) \leq 1$

مثال (7): أوجد دالة التوزيع الاحتمالي للمثال (4) ثم مثلها بيانيا:

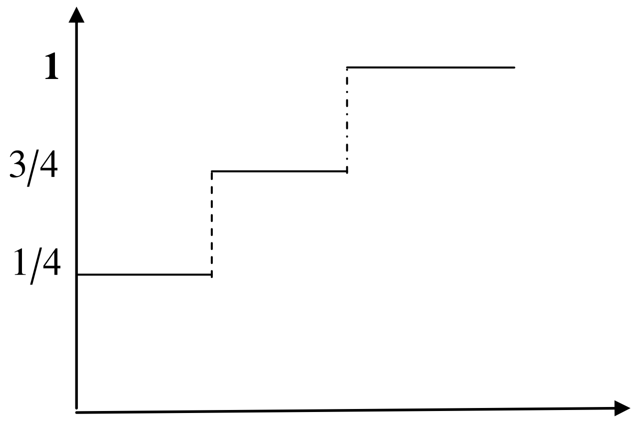
الحل: لدينا: $F(X)= P\ (X \leq x_i)$ وكأننا نحسب في المتجمع الصاعد

X	0	1	2	$\Sigma(P(X = x_i))$
$P\ (X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1
$F(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	/

وتعطى الصيغة العامة لدالة التوزيع الاحتمالي بـ:

$$F(X): \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \leq X < 1 \\ \frac{3}{4} & 1 \leq X < 2 \\ 1 & X \geq 2 \end{cases}$$

التمثيل البياني لـ $F(X)$ يكون من خلال المنحنى السلمي المبين أدناه:



[1] كمال بوعظم، الاحصاء الاستدلالي من الجانب النظري والتطبيقي،الطبعة الأولى، دار زهران للنشر والتوزيع، الأردن، 2012، ص36.

المحور السادس

المتغيرة العشوائية المستمرة وتوزيعها الاحتمالي

تمهيد:

المتغير العشوائي المستمر هو ذلك المتغير الذي يكون فضاءه العيني أي عدد حالاته الممكنة قيما غير منتهية وغير قابلة للعد، فتأتي قيمه على شكل مجال (فئات).

1- تعريف المتغير العشوائي المستمر: هو الذي يأخذ قيما متصلة، ويأخذ عدد لانهائي من القيم الممكنة له داخل مجاله، فإذا كان X متغير عشوائي مستمر، ويقع في المدى (a,b)، أي أن:

$\{X = x: a < x < b\}$، فإن للمتغير X عدد لا نهائي من القيم تقع بين الحدين الأدنى والأعلى(a,b) ومن الأمثلة على المتغيرات الكميـة المستمرة ما يلي:[1]

1- كمية الألبان التي تنتجها البقرة في اليوم باللتر: $\{X = x: 10 < x < 40\}$

2- فترة صلاحية حفظ الدجاج المبرد بالأيام: $\{X = x: 1 < x < 5\}$

3- وزن الجسم بالكيلوجرام للأعمار(30-40): $\{X = x: 55 < x < 80\}$

2- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر (دالة الكثافة الاحتمالية): لا يمكن للمتغير العشوائي المستمر أن يكون على شكل جدول كما هو الحال بالنسبة للمتغيرات المنقطعة، ولكنه يكون على شكل دالة تسمى بدالة الكثافة الاحتمالية وتكون معرفة على الشكل التالي:[2]

$$f(X):\begin{cases} f(X) & X \in [a,b] \\ 0 & X \notin [a,b] \end{cases}$$

حيث دالة الكثافة الاحتمالية $f(X)$ هي مجموعة القيم اللامتناهية في مجال محدود التي يمكن أن يأخذها المتغير X والاحتمالات الملحقة بها ولكي تكون $f(X)$ دالة كثافة احتمالية يجب تحقق شرطين:[3]

$$f(X):\begin{cases} f(X) \geq 0 & \forall\ X \in [a,b] \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(X)dx = 1 \end{cases}$$

[1] خليل شرف الدين،مرجع سبق ذكره،ص105.

[2] كمال بوعظم، مرجع سبق ذكره، ص43.

[3] أمحمد معتوق، الإحصاء الرياضي والنماذج الإحصائية، ديوان المطبوعات الجامعية،الجزائر 2015ص20.

مثال (1): إذا كانت لدينا الدالة $f(\mathrm{X})$ والمعرفة كما يلي:

$$f(\mathrm{X}):\begin{cases}2\mathrm{X} & 0<\mathrm{X}<1\\ 0 & \text{لقيم X الأخرى}\end{cases}$$

هل $f(\mathrm{X})$ دالة كثافة احتمالية؟

الحل: بالعودة لشروط دالة الكثافة الاحتمالية فإن:

1- لكل قيمة X في منطقة التعريف فإن $f(\mathrm{X}) \geq 0$

2- لو أخذنا تكامل الدالة في الفترة المحددة فإن:

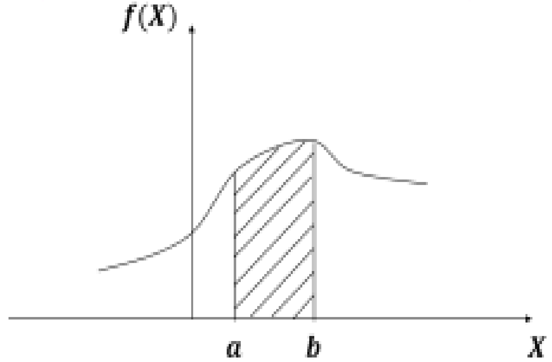
$$\int_0^1 f(\mathrm{X})dx=\int_0^1 2\mathrm{X}dx=\left[2\frac{\mathrm{X}^2}{2}\right]_0^1=1^2-0^2=1$$

وبتحقق الشرطين فإن $f(\mathrm{X})$ دالة كثافة احتمالية.

3- التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية: بيان دالة الكثافة الاحتمالية للدالة $f(\mathrm{X})$ يمثل بمنحنى متصل، وبما أن X تأخذ عددا لا متناهيا من القيم داخل أي مجال، فإن احتمال قيمة بعينها يكون ذلك بحساب المساحة تحت منحنى $f(\mathrm{X})$ بين حدود المجال أي أن:[1]

$$\mathrm{P}(\mathrm{a}<X<b)=\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(\mathrm{X})dx$$

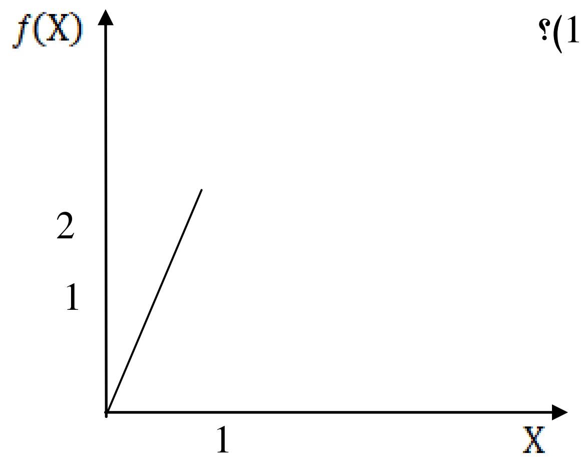
التمثيل البياني لدالة الكثافة للمتغير العشوائي المستمر



[1] محمد معتوق، مرجع سبق ذكره، ص21.

مثال (2): مثل بيانيا دالة الكثافة الاحتمالية للمثال(1)؟

الحل: التمثيل البياني يظهر في الشكل المقابل.



4- دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر F(X) (تابع الاحتمالات): بالنسبة للمتغير العشوائي المستمر تعرف دالة التوزيع F(X) بما يلي:

$$F(X)= P(X < x_i) = \int_{-\infty}^{x} f(X)dx$$

لدالة التوزيع أهمية أكبر بالنسبة للمتغير المستمر، السبب في ذلك أننا نهتم، في حالة المتغير المستمر، باحتمال مجال وليس باحتمال نقطة، ولحساب احتمال مجال من الأيسر التعويض في تابع الاحتمالات بدلا من حساب التكامل في كل مرة. يتضح ذلك من القاعدة التالية: بفرض a, b نقطتان من مجال تعريف (X)، بحيث $(b > a)$. لحساب احتمال أن تكون (X) تنتمي إلى المجال $]a, b[$.

حساب الاحتمال يكون من خلال دالة التوزيع:

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$ علمًا أنَّ : $0 \leq F(x) \leq 1$

F(X) تمثل المساحة المحصورة تحت المنحنى $f(X)$والواقعة على يسار النقطة x ، تمتاز هذه الدالة بنفس الخصائص السابق ذكرها للمتغير المنقطع أي أن:[1] $F(X) \geq 0$

$$x \to -\infty \Rightarrow F(X) = 0$$

$$x \to +\infty \Rightarrow F(X) = 1$$

ملاحظة هامة:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b)$$

[1] كمال بوعظم، مرجع سبق ذكره، ص44.

ولحساب احتمال المجال فإننا نقوم بالتعويض في دالة التوزيع بدلا من حساب التكامل وفق القاعدة التالية:

بفرض a و b نقطتان من مجال تعريف X بحيث a <b ولحساب احتمال أن تكون X تنتمي إلى المجال $]a, b]$:[1]

$$P(a < x \leq b) = P(x \leq b) - P(x \leq a) = F(b) - F(a)$$

مثال (3): أوجد دالة التوزيع الاحتمالية F(X) للمثال(1)؟

الحل: ايجاد دالة التوزيع الاحتمالي للدالة $f(X)$ حيث:

$$f(X): \begin{cases} 2X & 0 < X < 1 \\ 0 & \text{لقيم X الأخرى} \end{cases}$$

لدينا: $F(X) = P(X < x_i) = \int_0^x f(X)dx$

$$x \in [0 - 1] : F(X) = \int_0^x f(X)dx = \int_0^x 2Xdx = X^2$$

ومنه: $F(X) = X^2$

مثال (4):

فإذا كان المتغير (X) متغير عشوائي له توزيع منتظم على المجال $[a, b]$ فإن دالة كثافته الاحتمالية $f(x)$ تعطى بالشكل التالي:

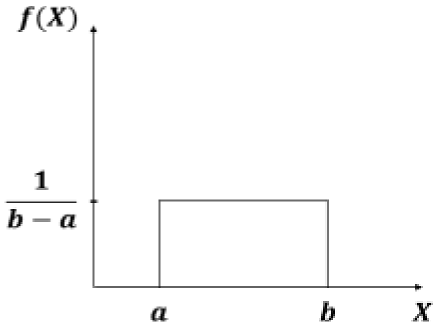
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & ; a < x < b \\ 0 & ; si\,non \end{cases}$$

المطلوب:

1. التمثيل البياني لدالة الكثافة $f(x)$؛
2. تابع الاحتمالات وتمثيله البياني.

الحل: 1- يمكن تمثيل هذه الدالة بيانيا كما يلي:

[1] محمد معتوق، مرجع سبق ذكره، ص25.

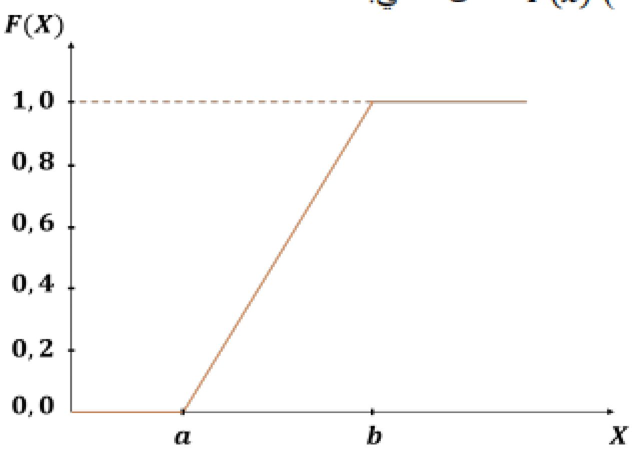


2- حساب تابع الاحتمالات:

$$F(x) = P\,(X \leq x) = \int_a^x f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^x dx = \frac{x-a}{b-a}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & ; a \leq x < b \\ 1 & ; x \geq b \end{cases}$$

وتأخذ دالة (تابع الاحتمالات) $F(x)$ الشكل التالي:



5- طريقة حساب الاحتمالات للتوزيع المستمر:

5-1- احتمال X يكون محصور بين قيمتين:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(X)dx = \int_{-\infty}^{b} f(X)dx - \int_{-\infty}^{a} f(X)dx = F(b) - F(a)$$

وهنا تبرز أهمية دالة التوزيع في حساب الاحتمالات.

5-2- أما الحالات الأخرى لحساب الاحتمالات تكون على ما يلي:[1]

[1] كمال بوعظم، مرجع سبق ذكره، ص46.

$$P(x \geq a)=\int_{a}^{+\infty} f(X)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(X)dx - \int_{-\infty}^{a} f(X)dx = 1 - F(a)$$

$$P(x < a)=\int_{-\infty}^{a} f(X)dx = F(a)$$

$$P(x = a)=F(a) - F(a) = 0$$

مثال (5):1- أوجد قيمة الثابت (c) التي تحقق الشرطين الأول والثاني لدالة الكثافة الاحتمالية في الدالة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & ;\ 0 < x < 3 \\ 0 & ;\ si\ non \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{3} cx^2\,dx + \int_{3}^{+\infty} 0\,dx = c\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 9c = 1$$

$$\Rightarrow c = 1/9$$

لكي تكون (x) دالة كثافة يجب أن يكون $(c = 1/9)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 & ;x < 0 < 3 \\ 0 & ;sinon \end{cases}$$

2- أوجد تابع الاحتمالات واستعمله لحساب الاحتمال $P\ (1 < X\ < 2)$:

$F(x) = \mathrm{P}\ (\mathrm{X} \leq\ x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx\ = 0$

- $x < 0:\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 0$
- $0 \leq x < 3: F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx\ +\ \int_{0}^{x} f(x)dx\ = 0 + \int_{0}^{x} f(x)dx$

$$= 0 + \int_{0}^{x} \frac{1}{9}x^2\,dx\ = \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{27}$$

- $x\ \geq 3: F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx\ + \int_{0}^{3} f(x)dx\ + \int_{3}^{x} f(x)dx$

$$= 0 + \int_{0}^{3} f(x)dx\ + 0 = \int_{0}^{x} \frac{1}{9}x^2dx\ \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{27} = 1$$

نتحصل على الكتابة الرياضية التالية:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ;\ x < 0 \\ x^3/27 & ;\ 0 \leq x < 3 \\ 1 & ;\ x \geq 3 \end{cases}$$

بما أن:

$$0 \leq x < 3:\quad F(x) = \frac{x^3}{27} \longrightarrow F(2) = \frac{8}{27}\quad ;\ F(1) = \frac{1}{27}$$

$$P(1 < X \leq 2) = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{27} - \frac{1^3}{27} = \frac{7}{27}$$

والعكس صـــحيح حيث يمكن إيجاد دالة الكثافة انطلاقا من تابع الاحتمالات عن طريق اشـــتقاق الأخيرة كما يلي :

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$$

مثال (6): أوجد دالة الكثافة للمتغير (x) إذا كانت دالة تابع الاحتمالات كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & ;x \geq 0 \\ 0 & ;sinon \end{cases}$$

- $x < 0:\ f(x) =\ F'(x) = (0)' = 0$
- $x \geq 0:\ F(x) = 1 - e^{-2x} \Longrightarrow\ f(x) = (1 - e^{-2x})' = 2e^{-2x}$

نتحصل على الكتابة الرياضية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & ;x \geq 0 \\ 0 & ;sinon \end{cases}$$

المحور السابع

المميزات العددية للمتغيرة العشوائية

تمهيد:

في كثير من الأحيان لا نكتفي بدراسة خاصية متغير عشوائي لوحده، لكن لابد من إدخال معلمات عددية لهذا المتغير كي يكون هناك وصف جيد للظاهرة المدروسة، ومن بين هذه المميزات الثابتة للمتغير العشوائي نجد التوقع الرياضي (الأمل الرياضي)، التباين والانحراف المعياري والعزوم.[1]

1- المميزات العددية للمتغير العشوائي المنقطع:

1-1- التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المنقطع E(X): إذا كانت قيم المتغير العشوائي المنقطع هي $x_1, x_2, \dots, x_n$ وكانت احتمالات كل قيمة على التوالي $P(X=x_1)$,$P(X=x_2)$, … ,$P(X=x_n)$

فإن القيمة المتوقعة E(X) للمتغير العشوائي المنقطع يمكن إيجادها على النحو:

$$E(X)=x_1\,P(X=x_1)+x_2\,P(X=x_2)+\ \dots + P(X=x_n)$$

وبصيغة المجموع تصبح القيمة المتوقعة على النحو التالي:[2] $E(X)=\sum_{i=1}^{n} X_i P_i$

مثال (1): أحسب التوقع الرياضي E(X) لقانون التوزيع الاحتمالي للمتغير X المبين في الجدول التالي:

X	0	1	2	$\Sigma(P(X=x_i))$
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

الحل:

لدينا: $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i P_i$ وانطلاقا من جدول التوزيع الاحتمالي نحسب التوقع الرياضي.

X	0	1	2	$\Sigma(P(X=x_i))$
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1
$x_i P_i$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

ومنه: $E(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i P_i=1$

[1] محمد بداوي، الاحتمالات، دار هومة للنشر والتوزيع، الجزائر، 2017، ص71.

[2] صبري عزام، الإحصاء الرياضي، الطبعة الأولى، دار صفاء للنشر والتوزيع، الأردن، 2010، ص79.

1-2- خواص التوقع الرياضي: التوقع الرياضي لمتغير عشوائي يتمتع بالخواص التالية:

أ- إن التوقع الرياضي لعدد ثابت يساوي نفسه أي أنه لو كان C عددا ثابتا فإن: $E(C)= C$

ب- التوقع الرياضي ل $C\,X$ يساوي إلى $C\,E(X)$ أي أن: $E(C\,X)= C\,E(X)$

ج- التوقع الرياضي ل $(X + C)$ يساوي $E(X) + C$ أي أن: $E(X + C)= E(X) + C$

ويمكن البرهان على ذلك كما يلي:

$$E(x+c) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x_i + C) = \sum_{i=1}^{n} P_i\, x_i + \sum_{i=1}^{n} P_i\, c$$

إذا كان **X** متقطعا فإن: $E(X) + C\sum_{i=1}^{n} P_i = E(x) + C$

$$\boxed{E(x+c) = E(x) + c}$$

د- إذا كان x و y متغيران عشوائيان فإن[1]: $E(X + Y)= E(X) + E(Y)$

1-3- التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي المنقطع:

إن مقياس التوقع غير كافي لتحديد صفات التوزيع الاحتمالي قد يكون لنا ظاهرتان لهما نفس التوقع إلا أنهما مختلفتان إذن لابد من إدخال مفهوم آخر لا يقل أهمية عن الأول وهو ما يعرف بالتباين،ونرمز له ب $V(X)$ ونسمي جذره بالانحراف المعياري ونرمز له ب $\delta(X)$.[2]

أ- **التباين $V(X)$** : إذا كان $E(X)$ توقع متغير عشوائي X فإن توقع $(X - E(X))^2$ يسمى تباين X ويعبر عنه بالرمز σ^2 أو $V(X)$ أي أن[3]: $\sigma^2 = V(X)= E(X - E(X))^2$

$$=\sum_{i=1}^{n} P_i\,[X_i - E(X)]^2$$

حيث[4]: $V(X)=\sum_{i=1}^{n} P_i\,[X_i - E(X)]^2$ → علاقة التعريف

$V(X)= E(X^2) - (E(X))^2$ → العلاقة الموسعة

---

1 سامية تيلولت، الاحتمالات: دروس وتمارين مع الحلول للأعمال الموجهة، الطبعة الاولى، مطبعة دار الحديث للكتاب، الجزائر، 2016، ص153.

2 محمد بداوي، مرجع سبق ذكره، ص74.

3 محمد صبحي أبو صالح، مبادئ الإحصاء، دار اليازوري للنشر والتوزيع، الأردن، 2007، ص177.

4 سامية تيلولت، نفس المرجع، ص168.

ب- **خواص التباين $V(X)$** : إذا كان C عددا ثابتا فإن:

1- $V(C)=0$ ، 2- $V(CX)=C^2\,V(X)$

3- $V(X+C)=V(X)$ ، 4- $V(X+y)=V(X)+V(y)$

ج- **الانحراف المعياري $\delta(X)$**: يعرف الانحراف المعياري بأنه الجذر التربيعي للتباين حيث:

$$\delta(X)=\sqrt{V(X)}$$

د- **خواص الانحراف المعياري**: إذا كان C عددا ثابتا فإن:[1]

1- $\delta(C)=0$ ، 2- $\delta(CX)=C\,\delta(X)$

3- $\delta(X+C)=\delta(X)$ ، 4- $\delta(X+y)=\delta(X)+\delta(y)$

مثال (2): أحسب التباين $V(X)$ والانحراف المعياري $\delta(X)$ للمثال السابق:

الحل: لدينا التوقع الرياضي يساوي الواحد، $E(X)=1$ (من الجدول)

X	0	1	2	Σ
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1
x_iP_i	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
X^2	0	1	4	$-$
X^2P_i	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

حساب التباين حسب العلاقة الموسعة: $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

نحسب أولا: $E(X^2)$ حيث: $E(X^2)=\sum_{i=1}^{3}x^2{}_iP_i=\frac{3}{2}$ (من الجدول)

ثم نطبق العلاقة: $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

$$V(X)=\frac{3}{2}-(1)^2=\frac{1}{2}$$

ومنه: $V(X)=\frac{1}{2}$

[1] سامية تيلولت، مرجع سبق ذكره، ص156.

حساب الانحراف المعياري:

لدينا: $\delta(X) = \sqrt{V(X)}$

$\delta(X) = \sqrt{\frac{1}{2}}$ =0,71

ومنه: $\delta(X)$ =0,71

2- المميزات العددية للمتغير العشوائي المستمر:

2-1- التوقع الرياضي E(X): يعطى توقع المتغير العشوائي المستمر بالعلاقة التالية:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} Xf(X)dx$$

مثال (3): أحسب التوقع الرياضي E(X) لدالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(X):\begin{cases} 3X^2 & X \in [0,1] \\ 0 & X \notin [0,1] \end{cases}$$

الحل: حساب E(X) حيث:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} Xf(X)dx$$

$$= \int_0^1 X(3X^2)dx$$

$$= \int_0^1 3X^3\, dx$$

$$= \left[\frac{3}{4}X^4\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{4} - 0$$

$$= \frac{3}{4} \qquad \Rightarrow E(X)= \frac{3}{4}$$

2-2- التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي المستمر:

أ- **التباين$V(X)$** : في حالة المتغير العشوائي المستمر يعطى التباين $V(X)$ بالصيغة التالية:

$$V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} [X-E(X)]^2 f(X)dx$$

وتعطى العلاقة الموسعة بـ: $V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} X^2 f(X)dx - E(X)^2$

مثال (4): أحسب التباين $V(X)$ للمثال (3) السابق:

الحل: حساب $V(X)$ حيث: $f(X):\begin{cases} 3X^2 & X \in [0,1] \\ 0 & X \notin [0,1] \end{cases}$

نطبق العلاقة الموسعة: $V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} X^2 f(X)dx - E(X)^2$

$$= \int_0^1 X^2(3X^2)dx - E(X)^2$$

لدينا: $E(X)=\frac{3}{4}$ ومنه:

$$V(X)= \int_0^1 X^2(3X^2)dx - (\frac{3}{4})^2$$

$$= \int_0^1 3X^4 dx - (\frac{3}{4})^2$$

$$= \left[\frac{3}{5}X^5\right]_0^1 - \frac{9}{16}$$

$$=\left(\frac{3}{5}-0\right) - \frac{9}{16}$$

$$= \frac{3}{80}$$

ومنه: $V(X) = \frac{3}{80}$

ب- الانحراف المعياري $\delta(X)$: هو الجذر التربيعي للتباين حيث:

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)}$$

مثال(5): أحسب $\delta(X)$ للمثال(3) السابق.

الحل: حساب $\delta(X)$:

لدينا: $\delta(X) = \sqrt{V(X)}$ ومنه: $\delta(X) = \sqrt{\frac{3}{80}}$

3- العزوم: لكل عدد طبيعي s نسمي عزم من الرتبة s لمتغير عشوائي X التوقع الرياضي ل X القوة s ونرمز له ب $m_s(X)$ حيث:[1] $m_s(X) = E(X^s)$، ونميز بين نوعين من العزوم: العزوم الابتدائية أو البسيطة والعزوم المركزية.

3-1- العزوم لمتغير عشوائي منقطع:

أ- العزوم الابتدائية للمتغير العشوائي المنقطع: نظريا يعرف العزم الابتدائي من الدرجة s للمتغير المنقطع وفق العلاقة التالية: $m_s(X) = \sum_{i=1}^{n} {x^s}_i P_i$

ومنه يمكن حساب العزوم البسيطة التالية:

- ✓ العزم الابتدائي من الدرجة الأولى: $m_1(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i P_i = E(X)$

  والذي يمثل فقط التوقع الرياضي.
- ✓ العزم الابتدائي من الدرجة الثانية: $m_2(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P_i$
- ✓ العزم الابتدائي من الدرجة الثالثة: $m_3(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 P_i$

ب- العزوم المركزية للمتغير العشوائي المنقطع: نظريا يعرف العزم الابتدائي من الدرجة s للمتغير المنقطع حسب المعادلة التالية: $\mu_s(X) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - E(X))^s{}_i P_i$

ومنه يمكن استخراج العزوم حسب الدرجات التالية:

العزم المركزي من الدرجة الأولى: $\mu_1(X) = \sum_{i=1}^{n} (X - E(X))^1 P_i$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i P_i - E(X) \sum_{i=1}^{n} P_i$$

$$= E(X) - E(X) = 0$$

العزم المركزي من الدرجة الثانية: $\mu_2(X) = \sum_{i=1}^{n} (X - E(X))^2 P_i$

[1] محمد بداوي، مرجع سبق ذكره، ص80.

$$= \sum_{i=1}^{n}[x_i^2 - 2x_i E(X) + E(X)^2]P_i$$

$$= \sum x_i^2 P_i - 2E(X) \sum X_i P_i + E(X)^2 \sum P_i$$

$$= m_2(X) - 2\, E(X).E(X) + E(X)^2$$

$$= m_2(X) - [m_1(X)]^2$$

ومنه العزم المركزي من الدرجة الثانية يساوي الفرق بين العزم البسيط من الدرجة الثانية مع التوقع الرياضي مربع[1].

مثال (3): أحسب العزم من الدرجة 1 و 2 للمثال التالي:

X	0	1	2	$\Sigma(P(X=x_i))$
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

الحل:

X	0	1	2	Σ
P_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1
$x_i P_i$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$X^2 P_i$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

العزم من الدرجة الأولى: $m_1(X) = \sum_{i=1}^{3} X_i P_i = E(X) = 1$

العزم من الدرجة الثانية: $m_2(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 P_i = \frac{3}{2}$

3-2- العزوم لمتغير عشوائي مستمر:

أ- العزم الابتدائي من الدرجة s: نظريا يعرف العزم الابتدائي من الدرجة s للمتغير المستمر حسب المعادلة التالية:

$$m_s(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^s f(X)\,dx$$

ومنه يمكن أن نحصل على العزوم حسب الدرجات المختلفة التالية:

$$m_1(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^1 f(X)\,dx = E(X)$$

[1] كمال بوعظم، الإحصاء الاستدلالي من الجانب النظري والتطبيقي، الطبعة الأولى، دار زهران للنشر والتوزيع، الأردن، 2012، ص39.

$$m_2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(X)dx$$
$$m_3(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(X)dx$$

ب-العزم المركزي من الدرجة s: يكتب نظريا هذا النوع من العزوم حسب ما يأتي:

$$\mu_s(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (X_i - E(X))^s f(X)dx$$

ومنه يمكن أن نستنتج العزوم المختلفة الأخرى:

$$\mu_1(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (X_i - E(X))^1 f(X)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} Xf(X)dx-)^1 f(X)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} Xf(X)dx - E(X)\int_{-\infty}^{+\infty} f(X)dx$$
$$= 0$$
$$\mu_2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (X_i - E(X))^2 f(X)dx$$
$$= m_2(X) - (m_1(X))^2 = V(X)$$ التباين

مثال (4): أحسب $m_1(X)$ و $m_2(X)$ لدالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(X): \begin{cases} 3X^2 & X \in [0,1] \\ 0 & X \notin [0,1] \end{cases}$$

الحل: $E(X) = \frac{3}{4}$ (تم إيجاده في المثال 3 السابق)

$$m_2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(X)dx = m_1(X) = \int_{-\infty}^{0} x^2 f(X)dx + \int_0^1 x^2 f(X)dx + \int_1^{+\infty} x^2 f(X)dx$$
$$= \int_0^1 x^2 f(X)dx$$
$$= \int_0^1 x^2 (3X^2)dx$$
$$= \int_0^1 3X^4 dx$$

$$= \left[\frac{3}{5}X^5\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{5}$$

4- تمارين محلولة:

التمرين الأول:

في تجربة إلقاء قطعة نقدية وحجر نرد متجانسين معا مرة واحدة وبشكل عشوائي، حيث يمثل المتغير العشوائي X ظهور الرقم 3.

1-أوجد فضاء العينة Ω (عدد الحالات الممكنة)؟

2-حدد القيم الممكنة للمتغير العشوائي X؟

3-أوجد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ثم مثله بيانيا؟

4-أوجد دالة التوزيع الاحتمالي F(X) للمتغير العشوائي X؟

5-أحسب التوقع الرياضي E(X) والتباين $V(X)$ والانحراف المعياري $\delta(X)$ ؟

الحل:

1- لإيجاد عدد الحالات الممكنة Ω نستعين بالجدول التالي:

	1	2	3	4	5	6
P	(P,1)	(P,2)	(P,3)	(P,4)	(P,5)	(P,6)
F	(F,1)	(F,2)	(F,3)	(F,4)	(F,5)	(F,6)

ومنه:

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (P,1),(P,2),(P,3),(P,4),(P,5),(P,6) \\ (F,1),(F,2),(F,3),(F,4),(F,5),(F,6) \end{Bmatrix}$$

2- تحديد القيم الممكنة للمتغير العشوائي X انطلاقا من Ω من خلال الجدول التالي:

Ω	$(P,1)$	$(P,2)$	$(P,3)$	$(P,4)$	$(P,5)$	$(P,6)$	$(F,1)$	$(F,2)$	$(F,3)$	$(F,4)$	$(F,5)$	$(F,6)$
X	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0

ومنه القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي: $X = \{0,1\}$

وعليه: $p(X=0)=\frac{10}{12}$ و $p(X=1)=\frac{2}{12}$

3- إيجاد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X :

نبين قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X في الجدول الآتي:

قيم المتغير العشوائي X	0	1
احتمالاتها p	$\frac{10}{12}$	$\frac{2}{12}$

ولكي يصبح هذا التوزيع احتماليا لابد من أن يتحقق الشرطين الأساسيين وهما:

$$\begin{cases} 0 \le P(X=x_i) \le 1 \rightarrow \text{الشرط الأول} \\ \Sigma(P(X=x_i)) = 1 \rightarrow \text{الشرط الثاني} \end{cases}$$

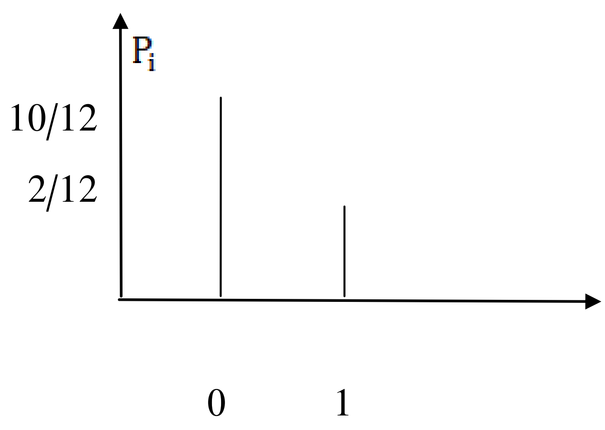
إن القيمتين الاحتماليتين الواردتين في الجدول أعلاه هما قيمتان أكبر من الصفر وأصغر من الواحد،مما يؤكد تحقق الشرط الأول.

أما الشرط الثاني: $\Sigma_{i=1}^{2}(P(X=x_i)) = p(X=0)+p(X=1)$

$$=\frac{10}{12}+\frac{2}{12}$$

$=1$(تحقق الشرط الثاني)

التمثيل البياني: نمثله بأعمدة بيانية (أعمدة بسيطة) لأنه متغير منقطع.



4- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي $F(X)$ للمتغير العشوائي X: لدينا $F(X)= P(X\le x_i)$ ومنه:

X	0	1	Σ

P	$\frac{10}{12}$	$\frac{2}{12}$	1
F(X)	$\frac{10}{12}$	1	/
$x_i P_i$	0	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
X^2	0	1	/
$X^2 P_i$	0	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

وتعطى الصيغة العامة لدالة التوزيع الاحتمالي$F(X)$ بـ:

$$F(X):\begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{10}{12} & 0 \leq X < 1 \\ 1 & X \geq 1 \end{cases}$$

5-حساب التوقع الرياضي $E(X)$ والتباين $V(X)$ والانحراف المعياري $\delta(X)$ من الجدول:

لدينا: $E(X)= \sum_{i=1}^{n} x_i P_i = \frac{2}{12}$

التباين حسب العلاقة الموسعة: $V(X)= E(X^2) - (E(X))^2$

نحسب أولا: $E(X^2)$ حيث: $E(X^2)= \sum_{i=1}^{2} x^2{}_i P_i= \frac{2}{12}$ (من الجدول)

ثم نطبق العلاقة: $V(X)= E(X^2) - (E(X))^2$

$$V(X)= \frac{2}{12} - (\frac{2}{12})^2 = \frac{20}{144}$$

ومنه: $V(X)= 0,14$

الانحراف المعياري:

لدينا: $\delta(X) = \sqrt{V(X)}$

$$\delta(X) = \sqrt{\frac{20}{144}} = 0,37$$

ومنه: $\delta(X) = 0,37$

التمرين الثاني:

في إطار مسابقة توظيف على أساس المستوى في أحد المؤسسات الخاصة، تقدم للمسابقة أربعة رجال وثلاث نساء يتنافسون على ثلاثة مناصب، وتم الاختيار بشكل عشوائي لأن كل المتسابقين من نفس المستوى.

ليكن المتغير X يمثل عدد النساء المختارات في المسابقة.

1–حدد نوع المتغير العشوائي X ؟

2–أثبت أن التوزيع الاحتمالي لقيم X يشكل قانون توزيع احتمالي؟

3–أوجد دالة التوزيع الاحتمالي F(X) للمتغير العشوائي X مع تمثيلها بيانيا؟

4–أحسب متوسط عدد النساء المختارات؟

5–أحسب الانحراف المعياري $\delta(X)$ لعدد النساء المختارات؟

الحل:

1– تحديد نوع المتغير العشوائي X :

بما أن X يمثل عدد النساء المختارات فهو متغير عشوائي منقطع (منفصل) لأن عدد النساء عبارة عن عدد صحيح (يساوي ثلاثة) غير قابل للتجزئة.

2– إثبات أن توزيع X هو قانون توزيع احتمالي:

أولا يجب تعيين التوزيع الاحتمالي، وبما أن X يمثل عدد النساء المختارات أي يأخذ القيم 0،1،2،3 ومنه:

$X = \{0,1,2,3\}$

حيث: $P(X=1) = \frac{C_3^1 \cdot C_4^2}{C_7^3} = \frac{18}{35}$ ، $P(X=0) = \frac{C_3^0 \cdot C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}$

$P(X=3) = \frac{C_3^3 \cdot C_4^0}{C_7^3} = \frac{1}{35}$ ، $P(X=2) = \frac{C_3^2 \cdot C_4^1}{C_7^3} = \frac{12}{35}$

ومنه نمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير X في الجدول التالي:

X	0	1	2	3	$\Sigma(P(X=x_i))$
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

وبما أن الشرطين $\begin{cases} \Sigma(P(X=x_i)) = 1 \\ 0 \leq P(X=x_i) \leq 1 \end{cases}$ محققين فإن توزيع X هو قانون توزيع احتمالي.

3– إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي F(X) للمتغير العشوائي X وتمثيلها بيانيا:

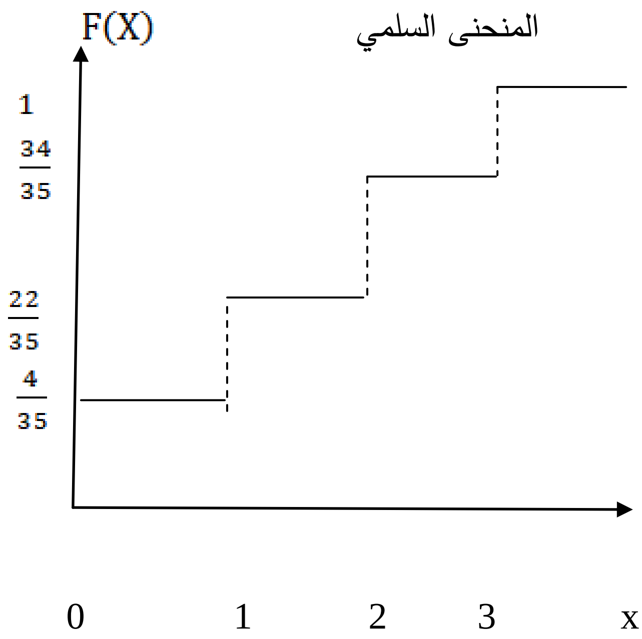
لدينا $F(X) = P(X \leq x_i)$ ومنه:

X	0	1	2	3	$\Sigma(P(X=x_i))$
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1
F(X)	$\frac{4}{35}$	$\frac{22}{35}$	$\frac{34}{35}$	1	/

وتعطى الصيغة العامة لدالة التوزيع الاحتمالي$F(X)$ بـ:

$$F(X):\begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{4}{35} & 0 \le X < 1 \\ \frac{22}{35} & 1 \le X < 2 \\ \frac{34}{35} & 2 \le X < 3 \\ 1 & X \ge 3 \end{cases}$$

التمثيل البياني لـ $F(X)$: المنحنى السلمي



4- حساب متوسط عدد النساء المختارات $E(X)$:

لدينا: $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i P_i$ نطبق العلاقة في الجدول:

X	0	1	2	3	Σ
P_i	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1
$x_i P_i$	0	$\frac{18}{35}$	$\frac{24}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{45}{35}$
$X^2 P_i$	0	$\frac{18}{35}$	$\frac{48}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{75}{35}$

ومنه: $E(X)=\frac{45}{35}=\frac{9}{7}$

5- حساب الانحراف المعياري $\delta(X)$ لعدد النساء المختارات(من الجدول أعلاه):

$$\delta(X)=\sqrt{V(X)}$$

نحسب التباين أولا:لدينا التباين حسب العلاقة الموسعة:$V(X)= E(X^2) - (E(X))^2$

نحسب $E(X^2)$ حيث: $\frac{75}{35} = \frac{15}{7}$ $E(X^2)= \sum_{i=1}^{2} x^2{}_i P_i=$ (من الجدول)

ثم نطبق العلاقة: $V(X)= E(X^2) - (E(X))^2$

$$V(X)= \frac{15}{7} - (\frac{9}{7})^2 = \frac{24}{49} = 0,5$$

ومنه: $\delta(X) = \sqrt{0,5}$

التمرين الثالث:

تبلغ نسبة مبيعات أحد المراكز التجارية من الأجبان المحلية بـ 0,60 بينما تكون نسبة مبيعاتها من الأجبان المستوردة بـ 0,40 اشترى أحد الزبائن صندوقين، فإذا عرف ا لمتغير العشوائي X بأنه عدد الصناديق المشتراة من الأجبان المحلية فأوجد:

1- عدد الحالات الممكنة Ω.

2- قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

3- التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

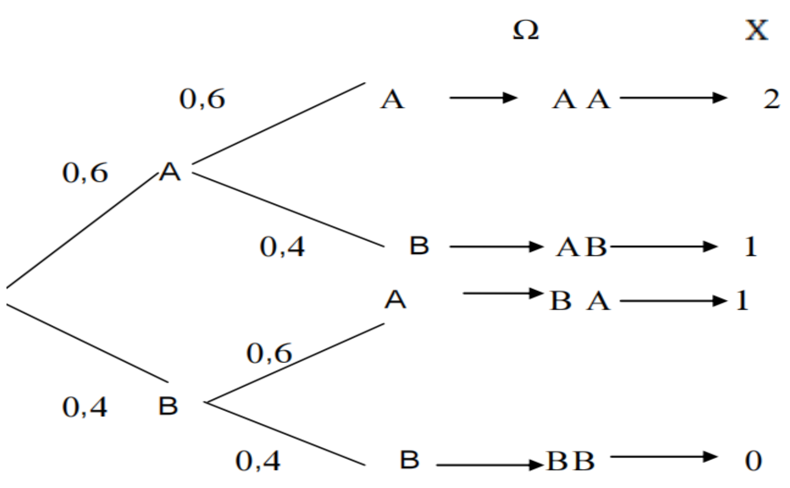
4- احتمال: $P(x = 1)$ ، $P(x = 1,5)$ ، $P(x \leq 1)$.

الحل:

1- تحديد عدد الحالات الممكنة Ω: (نستعين بشجرة الاحتمال):

ليكن الحدث A هو الصناديق المشتراة من الأجبان المحلية.

ليكن الحدث B هو الصناديق المشتراة من الأجبان المستوردة.



شجرة الاحتمال

ومنه: $\Omega = \{A\,A,\ A\,B,\ B\,A,\ B\,B\}$

$X = \{0,\ 1,\ 2\}$

2- ايجاد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

لدينا: $P(X = 0) = (0{,}40 \times 0{,}40) = 0{,}16$

$P(X = 1) = (0{,}60 \times 0{,}40) + (0{,}40 \times 0{,}60) = 0{,}48$

$P(X = 2) = (0{,}60 \times 0{,}60) = 0{,}36$

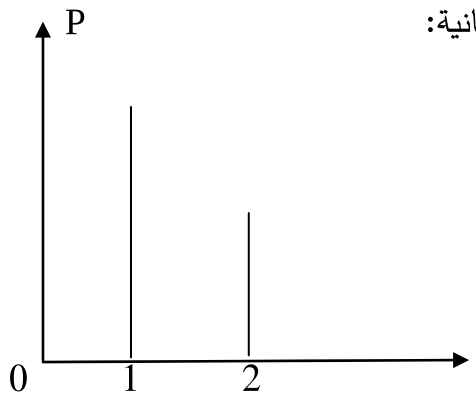
التوزيع الاحتمالي للمتغير X:

X	0	1	2	$\Sigma(P(X = x_i)$
$P\ (X=x_i)$	0,16	0,48	0,36	1

وبما أن الشرطين $0 \leq P(X = x_i) \leq 1$ و $\Sigma(P(X = x_i) = 1$ محققين فإن توزيع X هو قانون توزيع احتمالي.

3- التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

نمثله بواسطة الأعمدة البيانية:



4- حساب احتمال: $P(x = 1)$ ، $P(x = 1{,}5)$ ، $P(x \leq 1)$

$P(x = 1) = 0{,}48$

$P(x = 1{,}5) = 0$

$P(x \leq 1) = P(x = 0) + P(x = 1) = 0{,}16 + 0{,}48 = 0{,}64$

التمرين الرابع:

ليكن X متغير عشوائي معرف بدالة التوزيع F(X) حيث:

$$F(X):\begin{cases} 0 & X<0 \\ \dfrac{aX^2}{16} & 0\le X\le 4 \\ 1 & X\ge 4 \end{cases}$$

المطلوب:

1- إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية $f(X)$.

2- إيجاد قيمة الثابت a حتى تكون الدالة $f(X)$ دالة كثافة احتمالية.

3- حساب $P(1<x<2)$.

الحل:

1- إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية $f(X)$:

لدينا: $f(X) = F(X)'$ (المشتق الأول لدالة التوزيع $F(X)$ هودالة الكثافة الاحتمالية $f(X)$)

ومنه:

$$f(X):\begin{cases} 0 & X<0 \\ \dfrac{1}{8}aX & 0\le X\le 4 \\ 0 & X\ge 4 \end{cases}$$

أي:

$$f(X):\begin{cases} \frac{1}{8}aX & X\in[0,4] \\ 0 & X\notin[0,4] \end{cases}$$

2- إيجاد قيمة الثابت a حتى تكون الدالة $f(X)$ دالة كثافة احتمالية:

حتى تكون الدالة $f(X)$ دالة كثافة احتمالية يجب تحقق الشرطين:

$$\begin{cases} f(X)\ge 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(X)dx = 1 \end{cases}$$ الشرط الأول محقق

$$\int_0^4 f(X)dx = 1 \Rightarrow \int_0^4 \frac{1}{8}aXdx = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}\int_0^4 aXdx = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}\left[\frac{a}{2}X^2\right]_0^4 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}\left[\frac{a}{2}4^2\right]_0^4 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}[8a] = 1$$

$$\Rightarrow a = 1$$

ومنه: $f(X):\begin{cases} \frac{1}{8}X & X \in [0,4] \\ 0 & X \notin [0,4] \end{cases}$

3- حساب $P(1 < x < 2)$:

$$\int_1^2 f(X)dx = \int_1^2 \frac{1}{8}Xdx = P(1 < x < 2)$$

$$= \frac{1}{8}\int_1^2 Xdx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}X^2\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{16}[2^2 - 1^2] = \frac{3}{16}$$

التمرين الخامس:

ليكن X متغير عشوائي يمثل نتيجة مشروع استثماري حيث: $X: \{10,40,60\}$ بمليون وحدة نقدية

وباحتمالات متساوية حيث: $P_i: \{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$ والمطلوب:

1 - حساب متوسط نتيجة المشروع والتباين.

2 - أوجد احتمال أن تفوق نتيجة المشروع 10 مليون وحدة نقدية.

3 - إذا علمت أن احتمال إفلاس المشروع ممثل بالدالة f التالية:

$$f(X):\begin{cases} C(X + X^2) & X \in [0,3] \\ 0 & X \notin [0,3] \end{cases}$$

المطلوب: أ- أوجد قيمة الثابت C حتى تكون الدالة $f(X)$ دالة كثافة احتمالية.

ب-أوجد دالة التوزيع F(X) (تابع الاحتمالات).

ج- أحسب $P(x \leq 2)$

الحل:

1- حساب متوسط نتيجة المشروع والتباين:

المتوسط: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i$

التباين: $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

نطبق العلاقتين في جدول التوزيع الاحتمالي:

X	P_i	$x_i P_i$	X^2	$X^2 P_i$
10	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	100	$\frac{100}{3}$
40	$\frac{1}{3}$	$\frac{40}{3}$	1600	$\frac{1600}{3}$
60	$\frac{1}{3}$	$\frac{60}{3}$	3600	$\frac{3600}{3}$
Σ	1	$\frac{110}{3}$=36,66	/	$\frac{5300}{3}=1766{,}66$

ومنه:

$$E(X)=\frac{110}{3}=36{,}66$$

$$V(X)=1766{,}66-(36{,}66)^2$$

$$=422{,}70$$

2- حساب احتمال أن تفوق نتيجة المشروع 10 مليون وحدة نقدية:

$$P(x>10)=P(x=40)+P(x=60)$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

3- لدينا:

$$f(X):\begin{cases} C(X+X^2) & X\in[0,3] \\ 0 & X\notin[0,3] \end{cases}$$

أ- إيجاد قيمة الثابت C حتى تكون الدالة $f(X)$ دالة كثافة احتمالية:(يجب تحقق الشرطين)

الشرط الأول: $f(X)\geq 0$ (محقق)

الشرط الثاني: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(X)dx=1$

$$\int_0^3 f(X)dx=1 \Rightarrow \int_0^3 C(X+X^2)dx=1$$

$$\Rightarrow C\int_0^3 (X+X^2)dx=1$$

$$\Rightarrow C\left[\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}\right]_0^3=1$$

$$\Rightarrow C\left[\frac{9}{2}+\frac{27}{3}-0\right]=1$$

$$\Rightarrow C=\frac{2}{27}$$

$$\Rightarrow C=0{,}07$$

من أجل $C=\frac{2}{27}$ الدالة $f(X)$ دالة كثافة احتمالية.

حيث:

$$f(X):\begin{cases}\frac{2}{27}(X+X^2) & X\in[0,3]\\ 0 & X\notin[0,3]\end{cases}$$

ب- إيجاد دالة التوزيع $F(X)$ (تابع الاحتمالات):

$$F(X)=\int_0^x f(X)dx$$

$$=\frac{2}{27}\int_0^x (X+X^2)dx$$

$$=\frac{2}{27}\left[\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}\right]_0^x$$

$$=\frac{2X^2}{54}+\frac{2X^3}{81}$$

ومنه: $F(X)=\frac{2}{54}X^2+\frac{2}{81}X^3$

ج-حساب $P(x\leq 2)$:

لدينا: $P(x\leq 2)=F(2)$

$$F(2)=\frac{2}{54}X^2+\frac{2}{81}X^3$$

$$=\frac{2}{54}2^2+\frac{2}{81}2^3$$

$$=0{,}25$$

التمرين السادس:

ليكن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية:

$$f(X):\begin{cases}\frac{C}{\sqrt{X}} & X\in[0,1]\\ 0 & X\notin[0,1]\end{cases}$$

1- أوجد قيمة الثابت C.

2- أحسب التوقع الرياضي.

3- أحسب $P(x < \frac{1}{4})$.

الحل:

1- إيجاد قيمة الثابت C:

حتى تكون الدالة $f(X)$ دالة كثافة احتمالية يجب تحقق الشرطين، الشرط الأول: $f(X) \geq 0$ وهو محقق، أما الشرط الثاني: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(X)dx = 1$ فلابد من تحققه.

$$\int_0^1 f(X)dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{C}{\sqrt{X}}dx = 1$$

$$\Rightarrow C\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{X}}dx = 1$$

$$\Rightarrow C\left[2\sqrt{X}\right]_0^1 = 1$$

$$\Rightarrow 2C\left[\sqrt{X}\right]_0^1 = 1$$

$$\Rightarrow 2C\left[X^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = 1$$

$$\Rightarrow 2C\left[X^{\frac{1}{2}} - X^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = 1$$

$$\Rightarrow 2C\left[1^{\frac{1}{2}} - 0^{\frac{1}{2}}\right] = 1$$

$$\Rightarrow 2C[1-0] = 1$$

$$\Rightarrow 2C = 1$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

من أجل $C = \frac{1}{2}$ الدالة $f(X)$ دالة كثافة احتمالية.

$$f(X): \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{X}} & X \in [0,1] \\ 0 & X \notin [0,1] \end{cases}$$

2- حساب $E(X)$

لدينا: $$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} Xf(X)dx$$

$$E(X) = \int_0^1 Xf(X)dx$$

$$= \int_0^1 X\frac{1}{2\sqrt{X}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 X\frac{1}{\sqrt{X}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 X\cdot X^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 X^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{X^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[X^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}\left[1^{\frac{3}{2}}-0\right]$$

$$=\frac{1}{3}[1]$$

$$=\frac{1}{3}$$

ومنه: $E(X) = \frac{1}{3}$

3- حساب $P(x < \frac{1}{4})$

$$P\left(x < \frac{1}{4}\right) = \int_0^{\frac{1}{4}} f(X)dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2\sqrt{X}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{X}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{X}\right]_0^{\frac{1}{4}}$$

$$= \left[\sqrt{X}\right]_0^{\frac{1}{4}}$$

$$= \left[X^{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{1}{4}}$$

$$= \left[\frac{1^{\frac{1}{2}}}{4} - 0^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}$$

التمرين السابع:

لتكن الدالة $f(X)$ معرفة في المجال التالي:

$$f(X)=C\,e^{-x} \qquad X\in[0,+\infty]$$

والمطلوب:

1- إيجاد قيمة الثابت C حتى تكون الدالة $f(X)$ دالة كثافة احتمالية.

2- إيجاد دالة التوزيع F(X).

3- حساب $P(1<x<3)$

الحل:

1- إيجاد قيمة الثابت C حتى تكون الدالة $f(X)$ دالة كثافة احتمالية:

حيث: $X\in[0,+\infty]$ $\qquad f(X)=C\,e^{-x}$

يجب تحقق الشرطين:

الشرط الأول: $f(X)\geq 0$ (محقق)

الشرط الثاني: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(X)dx=1$

$$\int_{0}^{+\infty} f(X)dx=1 \Rightarrow \int_{0}^{+\infty} C\,e^{-x}dx=1$$

$$\Rightarrow C\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx=1$$

$$\Rightarrow C[-e^{-x}]_{0}^{+\infty}=1$$

$$\Rightarrow C[-e^{-\infty}--e^{-0}]=1$$

$$\Rightarrow C[0+1]=1$$

$$\Rightarrow C=1$$

ومنه: من أجل $C=1$ الدالة $f(X)$ دالة كثافة احتمالية.

حيث:

$$f(X):\begin{cases} e^{-x} & X\in[0,+\infty] \\ 0 & X\notin[0,+\infty] \end{cases}$$

2- إيجاد دالة التوزيع F(X):

لدينا: $F(X)=\int_0^x f(X)dx$

$$F(X)=\int_0^x e^{-x}dx$$

$$=[-e^{-x}]_0^x$$

$$=(-e^{-x})-(-e^{-0})$$

$$=-e^{-x}+1$$

ومنه: $=1-e^{-x}$

$$F(X):\begin{cases} 1-e^{-x} & X\in[0,+\infty] \\ 0 & X\notin[0,+\infty] \end{cases}$$

3- حساب $P(1<x<3)$: نحسب $P(1<x<3)$ بطريقتين:

الطريقة الأولى: باستعمال دالة تابع الاحتمالات F(X).

$$P(1<x<3)=F(3)-F(1)$$

$$=[1-e^{-3}]-[1-e^{-1}]$$

$$=e^{-1}-e^{-3}$$

الطريقة الثانية: باستعمال التكامل.

$$P(1<x<3)=\int_1^3 f(X)dx$$

$$=\int_1^3 e^{-x}dx$$

$$=[-e^{-x}]_1^3$$

$$=(-e^{-3})-(-e^{-1})$$

$$=-e^{-3}+e^{-1}$$

$$=e^{-1}-e^{-3}$$

5- تمارين مقترحة:

التمرين الأول:

ليكن X متغير عشوائي قيمه $X:\{0,1,2\}$ وباحتمالات $P_i:\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\}$ والمطلوب:

1- حدد نوع المتغير العشوائي X ؟

2- أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ؟

3- أحسب المميزات العددية (التوقع الرياضي $E(X)$ والتباين $V(X)$ والانحراف المعياري $\delta(X)$)؟

التمرين الثاني:

في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين، وكان المتغير العشوائي X يعبر عن مجموع الرقمين الظاهرين.

والمطلوب:

1- أوجد قيم المتغير العشوائي X

2- أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ومثله بيانيا.

3-أحسب الاحتمالات التالية: $P(x = 2)$، $P(x < 5)$، $P(x \leq 7)$

التمرين الثالث:

في تجربة عشوائية لإلقاء قطعة نقدية ثلاث مرات وكان المتغير العشوائي X هو عدد مرات ظهور الصورة.

والمطلوب هو:

1 - جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

2- التمثيل البياني لقانون التوزيع الاحتمالي.

3- أوجد دالة التوزيع الاحتمالي F(X) للمتغير العشوائي X.

التمثيل البياني لدالة التوزيع الاحتمالي F(X).

التمرين الرابع:

ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل مجموع الأرقام المسحوبة في تجربة سحب ثلاث بطاقات بشكل عشوائي من أصل خمس بطاقات تحمل الأرقام 2،3،4،5،1 . والمطلوب هو:

1- أوجد عدد الحالات الممكنة Ω.

2- حدد القيم الممكنة للمتغير العشوائي X.

3-أوجد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ثم مثله بيانيا.

5-أحسب التوقع الرياضي $E(X)$ والتباين $V(X)$ والانحراف المعياري $\delta(X)$.

التمرين الخامس:

ليكن X متغير عشوائي مستمر وتعطى الدالة $f(X)$ بالشكل التالي:

$$f(X):\begin{cases} 6X(1-X) & X \in [0,1] \\ 0 & X \notin [0,1] \end{cases}$$

1- أثبت أن $f(X)$ دالة كثافة احتمالية؟

2- أوجد دالة التوزيع F(X) وأحسب التوقع الرياضي E(X) ؟

التمرين السادس:

لتكن الدالة $f(X)$:

$$f(X):\begin{cases} \frac{K}{2X} & X \in [1,e] \\ 0 & X \notin [1,e] \end{cases}$$

المطلوب: 1- أوجد قيمة الثابت K حتى تكون الدالة $f(X)$ دالة كثافة احتمالية.

2- أوجد دالة التوزيع $F(X)$.

3- أحسب التوقع الرياضي والتباين.

التمرين الثامن:

ليكن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية:

$$f(X):\begin{cases} \frac{C}{2\sqrt{X}} & X \in [0,4] \\ 0 & X \notin [0,4] \end{cases}$$

1- أوجد قيمة الثابت C تكون الدالة $f(X)$ دالة كثافة احتمالية.

2- أحسب التوقع الرياضي.

3- أحسب $P(x < \frac{1}{2})$ ، $P(x < 1)$.

التمرين الثامن:

لتكن الدالة $f(X)$ معرفة في المجال التالي:

$$f(X)= \frac{1}{2} e^{\frac{-x}{2}} \qquad X \in [0,+\infty]$$

والمطلوب:

1- أثبت أن الدالة $f(X)$ دالة كثافة احتمالية.

2- إيجاد دالة التوزيع $F(X)$.

3- حساب التوقع والتباين.

المحور الثامن

التوزيعات الاحتمالية الشهيرة للمتغيرة العشوائية المنقطعة

تمهيد:

بعد تعرفنا في المحاور السابقة على قوانين الاحتمالات وعلى المتغيرات العشوائية، سنحاول دراسة العلاقة التي تربط بين قيم هذه المتغيرات العشوائية واحتمال كل قيمة والتي نطلق عليها التوزيع الاحتمالي، حيث تصنف التوزيعات الاحتمالية حسب نوع المتغير العشوائي، فإذا كان المتغير العشوائي منقطعا يكون التوزيع الاحتمالي منقطعا، وإذا كان المتغير العشوائي مستمرا يكون التوزيع الاحتمالي مستمرا.

خصصنا هذا المحور من المطبوعة للتوزيعات الاحتمالية للمتغيرة العشوائية المنقطعة التي تتميز بتطبيقاتها الواسعة في عدة مجالات كالاقتصاد والتجارة والعلوم، ومن أشهرها نجد:

- التوزيع المنتظم؛
- توزيع برنولي؛
- التوزيع الثنائي؛
- توزيع بواسون؛
- التوزيع الهندسي؛
- التوزيع فوق الهندسي.

وسنتناول هذه التوزيعات بشيء من التفصيل كل على حدا.

1- قانون التوزيع المنتظم:

1-1- تعريف: هو ذلك التوزيع الذي يفترض فيه أن تكون كل قيمة تأخذ احتمالا متساويا، ولذلك نطلق عليه التوزيع المنتظم وهو من أبسط التوزيعات الاحتمالية المنقطعة، ويمكن تعريفه كالتالي:

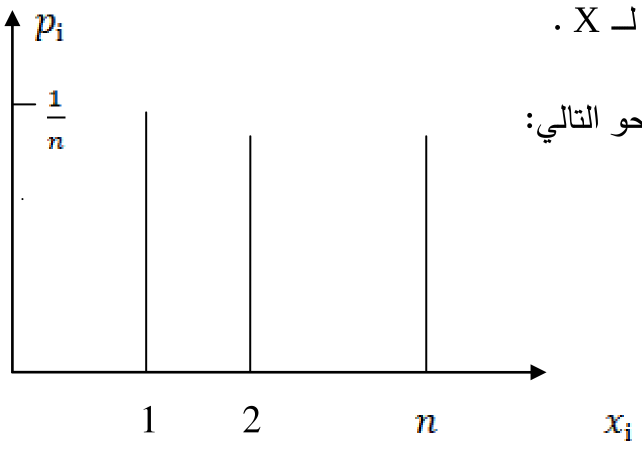
إذا كان الفراغ العيني للمتغير العشوائي X هو: $\{ X_1, X_1, \dots X_n\}$

فإن التوزيع المنقطع المنتظم يمثل كالتالي:[1] $P\,(X=x_i)= \frac{1}{n} = p_i$

[1] كمال سلطان محمد سالم، الإحصاء الاحتمالي،الدار الجامعية، الطبعة الأولى 2004،مصر، ص20.

حيث n يمثل عدد القيم الممكنة لـ X .

ويمثل هذا التوزيع بيانيا على النحو التالي:



وكأمثلة على المتغيرات التي تتبع قانون التوزيع المنتظم لدينا:

– عند إلقاء زهرة نرد: فإن كل عنصر (رقم) ناتج له احتمال متساوي وهو $\frac{1}{6}$

حيث: X ={1,2,3,4,5,6} و $P(X=x_i)=\frac{1}{6}$

– عند رمي قطعة نقدية: فإن كل عنصر (رقم) ناتج له احتمال متساوي وهو $\frac{1}{2}$

حيث: X ={ P , F} و $P(X=x_i)=\frac{1}{2}$

– عند سحب ورقة اللعب: فإن احتمال سحب ورقة يساوي $\frac{1}{52}$

حيث: X ={1,2,3…52} و $P(X=x_i)=\frac{1}{52}$

1–2– المميزات العددية: إن التوقع الرياضي (الوسط الحسابي) والتباين والانحراف المعياري للتوزيع المنتظم المنقطع تكتب على النحو التالي:[1]

أ– التوقع الرياضي E (X): $E(X)=\frac{n+1}{2}$

ب– التباين $V(X)$: $V(X)=\frac{n^2-1}{12}$

ج–الانحراف المعياري δ(X): $\delta(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$

[1] محمد عبد العالي النعيمي وحسن ياسين طعمة، الإحصاء التطبيقي، دار وائل للنشر والتوزيع،الطبعة الأولى،2008، الأردن، ص133.

مثال (1): في تجربة عشوائية لرمي حجر نرد مرة واحدة المطلوب هو:

1- تحديد التوزيع الاحتمالي لهذه التجربة؛

2- حساب $E(X)$ و $V(X)$ و $\delta(X)$.

الحل: 1- لدينا عدد القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هو($n = 6$) وهذه النتيجة تخضع لقانون التوزيع المنتظم حيث: $P(X=x_i)= \frac{1}{6} = p_i$

X	1	2	3	4	5	6	Σ
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

2- 1- حساب التوقع الرياضي$E(X)$:

لدينا: $E(X)= \frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} = 3,5$

ومنه: $E(X)=3,5$

2-2- حساب التباين $V(X)$ أو σ^2_x:

لدينا: $\sigma^2_x = \frac{n^2-1}{12} = \frac{6^2-1}{12} = 2,92$

ومنه: $\sigma^2_x = 2,92$

2-3- حساب الانحراف المعياري $\delta(X)$:

لدينا: $\delta(X) = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}} = \sqrt{2,92}$

ومنه: $\delta(X) = 1,71$

2- قانون توزيع برنولي (Bernoulli Distribution):

2-1- تعريف: قبل استعراض قانون التوزيع برنولي فإنه من المفيد لنا معرفة ما يسمى بمحاولة برنولي.

2-1-1- محاولة برنولي Bernoulli: هي تجربة عشوائية تنتهي بنتيجتين اثنتين فقط: نسمي النتيجة الأولى اصطلاحا بالنجاح (Success) ونرمز لها بالرمز (s) والنتيجة الثانية بالفشل (Failure) ونرمز لها بالرمز (f)، ونرمز لاحتمال النجاح بالرمز P ولاحتمال الفشل بالرمز q وينبغي ملاحظة أن: $q = 1 - P$ ومن أمثلة محاولة برنولي ما يلي:

- تجربة قذف قطعة نقود (صورة أو كتابة).
- تجربة تسجيل جنس المولود (ذكر أو أنثى).
- تجربة رصد نتيجة طالب في الاختبار (ناجح أو راسب).
- تجربة رصد نتيجة تحليل إصابة بمرض معين (مصاب أو غير مصاب).
- تجربة فحص قطعة من إنتاج أحد المصانع (سليمة أو تالفة).

2-1-2- توزيع برنولي: لنفرض أن لدينا محاولة برنولي ولنعرف المتغير العشوائي X على أنه عدد مرات النجاح عند إجراء محاولة برنولي أي أن: $X(s)=1$ و $X(f)=0$.

إن مجموعة القيم الممكنة لهذا المتغير العشوائي هي : {0 , 1} واحتمالاته هي:[1]

$$P(X=1)=P(s)=P$$

$$P(X=0)=P(f)=1-P$$

نضع: N=s و K= f ويكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X على النحو التالي:

$X \sim B(1, P)$ أي $X=1$ باحتمال يساوي P)

ودالة التوزيع: $P(X=K)= P^{K} \cdot q^{1-K}$

2-2- المميزات العددية:

أ- **التوقع الرياضي E(X):** $E(X) = \sum X_i P_i = 0 \cdot P + 1 \cdot P = P$

[1] عبد الله بن عبد الكريم الشيحة، مبادئ الإحصاء والاحتمالات، إدارة المطابع والنشر العلمي بجامعة الملك سعود، 1428، السعودية، ص104.

$$E(X) = P$$

ب- التباين$V(X)$: $V(X) = \sigma^2$

$$= E\,(X^2) - (E(X))^2$$

$$= (0^2 \cdot P - 1^2 \cdot P\,) - P^2$$

$$= P - P^2$$

$$= P\,(1 - P)$$

$$= P \cdot q$$

ومنه: $V(X) = P \cdot q$

ج- الانحراف المعياري $\delta(X)$: $\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{P \cdot q}$

بالمختصر نكتب:

$$E(x) = P \Rightarrow E(x) = \sum P_i x_i = 1.P + o.q = p$$
$$V(x) = pq \Rightarrow V(x) = E(x^2) = (1^2.P + 0^2.q) - P^2$$
$$= p - p^2 = p(1-p) = p.q$$

مثال (2): قدرت نسبة الأشخاص المتعافين من فيروس ما بـ 60%، إذا أخذت عينة مكونة من شخص واحد بشكل عشوائي، وكان X يمثل عدد الأشخاص المتعافين والمطلوب هو:

1- تحديد التوزيع الاحتمالي وقانون التوزيع الاحتمالي لهذا التوزيع.

2- حساب $E(X)$ و $V(X)$ و$\delta(X)$.

الحل:

1- X هو عدد الأشخاص المتعافين حيث: (X=1) تمثل الشخص المتعافي و(X=0) تمثل الشخص المصاب (غير المتعافي)، والتوزيع الاحتمالي مبين في الجدول التالي:

X	0	1	$\Sigma(P(X=x_i)$
$(P(X=x_i)$	0,4	0,6	1

حيث: P(X=1)=0,6 و P(X=0)=0,4

ومنه: قانون التوزيع الاحتمالي هو قانون برنولي $X \sim B(1, P)$ ⟵ $X \sim B(1, 0{,}6)$

2- حساب $E(X)$ لدينا: $E(X)= P$ ومنه: $E(X) = 0{,}6$

حساب $V(X)$ لدينا: $V(X) = P \cdot q$ ومنه: $V(X) = 0{,}6 \cdot 0{,}4$

$V(X) = 0{,}24$

حساب $\delta(X)$ لدينا: $\delta(X) = \sqrt{V(X)}$ ومنه: $\delta(X) = \sqrt{0{,}24}$

$\delta(X) = 0{,}49$

3- قانون التوزيع الثنائي أو توزيع ثنائي الحدين (Loi binomiale)

3-1- تعريف: يعتبر توزيع ذو الحدين من التوزيعات المنقطعة المهمة ذات التطبيق الواسع، وهو من التوزيعات المرتبطة بتكرار التجربة، وعلى فرض بأن عينة عشوائية ذات حجم (n) قد أخذت من توزيع برنولي، ولتكن: $(X_1, X_2, X_3, \cdots X_K \cdots X_n)$ وبما أن X تأخذ الواحد الصحيح ($X = 1$) إذا وقع الحدث (عند نجاح الحدث) وتأخذ الصفر($X = 0$) عند فشله لذا يمكن حساب احتمال ظهور الحادث K من المرات في n من التجارب أو المحاولات في توزيع ذي الحدين التالي:

$$P(X=K)= C_n^K \cdot P^K \cdot q^{n-K}$$

حيث: $(X = 0,1,2,3 \ldots . K \ldots n)$ و $(0 \leq K \leq n)$

P= احتمال النجاح و q = احتمال الفشل

C_n^K هو عدد الحالات الممكنة لظهور الحدث K من المرات من بين n من المحاولات ويطلق عليه بالمصطلح الرياضي بالتوافيق.

ومن خواص تجارب ذي الحدين:

- نتيجة كل محاولة تصنف إلى صنفين هما نجاح الحادث أو فشله.

- احتمال النجاح P يبقى ثابتا في المحاولات الأخرى.

- أن المحاولات تتكرر بـ (n) من المرات.

- أن تكرار هذه المحاولات مستقلة.[1]

3-2- استخدامات تجربة ذي الحدين:

1- طبيعة الإنتاج (معيب أو جيد).

2- إصابة هدف معين أو عدم إصابته.

3- نتيجة رمي عملة معدنية (صورة أو كتابة).

4- التدخين لمجموعة من الطلاب أو عدم التدخين.[2]

ملاحظة مهمة: إن توزيع برنولي هو حالة خاصة لتوزيع ذي الحدين عندما $n=1$.

3-3- المميزات العددية:

أ- التوقع الرياضي $E(X)$: $E(X) = n \cdot P$

ب- التباين σ^2_x: $\sigma^2_x = n \cdot P \cdot q$

ج- الانحراف المعياري $\delta(X)$: $\delta(X) = \sqrt{n \cdot P \cdot q}$

مثال(3): أطلق صياد أربع طلقات مستقلة على هدف ما أثناء الصيد، وكان احتمال إصابته للهدف هو:

$P = 0{,}8$ والمطلوب هو:

1- حساب الاحتمالات التالية: أ- احتمال عدم إصابة الهدف.

ب- احتمال إصابة الهدف مرة واحدة.

ج- احتمال إصابة الهدف مرتين.

[1] نوار الأسدي، مبادئ علم الإحصاء، مكتبة الإبداع الرقمية ، بدون تاريخ، العراق،ص23.

[2] محمد عبد العالي النعيمي، مرجع سبق ذكره، ص112.

د- احتمال إصابة الهدف مرتين على الأقل.

2- احسب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري.

الحل: نتيجة النجاح هو إصابة الهدف واحتمال النجاح: $P = 0{,}8$

نتيجة الفشل هو عدم إصابة الهدف واحتمال الفشل: $q = 1 - P$ أي $q = 0{,}2$

وبما أن التجربة برنولية (4 طلقات) $(n = 4)$ و التجارب مستقلة.

فإن المتغير X يتبع قانون التوزيع الثنائي $X \sim B(, P)$ حيث: $n = 4$ و $K = 0,1,2,3,4$

ومنه: $X \sim B(4, 0{,}8)$ حيث: $P(X=K) = C_n^K \cdot P^K \cdot q^{n-K}$

أ- احتمال عدم إصابة الهدف $\Leftarrow$ $P(X=0) = C_4^0 \cdot 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^4 = 0{,}2^4 = 0{,}0016$

ب- احتمال إصابة الهدف مرة واحدة $\Leftarrow$ $P(X=1) = C_4^1 \cdot 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0256$

ج- احتمال إصابة الهدف مرتين $\Leftarrow$ $P(X=2) = C_4^2 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}1536$

د- احتمال إصابة الهدف مرتين على الأقل $\Leftarrow$ $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$

$$= 0{,}1536 + C_4^3 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^1 + C_4^4 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^0$$

$$= 0{,}1536 + 0{,}4096 + 0{,}4096$$

$$= 0{,}9728$$

2- حساب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري:

أ- التوقع الرياضي $E(X)$: $E(X) = n \cdot P = 4 \cdot 0{,}8 = 3{,}2$

ب- التباين $V(X)$: $V(X) = n \cdot P \cdot q = 4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}64$

ج- الانحراف المعياري $\delta(X)$: $\delta(X) = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$

4- قانون التوزيع بواسون (Loi de Poisson)

4-1- تعريف: هو توزيع منفصل يستخدم في حالة الأحداث المستقلة ويهتم بالحوادث النادرة مثل: الحرائق في إحدى المدن، الزلازل، الحوادث على الطرق، الأخطاء المطبعية في إحدى صفحات الكتاب، المكالمات التي يتلقاها مركز ما في ثانية واحدة...الخ ويعطينا احتمال عدد مرات ظهور هذه الحوادث النادرة.[1]

ويمثل المتغير العشوائي البواسوني X مثلا عدد(الحوادث النادرة) الملحوظة في وحدة قياس معينة، زمنا كانت أم مسافة أم مساحة أم حجما.[2]

4-2- تطبيقات توزيع بواسون:

أ) المسائل التي تحتاج إلى الانتظار أو المرتبطة بالزمن مثل:

- عدد حوادث السير في أسبوع بمدينة ما؛
- عدد القطارات التي تغادر المحطة في الساعة؛
- عدد المراجعين في أحد مراكز الخدمة في اليوم؛
- عدد المكالمات الهاتفية التي يتلقاها مركز ما في الدقيقة.

ب) المسائل التي ترتبط بمناطق الفراغ أو الحيز مثل المسائل المرتبطة بمراقبة الجودة ومنها:

- عدد العيوب الموجودة في قطعة قماش محددة بالمساحة؛
- عدد العيوب الموجودة في سلك للهاتف طوله كيلومتران؛
- عدد الأخطاء المطبعية في الصفحة التي ترتكبها إحدى السكرتيرات.[3]

[1] جاسم محمد علي، الإحصاء باستخدام برنامج spss، مركز الكتاب الأكاديمي،1997، العراق،ص94.

[2] أنيس إسماعيل كنجو، الإحصاء والاحتمالات، مكتبة العبيكان للنشر، الطبعة الأولى السعودية،2000،ص-ص288.

[3] خالد زهدي خواجة، أساسيات الاحتمال، المعهد العربي للتدريب والبحوث الإحصائية، الأردن، ص130.

يمكن استنتاج دالة الاحتمال لتوزيع بواسون كحالة حدية (أو كنهاية) لدالة الاحتمال للتوزيع الثنائي ولنفرض أن عدد التكرارات n يسعى في اتجاه أن يصبح كبيرا جدا، وأن P يسعى في اتجاه أن يصبح صغيرا جدا، بحيث يبقى جداؤهما $n.P$ مساويا لعدد ثابت هو λ وتعطى صيغة دالة الاحتمال لتوزيع بواسون كما يلي:

$$p(X) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} , \qquad x=0,1,2 \ldots,\infty$$

حيث e أساس اللوغاريتم الطبيعي(مقدار ثابت) = 2.7183

λ : يمثل متوسط عدد مرات وقوع الأحداث التي تقع في وحدة قياس معينة حيث: $\lambda > 0$

وستعطي هذه الصيغة احتمالات متساوية تقريبا لتلك التي تعطيها دالة الاحتمال للتوزيع الثنائي شريطة أن يكون n كبير جدا و يكون الجداء $n.P$ صغير نسبيا (نطلب عادة أن يكون $n.P < 5$).

4-3- المميزات العددية:

أ- التوقع الرياضي(X) E: $\quad E(X)= \lambda$

ب- التباين$V(X)$: $\quad V(X)= \lambda$

أي أن: $\quad E(X)= V(X) = \lambda$

ج- الانحراف المعياري $\delta(X)$: $\quad \delta(X) = \sqrt{\lambda}$

يمكن اعتبار $E(X)= V(X) = \lambda$ هي خاصة مميزة ينفرد بها التوزيع البواسوني من بين التوزيعات المنفصلة جميعها، وإذا وجدنا في مجتمع ما من القياسات أن المتوسط و التباين قريبان جدا من بعضهما فإن ذلك يحفزنا على الاعتقاد بأن أفضل نموذج احتمالي مناسب لهذا المجتمع قد يكون النموذج البواسوني.[1]

مثال (4): يبلغ متوسط عدد حوادث العمل التي تحدث في مصنع ما أربع حوادث خلال الشهر (شهريا)، والمطلوب هو:

1- حساب احتمال أن لا يقع أي حادث في شهر معين.

2- حساب احتمال أن يقع ثلاثة حوادث على الأكثر في شهر معين.

[1] أنيس اسماعيل كنجو، مرجع سبق ذكره،290.

3- احسب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري.

الحل:

لدينا متوسط عدد مرات وقوع حوادث العمل في هذا المصنع قدرت بأربع حوادث شهريا أي أن هذا المتوسط ينتمي الى وحدة قياس الزمن، وبالتالي يخضع لقانون توزيع بواسون $X \sim P(\lambda)$

حيث: $\lambda = 4$ ، $p(X) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$

1- احتمال أن لا يقع أي حادث في شهر معين: $P(X=0) = e^{-4}\frac{4^0}{0!} = e^{-4} = 0{,}0183$

2- حساب احتمال أن يقع ثلاثة حوادث على الأكثر في شهر معين:

$$P(X\leq 3) = P(X=3) + P(X=2) + P(X=1) + P(X=0)$$

$$= e^{-4}\frac{4^3}{3!} + e^{-4}\frac{4^2}{2!} + e^{-4}\frac{4^1}{1!}\ e^{-4}\frac{4^0}{0!}$$

$$= 0{,}1952+0{,}1464+0{,}0732$$

$$= 0{,}4148$$

3- حساب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري:

أ- التوقع الرياضي$E(X)$: $E(X)=\lambda=4$

ب- التباين$V(X)$: $V(X)=\lambda=4$

ج- الانحراف المعياري$\delta(X)$: $\delta(X) = \sqrt{4} = 2$

5- قانون التوزيع الهندسي (Loi géométrique)

5-1- تعريف: التوزيع الهندسي هو جزء من التوزيع الاحتمالي المتعلق بتجارب برنولي وهو عدد التكرارات للتجربة للحصول على نجاح واحد فقط من تلك التجربة، فإذا كان المتغير العشوائي X يشير إلى عدد مرات

تكرار التجربة و P يشير إلى احتمال نجاح التجربة و $q = 1 - P$ هو احتمال فشل التجربة وبالتالي فإن التابع الاحتمالي لهذا التوزيع هو:[1] $g(x,p) = p \cdot q^{x-1} \quad , \; x = 1,2 \ldots$

ف X هو عدد المحاولات دون توقف حتى يتم الحصول على أول نجاح، إن مجموعة الاحتمالات للعلاقة $g(x,p)$ هي عبارة عن متتالية هندسية لا نهائية متناقصة بالأساس q.[2]

5-2- المميزات العددية:

إذا كان X متغير عشوائي يتبع التوزيع الهندسي بوسيط P أي: $X \sim g(x,p)$ فإن:

أ-التوقع الرياضي E (X): $E(X) = \frac{1}{p}$

ب-التباين V(X) : $V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{1-P}{p^2}$

ج- الانحراف المعياري $\delta(X)$:[3] $\delta(X) = \sqrt{\frac{1-P}{p^2}}$

مثال(5): في تجربة القاء حجر نرد، نرمي الحجر حتى يتم ظهور أحد الأوجه المطلوبة.

والمطلوب هو:

1- ما هو احتمال ظهور الرقم 5 بعد 6 محاولات لإلقاء النرد.

2- حساب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري.

الحل:

بما أن احتمال الحصول على أحد الأوجه الستة في الرمية الواحدة هو $p = \frac{1}{6}$ فإن المتغير X يتبع قانون التوزيع الهندسي $X \sim g(x,p)$ حيث:

الحصول على نجاح هو ظهور الرقم 5 واحتمال النجاح هو: $p = \frac{1}{6}$

---

[1] رامز قدسية، مرجع سبق ذكره، ص 140.

[2] محمد بداوي، مرجع سبق ذكره،ص99.

[3] رامز قدسية، مرجع سبق ذكره، ص 140.

احتمال الفشل هو عدم ظهور الرقم 5 وهو: $\frac{5}{6} = q = 1-\frac{1}{6}$ ، $q = 1- P$

1- ظهور الحدث المطلوب يكون بعد ستة محاولات لإلقاء حجر النرد أي في المحاولة السابعة وبالتالي:

$X = 7$ و $p = \frac{1}{6}$ ومنه: $g(x,p) = p \cdot q^{x-1}$ يصبح: $g\left(7,\frac{1}{6}\right)$ حيث:

$$P(X=7) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}^{7-1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}^{6} = 0{,}0558$$

2- حساب التوقع الرياضي و التباين و الانحراف المعياري:

أ- التوقع الرياضي $E(X)$: $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$

ب- التباين $V(X)$: $V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}^2} = 30$

ج- الانحراف المعياري $\delta(X)$: $\delta(X) = \sqrt{30} = 5{,}4772$

6- قانون التوزيع فوق الهندسي (Loi hyper géométrique)

6-1- تعريف: اشترطنا في تطبيقات التوزيع الثنائي بأن تكون التجارب مستقلة أي أن يكون سحب العينات بالإرجاع (مع التكرار) لكن السؤال الذي نطرحه ماذا عن التجارب غير المستقلة التي يكون فيها سحب العينات بدون إرجاع (بدون تكرار) في هذه الحالة يكون التوزيع المناسب هو قانون التوزيع فوق الهندسي.

فعلى سبيل المثال إذا كان لدينا مجتمع يحتوي على (N) من العناصر فيه (N_1) لنوع معين من العناصر نسميها (نجاحا)، أما المتبقى منه هو$(N - N_1)$ لنوع آخر من العناصر نسميها (فشلا)، وتم اختيار عينة عشوائية بحجم (n) منه بدون إرجاع فإن عدد حالات النجاح التي يمكن الحصول عليها هي(N_1) وعدد حالات الفشل هي$(N - N_1)$ ومنه:

- عدد طرق اختيار (x) من (N_1) هو: $C_{N_1}^{x}$
- عدد طرق اختيار (n - x) من $(N - N_1)$ هو: $C_{N-N_1}^{n-x}$
- عدد الطرق الكلية لاختيار (n) من (N) هو: C_{N}^{n}

ويتوزع المتغير العشوائي المنفصل X الذي يمثل عدد حالات النجاح التي يمكن الحصول عليها من تجربة التوزيع فوق الهندسي على الشكل التالي:

$$P(X=x) = X \sim h(N_1, N-N_1, P) = \frac{C_{N_1}^{x}\ C_{N-N_1}^{n-x}}{C_N^{n}}$$

وهذا يعني أن المتغير العشوائي X يتوزع وفق التوزيع الهندسي بالمعلمتين (N_1) و $(N-N_1)$.[1]

6-2- المميزات العددية: إن الوسط الحسابي $E(X)$ و التباين $V(X)$ والانحراف المعياري $\delta(X)$ للتوزيع فوق الهندسي تكتب على النحو التالي:

أ- التوقع الرياضي $E(X)$:

$$E(X) = n * \frac{N_1}{N} = n.P$$

ب- التباين $V(X)$:

$$V(X) = n * \frac{N_1}{N}\left[1-\frac{N_1}{N}\right]\left[\frac{N-n}{N-1}\right] = n \cdot P \cdot q\ \left[\frac{N-n}{N-1}\right]$$

ج- الانحراف المعياري $\delta(X)$:

$$\delta(X) = \sqrt{n\,P\,q \cdot \left[\frac{N-n}{N-1}\right]}$$

مثال (6): تحتوي مزهرية على 5 أزهار حمراء و4 أزهار صفراء نختار بدون إرجاع 3 أزهار والمطلوب حساب احتمال:

1- الحصول على ولا زهرة حمراء.

2- الحصول على زهرة واحدة حمراء.

3- الحصول على زهرتين حمراوين.

4- الحصول على 3 زهرات حمراء.

- حساب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري.

الحل: بما أن اختيار العينة تم بدون إرجاع فالتوزيع هو التوزيع فوق الهندسي حيث:

$$X \sim h(N_1, N-N_1)$$

$N=9$ ، $n=3$ ، $N_1=5$ ، $N-N_1=4$ ، منه: $X \sim h(9,4)$

[1] محمد عبد العالي النعيمي، مرجع سبق ذكره، ص129.

$$P(X=x) = \frac{C_5^x \; C_4^{3-x}}{C_9^3} \quad , \quad X = 0,1,2,3$$

إيجاد الاحتمالات التالية:

1- الحصول على ولا زهرة حمراء: $P(X=0)$

$$P(X=0) = \frac{C_5^0 \; C_4^3}{C_9^3} = \frac{4}{84} = 0,0476$$

2- الحصول على زهرة واحدة حمراء: $P(X=1)$

$$P(X=1) = \frac{C_5^1 \; C_4^2}{C_9^3} = \frac{30}{84} = 0,3571$$

3- الحصول على زهرتين حمراوين: $P(X=2)$

$$P(X=2) = \frac{C_5^2 \; C_4^1}{C_9^3} = \frac{40}{84} = 0,4761$$

4- الحصول على 3 زهرات حمراء: $P(X=3)$

$$P(X=3) = \frac{C_5^3 \; C_4^0}{C_9^3} = \frac{10}{84} = 0,1190$$

- حساب التوقع الرياضي و التباين و الانحراف المعياري:

$N=9$ ، $n=3$ ، $N_1=5$ ، $N-N_1=4$ ، منه: $X \sim h(9,4)$

- التوقع الرياضي $E(X)$:
$$E(X) = n * \frac{N_1}{N} = 3 * \frac{5}{9} = 1.67$$

- التباين $V(X)$:
$$V(X) = n * \frac{N_1}{N}\left[1-\frac{N_1}{N}\right]\left[\frac{N-n}{N-1}\right]$$

$$V(X) = 3 * \frac{5}{9}\left[1-\frac{5}{9}\right]\left[\frac{9-3}{9-1}\right] = 5,68$$

- الانحراف المعياري $\delta(X)$: $\delta(X) = \sqrt{V(X)}$

$=\sqrt{5,68}=2,38$

7- ملخص لأهم التوزيعات الاحتمالية المنقطعة:

التوزيع	طبيعة المتغير العشوائي X	صيغة التوزيع (الاحتمال)	التوقع والتباين
المنتظم	X متغير عشوائي منقطع يتبع التوزيع المنتظم عندما تكون قيم الاحتمالات المقابلة لكل قيمة من قيم X متساوية.	$P(X=x_i)=\frac{1}{n}=p_i$	$E(X)=\frac{n+1}{2}$ $V(X)=\frac{n^2-1}{12}$
برنولي $X \sim B(1, P)$	تجربة عشوائية واحدة لها نتيجتين اثنتين فقط النتيجة الأولى النجاح واحتمالها P والنتيجة الثانية الفشل واحتمالها q	$P(X=K)=P^K \cdot q^{1-K}$	$E(X)=P$ $V(X)=P \cdot q$
الثنائي $X \sim B(n, P)$	تتكرر تجربة برنولي n مرة مستقلة في تجارب ثنائية النتائج والسحب يتم بالإرجاع	$P(X=K)=C_n^K \cdot P^K \cdot q^{n-K}$	$E(X)=n \cdot P$ $V(X)=n \cdot P\, q$
بواسون $X\sim p(\lambda)$ $\lambda > 0$	X متغير عشوائي منقطع يمثل عدد مرات تحقق الأحداث في وحدة قياس معينة.	$p(X)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$, $x=0,1,2\ldots,\infty$	$E(X)=\lambda$ $V(X)=\lambda$
الهندسي $g(x,p)$	X متغير عشوائي منقطع يمثل عدد المحاولات دون توقف حتى يتم الحصول على أول نجاح خلال تجربة برنولية مكررة	$p(X)=p \cdot q^{x-1}$	$E(X)=\frac{1}{p}$ $V(X)=\frac{1-P}{p^2}$
فوق الهندسي $X \sim$	X يمثل عدد حالات النجاح التي يمكن الحصول عليها من تجربة برنولي n	$P(X=X)=\frac{C_{N_1}^{x}\, C_{N-N_1}^{n-x}}{C_N^n}$	$E(X)=n.P$ $V(X)=$

$\mathbf{h}(N_1, N - N_1, \mathbf{P})$	مرة غير مستقلة والسحب يتم بدون إرجاع.		$n \cdot P \cdot q \left[\frac{N-n}{N-1}\right]$

8- تمارين محلولة:

التمرين الأول:

ليكن X متغير عشوائي يمثل نتيجة رمي قطعة نقدية مرة واحدة والمطلوب:

1- تحديد التوزيع الاحتمالي لهذه التجربة.

2- حساب E(X) و $V(X)$ و $\delta(X)$.

الحل:

1- تحديد التوزيع الاحتمالي لهذه التجربة:

عدد القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هو($n = 2$) والنتيجة تخضع لقانون التوزيع المنتظم حيث: $p_i =$ $P(X=x_i)=\frac{1}{2}$

X	الصورة	الرقم
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

2-1- حساب التوقع الرياضي $E(X)$

لدينا: $E(X)=\frac{n+1}{2} = \frac{2+1}{2} = 1{,}5$

ومنه: $E(X)=1{,}5$

2-2- حساب التباين σ^2_x:

لدينا: $\sigma^2_x = \frac{n^2-1}{12} = \frac{2^2-1}{12} = 0{,}25$

ومنه: $\sigma^2_x = 0{,}25$

2-3- حساب الانحراف المعياري $\delta(X)$:

لدينا: $\delta(X) = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}} = \sqrt{0{,}25}$

ومنه: $\delta(X) = 0{,}5$

التمرين الثاني:

إذا كان 80% من طلاب السنة الأولى جامعي ينجحون في مادة الإحصاء، نختار عشوائيا طالبا واحدا من الطلبة وليكن X يمثل عدد الطلبة الناجحين والمطلوب:

1- تحديد التوزيع الاحتمالي لهذه التجربة.

2- تحديد القانون الاحتمالي لهذا التوزيع.

3- حساب $E(X)$ و $V(X)$ و $\delta(X)$.

الحل:

1- تحديد التوزيع الاحتمالي لهذه التجربة:

X هو عدد الطلبة الناجحين حيث: $X=1 \Leftarrow$ الطالب ناجح

$X=0 \Leftarrow$ الطالب راسب

حيث: $P(X=1)=0{,}8$ ، $P(X=0)=0{,}2$

والتوزيع الاحتمالي لهذه التجربة هو قانون برنولي $X \sim B(1, P)$ $X \sim B(1, 0{,}8)$

2- قانون التوزيع الاحتمالي لهذه التجربة متين في الجدول التالي:

$\Sigma(P(X=x_i))$	1	0	X
1	0,8	0,2	$(P(X=x_i)$

3- حساب $E(X)$ لدينا: $E(X)=P$ ومنه: $E(X)=0{,}8$

حساب $V(X)$ لدينا: $V(X)=P\cdot q$ ومنه: $V(X)=0{,}8\cdot 0{,}2$

$V(X)=0{,}16$

حساب $\delta(X)$ لدينا: $\delta(X)=\sqrt{V(X)}$ ومنه: $\delta(X)=\sqrt{0{,}16}$

$\delta(X)=0{,}4$

التمرين الثالث:

قدرت نسبة الشفاء من فيروس (كوفيد- 19) باستخدام دواء الكرولوفيل بـ 56% فإذا خضع للعلاج 6 مصابين بهذا الفيروس، وكان X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الأشخاص المصابين الذين تماثلوا للشفاء (المستجيبين لبروتوكول العلاج) والمطلوب:

1 -ما هو نوع المتغير.

2 -ما هو القانون الاحتمالي لهذا التوزيع.

3 -أحسب الاحتمالات التالية:

أ -احتمال استجابة 5 مصابين لهذا البروتوكول العلاجي.

ب -احتمال استجابة مصاب واحد على الأقل.

ت -احتمال استجابة مصابين على الأكثر.

4 -حساب E(X) و $V(X)$ و $\delta(X)$ لعدد حالات الاستجابة.

الحل:

1- نوع المتغير: عشوائي منقطع لأن عدد الأشخاص المصابين الذين تماثلوا للشفاء غير قابل للتجزئة (يأخذ قيما صحيحة).

2- القانون الاحتمالي لهذا التوزيع: هو قانون التوزيع الثنائي (ذو الحدين) لأن التجربة تضم نتيجتين هما:

النجاح: يمثل حالات الشفاء من الفيروس بعد الخضوع للعلاج (الاستجابة للدواء).

الفشل: يمثل حالات عدم الشفاء من الفيروس بعد الخضوع للعلاج (عدم الاستجابة للدواء).

حيث: $X \sim B(n, P)$ ، $n = 6$ ، $K = 0,1,2,3,4,5,6$

$P = 0,56$ ، $q = P - 1$ ، $q = 0,44$

ومنه: $X \sim B(6, 0,56)$ حيث: $P(X=K)= C_n^K \cdot P^K \cdot q^{n-K}$

3-حساب الاحتمالات التالية:

أ- احتمال استجابة 5 مصابين لهذا البروتوكول العلاجي⇐ $P(X=5) = \frac{5}{6} \cdot 0,56^5 \cdot 0,44^1$

$= 6 \cdot 0,56^5 \cdot 0,44$

$= 0,1454$

ب- احتمال استجابة مصاب واحد على الأقل ⇐ $P(X\geq 1)$

$P(X\geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$

$= 1 -[P(X=0)]$

$= 1 - [C_6^0 \cdot 0,56^0 \cdot 0,44^6]$

$= 0,9927$

ج- احتمال استجابة مصابين على الأكثر ⇐ $P(X\leq 2)$

$P(X\leq 2) = P(X= 2) + P(X= 1) + P(X= 0)$

$= [C_6^2 \cdot 0,56^2 \cdot 0,44^4] +[C_6^1 \cdot 0,56^1 \cdot 0,44^5] + [C_6^0 \cdot 0,56^0 \cdot 0,44^6]$

$= [0,1763] +[0,0554] + [0,0072]$

$= 0{,}2389$

4- حساب $E(X)$ و $V(X)$ و $\delta(X)$ لعدد حالات الاستجابة:

أ- التوقع الرياضي $E(X)$ $E(X) = n \cdot P = 6 \cdot 0{,}56 = 3{,}36$

ب- التباين $V(X)$: $V(X) = n \cdot P \cdot q = 6 \cdot 0{,}56 \cdot 0{,}44 = 1{,}4784$

ج- الانحراف المعياري $\delta(X)$: $\delta(X) = \sqrt{1{,}4784} = 1{,}2160$

التمرين الرابع:

بلغ متوسط عدد الحرائق خلال شهر أوت في أحد الغابات الكثيفة 3 حرائق فما هو:

1- احتمال أن يقع في أحد الشهور:

أ -حريق واحد. ب- حريقان. ج- حريقان على الأكثر. د- حريقان على الأقل.

2- أحسب المتوسط و الانحراف المعياري لعدد الحرائق الشهرية.

الحل:

ليكن X يمثل عدد الحرائق الشهرية في هذه الغابات حيث بلغ المتوسط 3 حرائق في الشهر والمتوسط ينتمي الى وحدة قياس الزمن، وبالتالي يخضع لقانون توزيع بواسون $X \sim P(\lambda)$

حيث: $\lambda = 3$ ، $x=0,1,2,3$ ، $p(X) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$ ، $e = 2.7183$

1 – حساب الاحتمالات التالية:

أ- احتمال أن يقع حريق واحد في الشهر: $P(X=1) = e^{-3} \frac{3^1}{1!} = 0{,}1493$

ب- احتمال أن يقع حريقان في الشهر: $P(X=2) = e^{-3} \frac{3^2}{2!} = 0{,}2240$

ج- حريقان على الأكثر: $P(X \leq 2) = P(X=2) + P(X=1) + P(X=0)$

$$= e^{-3} \frac{3^2}{2!} + e^{-3} \frac{3^1}{1!} + e^{-3} \frac{3^0}{0!}$$

$$= 0{,}2240 + 0{,}1493 + 0{,}0498$$

$$= 0{,}4231$$

د- حريقان على الأقل: $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$

$$= 1 - [0{,}0498 + 0{,}1493]$$

$$= 0{,}8009$$

2- حساب المتوسط والانحراف المعياري:

أ–المتوسط E (X): $E(X)=\lambda =3$

ب–التباين$V(X)$: $V(X) = \lambda =3$

ج– الانحراف المعياري$\delta(X)$: $\delta(X) = \sqrt{3} = 1{,}7320$

التمرين الخامس:

في تجربة إلقاء قطعة نقدية إلى أن نحصل على الوجه الذي يحمل الصورة والمطلوب:

1– ما هو احتمال الحصول على الصورة حتى 4 رميات.

2– ما هو معدل عدد المحاولات حتى الحصول على الصورة.

الحل:

تجربة الحصول على الصورة هي تجربة برنولية مكررة إلى غاية الحصول على الصورة الأولى(النجاح الأول) والمتغير العشوائي X يمثل عدد مرات تكرار التجربة و بالتالي فالمتغيرX يتبع قانون التوزيع الهندسي.

حيث: $X \sim g(x,p)$ $g(x,p) = p \cdot q^{x-1}$

الحصول على النجاح هو ظهور الصورة ⇐ احتمال النجاح هو: $p = \frac{1}{2}$

احتمال الفشل هو عدم ظهور الصورة ⇐ $q = 1 - P$ ، $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

1– احتمال الحصول على الصورة حتى 4 رميات ⇐ $P(X=4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}^{4-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}^{3}$

$= 0{,}0625$

2– حساب معدل عدد المحاولات حتى الحصول على الصورة هو التوقع الرياضي$E(X)$

حيث: $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ (محاولتين)

التمرين السادس:

يتوفر في أحد معارض بيع الأجهزة الالكترونية 50 جهاز كمبيوتر، من بينها 10 أجهزة معيبة، تم اختيار عينة عشوائية مكونة من 5 أجهزة كمبيوتر والمطلوب:

1– أكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد اجهزة الكمبيوتر المعيبة.

2– أوجد احتمال: أ– أن تكون العينة كلها سليمة (غير معيبة).

ب – أن يكون جهاز واحد معاب.

ج– أن يكون جهازين على الأقل معابين.

3– أحسب E (X)، $V(X)$، $\delta(X)$.

الحل:

1− كتابة دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

بما أن التجربة برنولية فيها التكرار (مكررة 5مرات) وبما أن اختيار العينة يتم بدون إرجاع والتجارب غير مستقلة فإن المتغير العشوائي X يتبع التوزيع فوق الهندسي حيث: $X \sim h(N_1, N - N_1, P)$

لدينا:

$N = 50$ ، $n = 5$ ، $N_1 = 10$ ، $N - N_1 = 40$ ، $P = 0{,}2$ ومنه: $X \sim h(10{,}40{,}0{,}2)$

$$P(X = x) = \frac{C_{10}^{x}\ C_{40}^{5-x}}{C_{50}^{5}} \quad , \quad X = 0,1,2,3,4,5$$

2− إيجاد الاحتمالات التالية:

أ− أن تكون العينة كلها سليمة(غير معيبة) أي: $P(X = 0)$

$$P(X = 0) = \frac{C_{10}^{0}\ C_{40}^{5}}{C_{50}^{5}} = \frac{658008}{2118760} = 0{,}3106$$

ب− أن يكون جهاز واحد معاب أي أن: $P(X = 1)$

$$P(X = 1) = \frac{C_{10}^{1}\ C_{40}^{4}}{C_{50}^{5}} = \frac{913900}{2118760} = 0{,}4313$$

ج− أن يكون جهازين على الأقل معابين.

$$P(X \geq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$= 1 - [0{,}3106 + 0{,}4313]$$

$$= 0{,}2581$$

3− حساب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري:

لدينا: $N = 50$ ، $n = 5$ ، $N_1 = 10$ ، $P = 0{,}2$

أ− التوقع الرياضي E (X):

$$E(X) = n * \frac{N_1}{N} = 5 * \frac{10}{50} = 5.0{,}2 = 1$$

$$E(X) = n.P = 5.0{,}2 = 1$$

ب− التباين :

$$V(X) = n * \frac{N_1}{N}\left[1 - \frac{N_1}{N}\right]\left[\frac{N-n}{N-1}\right] = 5 * \frac{10}{50}\left[1 - \frac{10}{50}\right]\left[\frac{50-5}{50-1}\right] = 0{,}7347$$

$$V(X) = n \cdot P \cdot q \left[\frac{N-n}{N-1}\right] = 5 \cdot (0{,}2) \cdot (0{,}8)\left[\frac{50-5}{50-1}\right]$$

$= 0,7347$

ج-الانحراف المعياري$\delta(X)$: $\delta(X) = \sqrt{n\,P\,q \cdot \left[\frac{N-n}{N-1}\right]}$

$=\sqrt{0,7347}$

$=0,8571$

المحور التاسع

التوزيعات الاحتمالية الشهيرة للمتغيرة العشوائية المستمرة

تمهيد:

تعد التوزيعات الاحتمالية المستمرة ذات أهمية كبيرة نظرا لاستخداماتها في مجالات كثيرة وتكون على عدة أنواع منها التوزيع المنتظم، التوزيع الطبيعي، التوزيع الأسّي، توزيع ستيودنت، توزيع فيشر....، لكننا سنركز دراستنا على التوزيع الطبيعي الذي يعتبر من أهم التوزيعات المستمرة وذلك لأن الكثير من الظواهر الطبيعية تخضع للتوزيع الطبيعي وكذلك تلك الظواهر التي لا تخضع للتوزيع الطبيعي يمكن أن يقرب توزيعها إلى التوزيع الطبيعي إذا توفرت الشروط الضرورية لذلك، ونميز بين شكلين للتوزيع الطبيعي هما: التوزيع الطبيعي العام والتوزيع الطبيعي المعياري.

1- قانون التوزيع الطبيعي العام:

1-1- تعريف: هو توزيع احتمالي متصل وهو أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداما في التحليل الإحصائي فكثير من التوزيعات الموجودة في الطبيعة وفي الصناعة طبيعية، مثل مقاييس الذكاء، الأوزان، الأطوال، [1] ويطبق على العديد من الظواهر في الفيزياء والاقتصاد (أخطاء القياس)، كما يمكن أن يمثل نهاية عمر الأجهزة[2]، ويستخدم التوزيع الطبيعي كتقريب للتوزيعات الأخرى.

1-2- دالة الكثافة الاحتمالية: معادلة دالة الاحتمال الطبيعي معرفة كما يلي:

$$f(\mathrm{X}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right]} \qquad X \in]-\infty, +\infty[$$

حيث: $f(\mathrm{X})$: دالة المنحنى الطبيعي.

e : ثابت = 2.7183 ، π : ثابت = 3.1416 .

μ: الوسط الحسابي للتوزيع.

σ: الانحراف المعياري للتوزيع.[3]

---

[1] دومينيك سالفادور، نظريات ومسائل في الإحصاء والاقتصاد القياسي، ملخصات شوم، الدار الدولية للنشر والتوزيع، مصر، 1982، ص67.

[2] Renée Veysseyre, statistique et probabilités, $2^{éme}$ édition Dunod, Paris, 2001, P104.

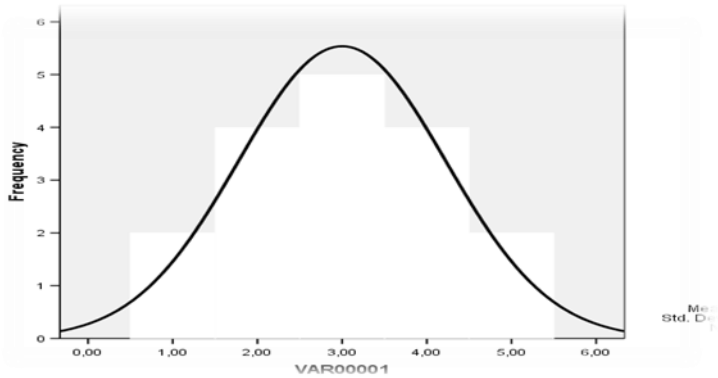
[3] دومينيك سالفادور، نفس المرجع، ص67.

1-3- التمثيل البياني للتوزيع الطبيعي:

- منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي يأخذ الشكل الجرسي.

- متناظر حول المتوسط μ .

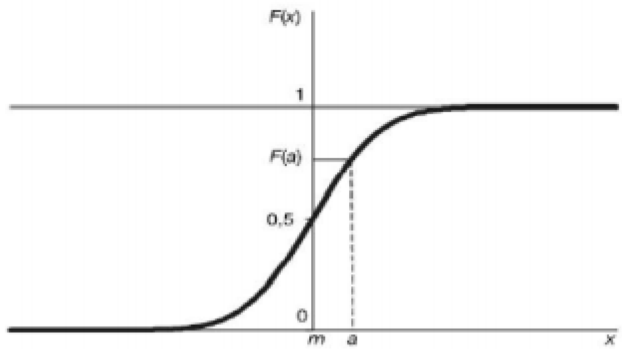
- المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي الواحد، بحيث يمتد إلى مالا نهاية في الاتجاهين.



1-4- دالة توزيع التوزيع الطبيعي: تكتب دالة التوزيع للمتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي كما يلي:

$$F(x) = P(x \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

ويمكن تمثيلها بيانيا وفقا للشكل التالي:



1-5- التوقع الرياضي والتباين للتوزيع الطبيعي: ليكن X متغير عشوائي يتبع توزيع طبيعي بوسطين (μ , σ) أي $X \sim N(x, \mu, \sigma)$ ، بحيث المتوسط هو μ والتباين هو σ^2 ، وبالتالي فإن الانحراف المعياري هو σ. ويسمى هذا التوزيع بالتوزيع الجرسي.

6-1- المساحة تحت المنحنى وكيفية حساب الاحتمال يتم بناء أي تابع كثافة احتمالي مستمر بحيث أن المساحة تحت منحنى هذا التابع المحددة بين المستقيمين $x= x_1$ و $x= x_2$ تساوي إلى احتمال أن تكون قيمة المتغير العشوائي X محصورة بين القيمتين x_1 و x_2 .

$$P(x_1 < X < x_2)= \int_{x_1}^{x_2} N(x,\mu,\sigma)\,dx= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right]}\,dx$$

وهو تكامل يصعب حسابه بالطرق العادية ويلزم حسابه في كل مرة نريد حساب احتمال معين لا نهاية من توابع الكثافة الاحتمالية ولذلك وتجنبا لتكرار المجهود و للصعوبة يتم عمل تحويل المنحنى المتناظر حول $X=\mu$ إلى منحنى متناظر حول $Z=0$ تتم عملية التحويل باستخدام العلاقة التالية: $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$

حيث Z متغير عشوائي مستمر يتبع توزيع طبيعي بمتوسط $\mu=0$ و تباين $\sigma^2=1$ ونكتب اختصارا:

$Z\sim N(Z,0,1)$. نسمي التوزيع الطبيعي العشوائي الذي متوسطه $\mu=0$ وتباينه $\sigma^2=1$ بالتوزيع الطبيعي القياسي[1](المعياري)، وهذا لتسهيل حساب مثل هذه الاحتمالات.

2- قانون التوزيع الطبيعي المعياري:

2-1- تعريف: يقال بأن المتغير العشوائي Z يتوزع وفق التوزيع الطبيعي المعياري إذا كان يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط μ يساوي الصفر وتباين σ^2 يساوي الواحد ودالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي Z تأخذ الصيغة التالية:

$$f(Z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{Z-\mu}{\sigma}\right)^2\right]}$$

حيث: $-\infty < Z < +\infty$ ، ونكتب[2]: $Z\sim N(0,1)$

2-2- دالة التوزيع الاحتمالي للتوزيع الطبيعي: لحساب الاحتمالات نستخدم تابع الاحتمالات المعياري والذي نرمز له بالرمز: $\varphi(Z)$ حيث :

$$\varphi(Z) = P(Z < Z_i) = \int_{-\infty}^{Z} f(Z)\,dx$$

[1] رامز قدسية، الاحتمالات والإحصاء، كتاب من منشورات الجامعة الافتراضية السورية، الجمهورية العربية السورية، 2018، ص161.

[2] عبد الله بن عبد الكريم الشيحة، مبادئ الإحصاء والاحتمالات، إدارة المطابع والنشر العلمي بجامعة الملك سعود، السعودية، 1428 هـ، ص116.

2-3- المميزات العددية:

أ- التوقع الرياضي$E(Z)$: $E(Z) = 0$

ب- التباين$V(Z)$: $V(X) = 1$

ج- الانحراف المعياري $\delta(Z)$: $\delta(Z) = 1$

2-4- حساب الاحتمال: لحساب احتمالات التوزيع الطبيعي المعياري يوجد جدول يسمى بجدول التوزيع الطبيعي المعياري الذي يحسب الاحتمالات من النوع $P(Z < z)$ أو $P(Z \leq z)$ ويجب أن تكون قيمة Z موجبة، مع مراعاة الحالات التالية:

$$P(Z \leq z) = P(Z < z)$$

$$P(Z = z) = 0$$

$$P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$$

$$P(Z < -z) = 1 - P(Z < z)$$

$$P(Z > -z) = 1 - P(Z < -z) = P(Z < z)$$

مثال: إذا علمت أن أطوال الطلبة بأحد الجامعات تتبع توزيعا طبيعيا بوسط 165 سم وبانحراف معياري 5 سم، أوجد احتمال أن يكون أحد الطلبة طوله:

1- أقل من 160 سم.

2- أكبر من 175 سم.

3- يتراوح مابين 160 سم و 170 سم.

الحل:

بفرض أن X متغير عشوائي يمثل أطوال الطلبة حيث X يتبع توزيعا طبيعيا عاديا وسطه 165 سم وانحرافه المعياري 5 سم$X \sim N(165, 5)$

يجب تحويل وحدات التوزيع الطبيعي العام $N(165, 5)$ إلى وحدات التوزيع الطبيعي المعياري$N(0, 1)$ وفق العلاقة التالية: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ومنه:

1- حساب احتمال أن يقل طول الطالب عن 160 سم:

$$P(X < 160) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{160-165}{5}\right) = P(Z < -1)$$

$$= 1 - P(Z < 1)$$

$$= 1 - \Phi(1)$$

$$= 1 - 0{,}8413$$

$$= 1 - 0{,}8413$$

$$= 0{,}1587$$

2- حساب احتمال أن يزيد طول الطالب عن 175 سم:

$$P(X > 175) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{175-165}{5}\right) = P(Z > 2)$$

$$= 1 - P(Z < 2)$$

$$= 1 - \Phi(2)$$

$$= 1 - 0{,}9772$$

$$= 0{,}0228$$

3- حساب احتمال أن يتراوح طول الطالب مابين: 160 سم و 170 سم

$$P(160 < X < 170) = P\left(\frac{160-165}{5} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{170-165}{5}\right) = P(-1 < Z < 1)$$

$$= P(Z < 1) - P(Z < -1)$$

$$= P(Z < 1) - [1 - P(Z < 1)]$$

$$= P(Z < 1) - 1 + P(Z < 1)]$$

$$= 2P(Z < 1) - 1$$

$$= 2\Phi(1) - 1$$

$$= 2(0{,}8413) - 1$$

$$= 0,6826$$

3- التقارب مع التوزيع الطبيعي:

تتقارب الكثير من التوزيعات الإحصائية من التوزيع الطبيعي عندما يكون حجم العينة n كبير جدا والاحتمال P صغير، مثل تقارب التوزيع الثنائي (ذو الحدين) من التوزيع الطبيعي وتقارب التوزيع البواسوني من التوزيع الطبيعي.

3-1- استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين: يلاحظ من خلال ما عرضناه من أمثلة تتعلق بتوزيع ذو الحدين أن حجم العينة دائما صغير فإذا اعتبرنا أن حجم العينة كان كبيرا فإن استخدام دالة التوزيع لحساب الاحتمالات المختلفة سيكون أمرا صعبا أو شبه مستحيل كما يتضح في المثال التالي:

مثال: ألقيت قطعة نقود متماثلة على سطح أملس 500 مرة أحسب احتمال ظهور الصورة في 300 مرة على الأقل.

الحل: احتمال ظهور الصورة $(P = \frac{1}{2})$ ، احتمال عدم ظهور الصورة $(q = \frac{1}{2})$

المتغير X يتبع قانون التوزيع الثنائي حيث: $n = 500$ و $K = 300,301,.,.,500$

ومنه: $X \sim B(500, \frac{1}{2})$ حيث: $P(X=K)= C_n^K \cdot P^K \cdot q^{n-K}$

- احتمال ظهور الصورة 300 مرة على الأقل ⇐300 مرة أو 301 مرة أو 302 مرة أو ...أو 500 مرة.

- احتمال ظهور الصورة 300 مرة على الأقل ⇐

$$P(X\geq 300)= C_{500}^{300} \cdot (\tfrac{1}{2})^{300} \cdot (\tfrac{1}{2})^{200} + C_{500}^{301} \cdot (\tfrac{1}{2})^{301} \cdot (\tfrac{1}{2})^{199} +$$

$$+ C_{500}^{302} \cdot (\tfrac{1}{2})^{302} \cdot (\tfrac{1}{2})^{198} +\ldots+ C_{500}^{500} \cdot (\tfrac{1}{2})^{500} \cdot (\tfrac{1}{2})^{0}$$

ولنا أن نتصور كم يستغرق استكمال هذا الحل من وقت وجهد واحتمال كبير للخطأ، ولذلك أمكن الاستفادة من خصائص التوزيع الطبيعي والتي منها إمكانية استخدامه كتقريب لبعض التوزيعات الأخرى.

وقد سبق وأن أشرنا إلى أننا نقوم بتحويل القيم الأصلية للمتغير العشوائي X إلى قيم معيارية Z من خلال العلاقة: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

حيث توقع توزيع ذو الحدين E(X): $E(X)= n \cdot P = \mu$

وانحرافه المعياري $\delta(X)$: $\delta(X) = \sqrt{n \cdot P \cdot q} = \sqrt{n \cdot P \cdot (1-P)}$

ومنه: $Z = \frac{X-(n \cdot P)}{\sqrt{n \cdot P \cdot (1-P)}}$

نطبق العلاقة على المثال السابق فنجد:

$$P(X\geq 300) = P\left(Z \geq \frac{X-(n\cdot P)}{\sqrt{n\cdot P\cdot(1-P)}}\right)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{300-(500\cdot 0,5)}{\sqrt{500\cdot 0,5\cdot(1-0,5)}}\right)$$

$$=P(Z \geq 4,47)$$

$$= 1 - P(Z \leq 4,47)$$

$$= 1 - 0,99997$$

$$= 0,00003$$

قاعدة التقريب: عموما نعتبر التقريب إلى التوزيع الثنائي ملائما عندما nP و كلاهما أكبر من0,5.

فيما يستخدم قواعد أخرى منها:[1] $nPq \geq 9$

$$n \geq 20 , \quad nP \geq 10 , nq \geq 10$$

[1] بوعبد الله صالح، الاحتمالات والإحصاء الرياضي،جامعة المسيلة ،2006،ص18.

3-2- استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع بواسون: كما سبق وأن أشرنا في استخدام دالة التوزيع الطبيعي كتقريب لدالة التوزيع ذي الحدين نظرا لصعوبة أو استحالة استخدام دالة توزيع ذي الحدين عندما يكون حجم العينة كبيرا جدا، وبالمثل فإنه من الصعوبة بمكان استخدام دالة توزيع بواسون في حساب الاحتمالات عندما يكون حجم العينة كبير جدا، وإن كانت الاحتمالات بعد حد معين تتضاءل قيمتها جدا حتى تكاد تتلاشى، إلا أننا نظل بحاجة إلى حسابها[1].

ولذلك يمكن استخدام دالة التوزيع الطبيعي في حساب الاحتمالات الخاصة بالتوزيع البواسوني.

ولما كانت القيمة المتوقعة = التباين لهذا التوزيع فإن:

وانحرافه المعياري $\delta(X)$: $\delta(X) = \sqrt{\mu} = \sqrt{n \cdot P}$

حيث: $\mu = n \cdot P = \lambda$

وبالتالي تحسب القيمة المعياريةZ كما يلي:

$$Z = \frac{X - (n \cdot P)}{\sqrt{n \cdot P}}$$

مثال: إذا كانت نسبة الإنتاج المعيب في أحد المصانع 2% سحبت عينة عشوائية من 40 وحدة.

المطلوب: أحسب احتمال أن يكون ربع حجم العينة على الأكثر من الوحدات المعيبة وبفرض أن الإنتاج المعيب يتبع توزيع بواسون.

الحل: $n = 40$ ، $P = 0{,}02$ ، $\mu = n \cdot P = 40 \cdot 0{,}02 = 0{,}8$

والمطلوب أن $\frac{1}{4}$ حجم العينة على الأكثر وحدات معيبة أي حساب احتمال: $P(X \leq 10)$

لاحظ أننا لو استخدمنا دالة توزيع بواسون كان علينا أن نحسب:

$$P(X=10) + P(X=9) + P(X=8) + \ldots + P(X=0)$$

أما باستخدام دالة التوزيع الطبيعي فإن:

---

[1] شوقي سيف النصر سيد وآخرون، الإحصاء في مجال الأعمال، كلية التجارة، جامعة القاهرة، 2017، ص220.

$$P(X\leq 10) = P\left(Z \leq \frac{10-(40\cdot 0,02)}{\sqrt{40\cdot 0,02}}\right)$$

$$= P(Z \leq 10,29)$$

$$=0,99997$$

قاعدة التقريب: عموما نعتبر أن التقريب من التوزيع بواسون إلى التوزيع الطبيعي ملائم لما $\lambda \geq 15$ فيما يعتمد عدد من الإحصائيين كشرط للتقريب $\lambda \geq 10$.[1]

4- ملخص قانون التوزيع الطبيعي:

التوزيع	دالة الكثافة الاحتمالية	التوقع والتباين
التوزيع الطبيعي العام $X \sim N(\mu, \sigma)$	$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right]}$	$E(X) = \mu$ $V(X) = \sigma^2$
التوزيع الطبيعي المعياري $Z \sim N(0,1)$	$f(Z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{Z-\mu}{\sigma}\right)^2\right]}$	$E(X) = 0$ $V(X) = 1$

5- تمارين محلولة:

التمرين الأول:

[1] بوعبد الله صالح، مرجع سبق ذكره، ص19.

إذا علمت أن معدل الهيموجلوبين (بروتين محمول داخل خلايا الدم الحمراء) الطبيعي في الدم بالنسبة للأطفال من 6 أشهر إلى 4 سنوات يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 11جرام/ ديسيلتر وبانحراف معياري 0,5 جرام/ ديسيلتر. إذا اخترنا أحد الأطفال بشكل عشوائي فما هو احتمال:

1- أن يكون مستوى الهيموجلوبين في الدم لديه أكبر من 12 جرام/ ديسيلتر.

2- ما هي نسبة الأطفال الذين مستوى الهيموجلوبين لديهم أقل من 10 جرام/ ديسيلتر.

3- ما هي نسبة الأطفال الذين مستوى الهيموجلوبين لديهم يتراوح بين 10 جرام/ ديسيلتر و12 جرام/ ديسيلتر.

الحل:

ليكن X متغير عشوائي يمثل مستوى الهيموجلوبين في الدم حيث X يتبع توزيعا طبيعيا عاديا وسطه 11جرام/ ديسيلتر وانحرافه المعياري 0,5 جرام/ ديسيلتر $X \sim N\,(11\,,0{,}5)$

1- حساب احتمال أن يكون مستوى الهيموجلوبين في الدم لديه أكبر من 12 جرام/ ديسيلتر:

$$P(X > 12) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{12-11}{0{,}5}\right) = P(Z > 2)$$

$$= 1 - P(Z < 2)$$

$$= 1 - \Phi(2)$$

$$= 1 - 0{,}9772$$

$$= 0{,}0228$$

2- حساب نسبة الأطفال الذين مستوى الهيموجلوبين لديهم أقل من 10 جرام/ ديسيلتر:

$$P(X > 10) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{10-11}{0{,}5}\right) = P(Z > -2)$$

$$= 1 - P(Z < 2)$$

$$= 1 - \Phi(2)$$

$$= 1 - 0{,}9772$$

$$= 0{,}0228$$

ومنه نسبة الأطفال الذين معدل الهيموجلوبين لديهم أقل من 10 جرام/ ديسيلتر هم: 2,28 %

3- حساب نسبة الأطفال الذين مستوى الهيموجلوبين لديهم يتراوح بين 10 جرام/ ديسيلتر و12 جرام/ ديسيلتر :

$$P(10 < X < 12) = P\left(\frac{10-11}{0{,}5} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{12-11}{0{,}5}\right) = P(-2 < Z < 2)$$

$$= P(Z < 2) - P(Z < -2)$$

$$= P(Z < 2) - [1 - P(Z < 2)]$$

$$= P(Z < 2) - 1 + P(Z < 2)]$$

$$= 2P(Z < 2) - 1$$

$$= 2\Phi(2) - 1$$

$$= 2(0{,}9772) - 1$$

$$= 0{,}9544$$

ومنه نسبة الأطفال الذين مستوى الهيموجلوبين لديهم يتراوح بين 10 جرام/ ديسيلتر و 12 جرام/ ديسيلتر هو: 95,44 %.

التمرين الثاني:

قدرت نسبة الأشخاص الذين يدخلون محلا ما ويقومون بالشراء فعلا بـ 30 % والمطلوب:

أ-باستخدام توزيع ذو الحدين (التوزيع الثنائي) أحسب احتمال أنه من بين 30 شخصا يدخلون المحل فإن 10 أشخاص أو أكثر سوف يقومون بالشراء فعلا.

ب-باستخدام التوزيع الطبيعي كتقرب لذي الحدين أحسب احتمال أنه من بين 30 شخصا يدخلون المحل فإن 10 أشخاص أو أكثر سوف يقومون بالشراء فعلا.

الحل:

أ- حساب الاحتمال المطلوب باستخدام التوزيع الثنائي:

لدينا: $n = 30$ ، P =0,3 ، 1- P =0,7 والمطلوب حساب $P(X \geq 10)$

باستخدام جدول احتمالات ذي الحدين نجد:

$(X \geq 10) = P(10) + P(11) + P(12) + \dots + P(30) = 0{,}1416 + 0{,}1103 + 0{,}0749$

$+0{,}0444 + 0{,}0231 + 0{,}0106 + 0{,}0042 + 0{,}0015 + 0{,}005 + 0{,}001 = 0{,}4112$

ب- حساب الاحتمال باستخدام التوزيع الطبيعي كتقرب لذي الحدين:

لدينا: $n = 30$ وكلا من n P و n P (1- P) أكبر من 5 فيمكن تقريب احتمالات ذي الحدين باستخدام احتمالات التوزيع الطبيعي، ولكن عدد الأشخاص متغير منفصل(منقطع) فلكي نستطيع استخدام التوزيع الطبيعي فيمكن التعامل مع عدد الأشخاص كما لو كان متغير متصلا وإيجاد $P(X \geq 9{,}5)$

حيث: المتوسط μ ويساوي $\mu = P \Leftarrow$ $\mu = (30)(0{,}3) =$ 9 أشخاص

والانحراف المعياري$\delta(X)$ يساوي: $\delta(X) = \sqrt{n\,P(1-P)}$

$= \sqrt{30\,(0{,}3)(0{,}7)} = \sqrt{6{,}3} = 2{,}51$ شخصا

فيكون: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{9{,}5-9}{2{,}51} = 0{,}20$

والبحث مقابل $Z = 0{,}20$ نحصل على (0,0793) (الملحق3) فيكون:

$P(X \geq 9{,}5) = 0{,}5 - 0{,}0793 = 0{,}4205$

ومع كبر حجم n يتحسن التقريب المستخدم.

التمرين الثالث: تنتج آلة إنتاجية 10 وحدات معيبة في الساعة والمطلوب:

أ- باستخدام توزيع بواسون أحسب احتمال أن 4 وحدات أو أقل تكون معيبة من بين إنتاج ساعة مختارة عشوائيا.

ب- باستخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع بواسون أحسب احتمال أن 4 وحدات أو أقل تكون معيبة من بين إنتاج ساعة مختارة عشوائيا.

الحل:

أ- حساب الاحتمال باستخدام توزيع بواسون:

لدينا: $p(X) = {}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^x}{x!}$ ، $\lambda = 10$ والمطلوب حساب $P(X \leq 4)$ حيث:

$P(X \leq 4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$

$P(X=0) = e^{-10}\frac{10^0}{0!} = e^{-10} = 0{,}00005$

$P(X=1) = e^{-10}\frac{10^1}{1!} = 10\frac{(0{,}00005)}{1} = 0{,}0005$

$P(X=2) = e^{-10}\frac{10^2}{2!} = 10^2\frac{(0{,}00005)}{2} = 0{,}0025$

$P(X=3) = e^{-10}\frac{10^3}{3!} = 10^3\frac{(0{,}00005)}{6} = 0{,}008335$

$P(X=4) = e^{-10}\frac{10^4}{4!} = 10^4\frac{(0{,}00005)}{24} = 0{,}0208335$

$P(X\leq 4) = 0{,}00005 + 0{,}0005 + 0{,}0025 + 0{,}008335 + 0{,}0208335$

$P(X\leq 4) = 0{,}032217 = 3{,}23\ \%$

ب- حساب الاحتمال باستخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع بواسون:

لدينا: $\lambda = \mu = 10$ و $\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{10} = 3{,}16$

وباستخدام احتمالات التوزيع الطبيعي، نضع $P(X \geq 4{,}5)$ حيث X هو عدد الوحدات المعيبة.

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{4{,}5-10}{3{,}16} = \frac{-5{,}5}{3{,}16} = -1{,}74$$

والبحث مقابل $Z = 1{,}74$ نحصل على (0,0409) (الملحق3) فتكون قيمة الاحتمال 0,0409 أي 4,09%

ومع تزايد قيمة λ يتحسن التقريب المستخدم.

6- تمارين مقترحة عن التوزيعات الاحتمالية:

التمرين الأول:

في تجربة عشوائية يراد اختيار (سحب) كلية من بين الكليات التابعة إلى جامعة الجزائر 3 والبالغ عددها ثلاث كليات (كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير ، كلية علوم الاعلام والاتصال، كلية العلوم السياسية والعلاقات الدولية) بهدف اجراء دراسة تقييميه حول الأداء العلمي للكلية والمطلوب:

1--تحديد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يمثل الكلية الظاهرة على ورقة السحب.

2-التمثيل البياني لدالة التوزيع الاحتمالي.

3- حساب التوقع الرياضي $E(X)$ والتباين $V(X)$ والانحراف المعياري $\delta(X)$.

التمرين الثاني:

إذا كانت نسبة القطع التالفة لأحد مصانع الهواتف الخلوية تقدر بـ 5 % نختار هاتفا خلويا واحدا بشكل عشوائي، وليكن المتغير العشوائي X يمثل عدد الهواتف الخلوية التالفة والمطلوب:

1-حدد التوزيع الاحتمالي وقانون التوزيع الاحتمالي لهذا التوزيع.

2-حساب $E(X)$ و $V(X)$ و $\delta(X)$

التمرين الثالث:

نرمي قطعة نقدية غير متزنة ثلاث مرات بشكل مستقل وليكن المتغير العشوائي X يمثل عدد مرات ظهور الصورة في الرميات الثلاثة بحيث يعطى احتمال ظهور الصورة بـ 0,4 واحتمال ظهور الرقم بـ 0,6.والمطلوب:

1-أوجد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

2-أحسب الاحتمالات التالية:

أ-الحصول على صورتين.

ب-الحصول على صورتين على الأقل.

ج-الحصول على صورة واحدة على الأكثر.

د-الحصول على ثلاث أرقام.

3-احسب المتوسط والتباين والانحراف المعياري.

التمرين الرابع:

إذا كان متوسط عدد الوحدات التي تستهلكها أسرة ما من سلعة معينة خلال الشهر يساوي إلى 3 وحدات شهريا، وإذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من هذه السلعة خلال الشهر والمطلوب:

1-ما هو نوع المتغير العشوائي X ؟

2-أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

3-أحسب الاحتمالات التالية:

أ-أن تستهلك الأسرة وحدتين من هذه السلعة خلال الشهر.

ب- أن تستهلك الأسرة 3 وحدات على الأكثر من هذه السلعة خلال الشهر.

3- أحسب $E(X)$، $V(X)$، $\delta(X)$

التمرين الخامس:

إذا كان احتمال اصابة هدف ما خلال تجربة عشوائية هو 0,85 والمطلوب:

1–أكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

2–ما هو احتمال اصابة هذا الهدف في المحاولة الخامسة.

3– أحسب $E(X)$، $V(X)$، $\delta(X)$

التمرين السادس:

تتشكل عجينة من 3 عناصر من النوع- أ- و5 عناصر من النوع- **ب**–.سحبنا عينة عشوائية من أربعة عناصر من هذه العجينة، ليكن X عدد العناصر في العينة من النوع- أ- والمطلوب:

1-اكتب صيغة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائيX.

2- أحسب $E(X)$، $V(X)$، $\delta(X)$

التمرين السابع:

قدر متوسط الأجر الصافي الشهري بالجزائر خارج قطاع الفلاحة والإدارة بـ 41000 دج سنة 2018 وبانحراف معياري قدر بـ 5000 دج بفرض أن X متغير عشوائي يمثل أجر الأسر حيث X يتبع توزيعا طبيعيا عاديا والمطلوب:

أحسب الاحتمالات التالية:

أ-احتمال الحصول على دخل أكبر من 36000 دج.

ب-احتمال الحصول على دخل أقل من 51000 دج

ح-احتمال الحصول على دخل ينحصر بين 30000 دج و60000 دج .

قائمة المراجع

أولا/ المراجع باللغة العربية:

1- السعدي رجال، نظرية الاحتمالات: مبادئ الحساب الاحتمالي- دروس وتمارين، الجزء الأول، الطبعة الثالثة، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2008.

2- أمحمد معتوق، الإحصاء الرياضي والنماذج الإحصائية، ديوان المطبوعات الجامعية،الجزائر 2015.

3- أنيس إسماعيل كنجو، الإحصاء والاحتمالات، مكتبة العبيكان للنشر، الطبعة الأولى السعودية، 2000.

4- بو عبد الله صالح، الاحتمالات والإحصاء الرياضي، جامعة المسيلة ،2006.

5- ثائر فيصل شاهر، الإحصاء في العلوم الإدارية والمالية، الطبعة الأولى، دار الحامد، عمان، 2010.

6- جاسم محمد علي، الإحصاء باستخدام برنامج spss، مركز الكتاب الأكاديمي، العراق ، 1997.

7- جبار عبد مضحي، الإحصاء والاحتمالات، الطبعة الأولى، شركة دار الأكاديميون للنشر والتوزيع، عمان، 2016.

8- سامية تيلولت، الاحتمالات: دروس وتمارين مع الحلول للأعمال الموجهة، الطبعة الأولى، مطبعة دار الحديث للكتاب، الجزائر، 2016.

9- شوقي سيف النصر سيد وآخرون، الإحصاء في مجال الأعمال، كلية التجارة، جامعة القاهرة، 2017.

10- صبري عزام، الإحصاء الرياضي، الطبعة الأولى، دار صفاء للنشر والتوزيع، الأردن،2010.

11- عبد الله بن عبد الكريم الشيحة، مبادئ الإحصاء والاحتمالات، إدارة المطابع والنشر العلمي بجامعة الملك سعود،1428، السعودية.

12- فريدة همال، الإحصاء 2: دروس وتمارين تطبيقية، مطبوعة بيداغوجية موجهة لطلبة السنة الأولى جذع مشترك، جامعة الجزائر 3- الجزائر، 2022/2021.

13- كامل فليفل، فتحي حمدان، الإحصاء، دار المناهج، عمان، 2009.

14- كمال بوعظم، الإحصاء الاستدلالي من الجانب النظري والتطبيقي، الطبعة الأولى، دار زهران للنشر والتوزيع، الأردن، 2012.

15- كمال سلطان محمد سالم، الإحصاء الاحتمالي،الدار الجامعية، الطبعة الأولى، مصر، 2004.

16- محمد بداوي، الاحتمالات، دار هومة للنشر والتوزيع، الجزائر، 2017.

17- محمد صبحي أبو صالح، مبادئ الإحصاء، دار اليازوري للنشر والتوزيع، الأردن، 2007.

18- محمد عبد العالي النعيمي وحسن ياسين طعمة، الإحصاء التطبيقي، دار وائل للنشر والتوزيع،الطبعة الأولى، الأردن، 2008.

19- نوار الأسدي، مبادئ علم الإحصاء، مكتبة الإبداع الرقمية ، بدون تاريخ، العراق.

ثانيا/ المراجع باللغة الأجنبية:

14- Renée Veysseyre, statistique et probabilités, $2^{éme}$ édition Dunod, Paris, 2001.

الـــملاحق

جدول توزيع قانون ثنائي الحد

Table n° 3

LOI BINOMIALE – PROBABILITES CUMULEES

n	c	Probabilités cumulées $\Pr(k \leq c) = \sum_{k=0}^{k=c} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$									
		$p = 1\%$	$p = 2\%$	$p = 3\%$	$p = 4\%$	$p = 5\%$	$p = 6\%$	$p = 7\%$	$p = 8\%$	$p = 9\%$	$p = 10\%$
5	0	0,9510	0,9039	0,8587	0,8153	0,7738	0,7339	0,6957	0,6591	0,6240	0,5905
	1	0,9990	0,9962	0,9915	0,9852	0,9774	0,9681	0,9575	0,9456	0,9326	0,9185
	2	1	1	0,9997	0,9994	0,9988	0,9980	0,9969	0,9955	0,9937	0,9914
	3			1	1	1	1	0,9999	0,9998	0,9997	0,9995
	4							1	1	1	1
10	0	0,9044	0,8171	0,7374	0,6648	0,5987	0,5386	0,4840	0,4344	0,3894	0,3486
	1	0,9957	0,9838	0,9655	0,9418	0,9139	0,8824	0,8483	0,8121	0,7746	0,7361
	2	0,9999	0,9991	0,9972	0,9938	0,9885	0,9812	0,9717	0,9599	0,9460	0,9298
	3	1	1	0,9999	0,9996	0,9990	0,9980	0,9964	0,9942	0,9912	0,9872
	4			1	1	0,9999	0,9998	0,9997	0,9994	0,9990	0,9984
	5					1	1	1	1	0,9999	0,9999
	6									1	1
15	0	0,8601	0,7386	0,6333	0,5421	0,4633	0,3953	0,3367	0,2863	0,2430	0,2059
	1	0,9904	0,9647	0,9270	0,8809	0,8290	0,7738	0,7168	0,6597	0,6035	0,5490
	2	0,9996	0,9970	0,9906	0,9797	0,9638	0,9429	0,9171	0,8870	0,8531	0,8159
	3	1	0,9998	0,9992	0,9976	0,9945	0,9896	0,9825	0,9727	0,9601	0,9445
	4		1	0,9999	0,9998	0,9984	0,9986	0,9972	0,9950	0,9918	0,9873
	5			1	1	1	0,9999	0,9997	0,9993	0,9987	0,9978
	6						1	1	0,9999	0,9999	0,9997
	7								1	1	1
20	0	0,8179	0,6676	0,5438	0,4420	0,3585	0,2901	0,2342	0,1887	0,1516	0,1216
	1	0,9831	0,9401	0,8802	0,8103	0,7358	0,6605	0,5869	0,5169	0,4516	0,3917
	2	0,9990	0,9929	0,9790	0,9561	0,9245	0,8850	0,8390	0,7879	0,7334	0,6769
	3	1	0,9994	0,9973	0,9926	0,9841	0,9710	0,9529	0,9294	0,9007	0,8670
	4		1	0,9997	0,9990	0,9974	0,9944	0,9893	0,9817	0,9710	0,9568
	5			1	0,9999	0,9997	0,9991	0,9981	0,9962	0,9932	0,9887
	6				1	1	0,9999	0,9997	0,9994	0,9987	0,9976
	7						1	1	0,9999	0,9998	0,9996
	8								1	1	0,9999
	9										1
30	0	0,7397	0,5455	0,4010	0,2939	0,2146	0,1563	0,1134	0,0820	0,0591	0,0424
	1	0,9639	0,8794	0,7731	0,6612	0,5535	0,4555	0,3694	0,2958	0,2343	0,1837
	2	0,9967	0,9783	0,9399	0,8831	0,8122	0,7324	0,6488	0,5654	0,4855	0,4114
	3	0,9998	0,9971	0,9881	0,9694	0,9392	0,8974	0,8450	0,7842	0,7175	0,6474
	4	0,9999	0,9996	0,9982	0,9937	0,9844	0,9685	0,9447	0,9126	0,8723	0,8245
	5	1	1	0,9997	0,9989	0,9967	0,9921	0,9838	0,9707	0,9519	0,9268
	6			1	0,9999	0,9994	0,9983	0,9960	0,9918	0,9848	0,9742
	7				1	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980	0,9959	0,9922
	8					1	0,9999	0,9999	0,9996	0,9910	0,9980
	9						1	1	0,9999	0,9998	0,9995
	10								1	1	0,9999
	11										1

Table n° 3 *(suite)*

LOI BINOMIALE — PROBABILITES CUMULEES

Probabilités cumulées $\Pr(k \leqslant c) = \sum_{k=0}^{k=c} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

n	c	$p = 1\%$	$p = 2\%$	$p = 3\%$	$p = 4\%$	$p = 5\%$	$p = 6\%$	$p = 7\%$	$p = 8\%$	$p = 9\%$	$p = 10\%$
40	0	0,6690	0,4457	0,2957	0,1954	0,1285	0,0842	0,0549	0,0356	0,0230	0,0148
	1	0,9393	0,8095	0,6615	0,5210	0,3991	0,2990	0,2201	0,1594	0,1140	0,0805
	2	0,9925	0,9543	0,8822	0,7855	0,6767	0,5665	0,4625	0,3694	0,2894	0,2228
	3	0,9993	0,9918	0,9686	0,9252	0,8619	0,7827	0,6937	0,6007	0,5092	0,4231
	4	1	0,9988	0,9933	0,9790	0,9520	0,9104	0,8546	0,7868	0,7103	0,6290
	5		0,9999	0,9988	0,9951	0,9861	0,9691	0,9419	0,9033	0,8535	0,7937
	6		1	0,9998	0,9990	0,9966	0,9909	0,9801	0,9624	0,9361	0,9005
	7			1	0,9998	0,9993	0,9977	0,9942	0,9873	0,9758	0,9581
	8				1	0,9999	0,9995	0,9985	0,9963	0,9920	0,9845
	9					1	0,9999	0,9997	0,9990	0,9976	0,9949
	10						1	0,9999	0,9998	0,9994	0,9985
	11							1	1	0,9999	0,9996
	12									1	0,9999
	13										1
50	0	0,6050	0,3642	0,2181	0,1299	0,0769	0,0453	0,0266	0,0155	0,0090	0,0052
	1	0,9106	0,7358	0,5553	0,4005	0,2794	0,1900	0,1265	0,0827	0,0532	0,0338
	2	0,9862	0,9216	0,8106	0,6767	0,5405	0,4162	0,3108	0,2260	0,1605	0,1117
	3	0,9984	0,9822	0,9372	0,8609	0,7604	0,6473	0,5327	0,4253	0,3303	0,2503
	4	0,9999	0,9968	0,9832	0,9510	0,8964	0,8206	0,7290	0,6290	0,5277	0,4312
	5	1	0,9995	0,9963	0,9856	0,9622	0,9224	0,8650	0,7919	0,7072	0,6161
	6		0,9999	0,9993	0,9964	0,9882	0,9711	0,9417	0,8981	0,8404	0,7702
	7		1	0,9999	0,9992	0,9968	0,9906	0,9780	0,9562	0,9232	0,8779
	8			1	0,9999	0,9992	0,9973	0,9927	0,9834	0,9672	0,9421
	9				1	0,9998	0,9993	0,9978	0,9944	0,9875	0,9755
	10					1	0,9998	0,9994	0,9983	0,9957	0,9906
	11						1	0,9999	0,9995	0,9987	0,9968
	12							1	0,9999	0,9996	0,9990
	13								1	0,9999	0,9997
	14									1	0,9999
	15										1

جدول توزيع قانون بواسون

ملحق جداول التوزيعات الاحتمالية

Table n° 4

LOI DE POISSON – PROBABILITES CUMULEES

Probabilités cumulées $\Pr(k \leq c) = \sum_{k=0}^{k=c} e^{-m} \frac{m^k}{k!}$

c	$m = 0,1$	$m = 0,2$	$m = 0,3$	$m = 0,4$	$m = 0,5$	$m = 0,6$	$m = 0,7$	$m = 0,8$	$m = 0,9$
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,9953	0,9825	0,9631	0,9384	0,9098	0,8781	0,8442	0,8088	0,7725
2	0,9998	0,9988	0,9964	0,9920	0,9856	0,9769	0,9659	0,9526	0,9372
3	1	0,9999	0,9997	0,9992	0,9982	0,9966	0,9942	0,9909	0,9866
4		1	1	0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9986	0,9977
5				1	1	1	0,9999	0,9998	0,9997
6							1	1	1

Probabilités cumulées $\Pr(k \leq c) = \sum_{k=0}^{k=c} e^{-m} \frac{m^k}{k!}$

c	$m = 1,0$	$m = 1,5$	$m = 2,0$	$m = 2,5$	$m = 3,0$	$m = 3,5$	$m = 4,0$	$m = 4,5$	$m = 5,0$
0	0,3679	0,2231	0,1353	0,0821	0,0498	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067
1	0,7358	0,5578	0,4060	0,2873	0,1991	0,1359	0,0916	0,0611	0,0404
2	0,9197	0,8088	0,6767	0,5438	0,4232	0,3208	0,2381	0,1736	0,1247
3	0,9810	0,9344	0,8571	0,7576	0,6472	0,5366	0,4335	0,3423	0,2650
4	0,9963	0,9814	0,9473	0,8912	0,8153	0,7254	0,6288	0,5321	0,4405
5	0,9994	0,9955	0,9834	0,9579	0,9161	0,8576	0,7851	0,7029	0,6160
6	0,9999	0,9991	0,9955	0,9858	0,9665	0,9347	0,8893	0,8311	0,7622
7	1	0,9998	0,9989	0,9958	0,9881	0,9733	0,9489	0,9134	0,8666
8		1	0,9998	0,9989	0,9962	0,9901	0,9786	0,9597	0,9319
9			1	0,9997	0,9989	0,9967	0,9919	0,9829	0,9682
10				0,9999	0,9997	0,9990	0,9972	0,9933	0,9863
11				1	0,9999	0,9997	0,9991	0,9976	0,9945
12					1	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980
13						1	0,9999	0,9997	0,9993
14							1	0,9999	0,9998
15								1	0,9999
16									1

Table n° 4 *(suite)*

LOI DE POISSON — PROBABILITES CUMULEES

Probabilités cumulées $\Pr(k \leq c) = \sum_{k=0}^{k=c} e^{-m} \frac{m^k}{k!}$

c	$m = 5{,}5$	$m = 6{,}0$	$m = 6{,}5$	$m = 7{,}0$	$m = 7{,}5$	$m = 8{,}0$	$m = 8{,}5$	$m = 9{,}0$	$m = 9{,}5$
0	0,0041	0,0025	0,0015	0,0009	0,0006	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001
1	0,0266	0,0174	0,0113	0,0073	0,0047	0,0030	0,0019	0,0012	0,0008
2	0,0884	0,0620	0,0430	0,0296	0,0203	0,0138	0,0093	0,0062	0,0042
3	0,2017	0,1512	0,1118	0,0818	0,0591	0,0424	0,0301	0,0212	0,0149
4	0,3575	0,2851	0,2237	0,1730	0,1321	0,0996	0,0746	0,0550	0,0403
5	0,5289	0,4457	0,3690	0,3007	0,2414	0,1912	0,1496	0,1157	0,0885
6	0,6860	0,6063	0,5265	0,4497	0,3782	0,3134	0,2562	0,2068	0,1649
7	0,8095	0,7440	0,6728	0,5987	0,5246	0,4530	0,3856	0,3239	0,2687
8	0,9044	0,8472	0,7916	0,7291	0,6620	0,5925	0,5231	0,4557	0,3918
9	0,9462	0,9161	0,8774	0,8305	0,7764	0,7166	0,6530	0,5874	0,5218
10	0,9747	0,9574	0,9332	0,9015	0,8622	0,8159	0,7634	0,7060	0,6453
11	0,9890	0,9799	0,9661	0,9466	0,9208	0,8881	0,8487	0,8030	0,7520
12	0,9955	0,9912	0,9840	0,9730	0,9573	0,9362	0,9091	0,8758	0,8364
13	0,9983	0,9964	0,9929	0,9872	0,9784	0,9658	0,9486	0,9261	0,8981
14	0,9994	0,9986	0,9970	0,9943	0,9897	0,9827	0,9726	0,9585	0,9400
15	0,9998	0,9995	0,9988	0,9976	0,9954	0,9918	0,9862	0,9780	0,9665
16	0,9999	0,9998	0,9996	0,9990	0,9980	0,9963	0,9934	0,9889	0,9823
17	1	1	0,9998	0,9996	0,9992	0,9984	0,9970	0,9947	0,9911
18			1	0,9999	0,9997	0,9993	0,9987	0,9976	0,9957
19				1	0,9999	0,9997	0,9995	0,9989	0,9980
20					1	0,9999	0,9998	0,9996	0,9991
21						1	0,9999	0,9998	0,9996
22							1	0,9999	0,9998
23								1	0,9999
24									1

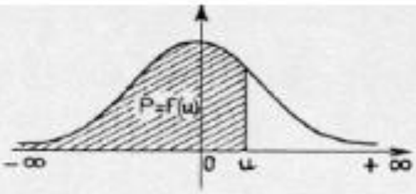
Table n° 4 *(suite)*

LOI DE POISSON – PROBABILITES CUMULEES

Probabilités cumulées $\Pr(k \leq c) = \sum_{k=0}^{k=c} e^{-m} \frac{m^k}{k!}$

c	m = 10	m = 11	m = 12	m = 13	m = 14	m = 15	m = 16	m = 17	m = 18
0									
1	0,0005	0,0002	0,0001						
2	0,0028	0,0012	0,0005	0,0002	0,0001				
3	0,0104	0,0049	0,0023	0,0010	0,0005	0,0002	0,0001		
4	0,0293	0,0151	0,0076	0,0037	0,0018	0,0009	0,0004	0,0002	0,0001
5	0,0671	0,0375	0,0203	0,0107	0,0055	0,0028	0,0014	0,0007	0,0003
6	0,1302	0,0786	0,0458	0,0259	0,0142	0,0076	0,0040	0,0021	0,0010
7	0,2203	0,1432	0,0895	0,0540	0,0316	0,0180	0,0100	0,0054	0,0029
8	0,3329	0,2320	0,1550	0,0997	0,0620	0,0374	0,0220	0,0126	0,0071
9	0,4580	0,3405	0,2424	0,1658	0,1093	0,0698	0,0433	0,0261	0,0154
10	0,5831	0,4599	0,3472	0,2517	0,1756	0,1184	0,0774	0,0491	0,0304
11	0,6968	0,5793	0,4616	0,3532	0,2600	0,1847	0,1270	0,0847	0,0549
12	0,7916	0,6887	0,5760	0,4631	0,3584	0,2676	0,1931	0,1350	0,0917
13	0,8645	0,7813	0,6816	0,5730	0,4644	0,3622	0,2745	0,2009	0,1426
14	0,9166	0,8541	0,7721	0,6751	0,5704	0,4656	0,3675	0,2808	0,2081
15	0,9513	0,9075	0,8445	0,7636	0,6693	0,5680	0,4667	0,3714	0,2867
16	0,9730	0,9442	0,8988	0,8355	0,7559	0,6640	0,5659	0,4677	0,3750
17	0,9857	0,9679	0,9371	0,8905	0,8272	0,7487	0,6593	0,5440	0,4686
18	0,9928	0,9824	0,9626	0,9302	0,8826	0,8193	0,7423	0,6550	0,5622
19	0,9965	0,9908	0,9787	0,9574	0,9235	0,8751	0,8122	0,7363	0,6509
20	0,9984	0,9954	0,9884	0,9751	0,9521	0,9169	0,8681	0,8055	0,7307
21	0,9993	0,9978	0,9939	0,9860	0,9712	0,9468	0,9107	0,8615	0,7991
22	0,9997	0,9990	0,9969	0,9925	0,9833	0,9672	0,9617	0,9048	0,8551
23	0,9999	0,9996	0,9985	0,9962	0,9907	0,9805	0,9633	0,9367	0,8989
24	1	0,9999	0,9993	0,9982	0,9950	0,9888	0,9777	0,9593	0,9313
25		1	0,9997	0,9992	0,9974	0,9938	0,9869	0,9748	0,9554
26			0,9999	0,9997	0,9987	0,9967	0,9926	0,9848	0,9718
27			1	0,9999	0,9994	0,9983	0,9960	0,9912	0,9827
28				1	0,9997	0,9992	0,9979	0,9950	0,9897
29					0,9999	0,9996	0,9989	0,9973	0,9941
30					1	0,9998	0,9995	0,9986	0,9967
31						0,9999	0,9998	0,9993	0,9982
32						1	0,9999	0,9996	0,9990
33							1	0,9998	0,9995
34								0,9999	0,9998
35								1	0,9999
36									1

جدول التوزيع الطبيعي المعياري



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de u

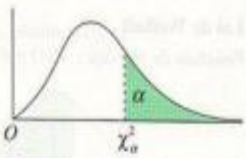
u	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
F(u)	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

جدول توزيع كاي مربع

Table de distribution de χ^2 (loi de K. Pearson)

La table donne la probabilité α, en fonction du nombre de degrés de liberté ν, pour que χ^2 égale ou dépasse une valeur donnée χ^2_α.

$$\alpha = P(\chi^2 \geq \chi^2_\alpha)$$



ν	$\alpha = 0{,}990$	$\alpha = 0{,}975$	$\alpha = 0{,}950$	$\alpha = 0{,}900$	$\alpha = 0{,}100$	$\alpha = 0{,}050$	$\alpha = 0{,}025$	$\alpha = 0{,}010$	$\alpha = 0{,}001$
1	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	10,83
2	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	13,82
3	0,12	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	16,27
4	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	18,47
5	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	20,52
6	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	22,46
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,47	24,32
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	26,13
9	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	27,88
10	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	29,59
11	3,05	3,82	4,57	5,58	17,27	19,67	21,92	24,72	31,26
12	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	32,91
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	34,53
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	36,12
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	37,70
16	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,84	32,00	39,25
17	6,41	7,56	8,67	10,08	24,77	27,59	30,19	33,41	40,79
18	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,80	42,31
19	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	43,82
20	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	45,32
21	8,90	10,28	11,59	13,24	29,61	32,67	35,48	38,93	46,80
22	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	48,27
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	49,73
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,41	39,37	42,98	51,18
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	52,62
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,88	41,92	45,64	54,05
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	55,48
28	13,57	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	56,89
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	58,30
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	59,70

Quand ν est supérieur à 30, on utilise la table de la loi normale (table de l'écart réduit) avec :

$$t = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1}$$