مقياس : الإحصاء الاستدلالي والرياضي

المستوى : السنة الثانية ليسانس

تخصص : علم الاجتماع

عنوان المحاضرة

الانحدار الخطي البسيط

تمهيد

يعد الانحدار من المواضيع الاساسية وجزءاً مهماً من النظرية الاحصائية، ويتميز الانحدار باستخداماته الواسعة في مختلف العلوم الطبيعية والادارية والاقتصادية، فعلى سبيل المثال لا الحصر، في المجال الاقتصادي، يُعد الانحدار الاداة العلمية التحليلية في الاقتصاد الكلي التحليلي، والقياس الاقتصادي، إذ يمكن استخدامه للتعبير عن العلاقات التي تربط المتغيرات الاقتصادية فيما بينها، بصيغة نماذج رياضية يطلق عليها بـ نماذج الانحدار، ومن ثم تقدير معلمات هذه النماذج، واعتمادها لاغراض عملية التنبؤ بأحد المتغيرات باعتباره متغيراً تابعاً عند مستويات محددة لمتغيرات اخرى يطلق عليها بالمتغيرات المستقلة.

اولا : الانحدار الخطي البسيط

يعرف الانحدار بشكل عام على انه أسلوب رياضي لتقدير العلاقة بين المتغيرات ، بدلالة وحدات قياس المتغيرات التابعة في العلاقة ، والتي تسمى غالبا بنماذج الانحدار ، حيث ينقسم الانحدار من حيث التحليل الى : انحدار خطي وانحدار غير خطي .

الانحدار الخطي : تقدير العلاقة الرياضية بين متغيرين او اكثر ويكون الانحدار الخطي على نوعين اساسين هما :

انحدار خطي بسيط : تقدير العلاقة بين متغيرين (تابع ومستقل فقط)

انحدار خطي متعدد : تقدير العلاقة بين متغير تابع وعدة متغيرات مستقلة.

ثانيا : شروط حساب نموذج الانحدار الخطي البسيط

طبيعة المتغيرات يجب ان تكون كمية

المتغيرات تتبع التوزيع الطبيعي

المتغيرات تم سحبها عن طريق عينة عشوائية

العلاقة بين المتغيرات يجب ان تكون خطية

ثالثا : معادلة تقدير الانحدار الخطي البسيط

تقدير معادلة انحراف المتغير y (تابع) على المتغير x(مستقل) تكون على الشكل التالي في المجتمع الاحصائي :

$$\hat{y}i = \alpha + \beta xi$$

نقوم بحساب الانحدار بين المتغيرات في الغالب بناءا على العينة وليس في المجتمع الاحصائي ككل ، لذا نقوم بتعويض قيم معادلة الانحدار الخطي في مجتمع احصائي بقيم الانحدار الخطي في العينة ،

لتصبح معادلة الانحدار الخطي البسيط بين متغيرين على النحو التالي :

$$\hat{Y}i = a + bxi + ei$$

حيث تمثل :

Ŷi: المتغير التابع

a: ثابت الانحدار ، حيث يمكن حساب قيمة a عن طريق المعادلة التالية:

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

b: معامل الانحدار ، حيث يمكن حسابه وفق المعادلة التالية:

$$b = \frac{Sxy}{Sxx}$$

حيث ان قيم كل من :

$$Sxy = \sum xy - n\bar{x}\bar{y}$$

$$Sxx = \sum x^2 - n\bar{x}^2$$

xi: المتغير المستقل

ei: الأخطاء العشوائية (البواقي) في معادلة تقدير الانحدار

رابعا : مثال تطبيقي

نريد دراسة العلاقة بين عدد السنوات التي يقضيها السجين والجرائم التي يرتكبها بعد الافراد عنه ،

حيث يمثل الجدول التالي البيانات الخاصة بالمتغيرين

السنوات x	01	02	04	05	06	08
الجرائم المرتكبة y	02	03	05	07	08	13

1- تقدير معادلة الانحدار

$$yi = a + bxi + ei$$

أولا : نقوم بحساب معامل الانحدار b

$$b = \frac{Sxy}{Sxx}$$

بداية ، يجب حساب المتوسطات الحسابية لكل من متغير السعر x ومتغير السلع y

1- حساب متوسط السنوات x

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{26}{6}$$

$$\bar{x} = 4.33$$

2- حساب متوسط عدد الجرائم y

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{38}{6}$$

$$\bar{y} = 6.33$$

بعد حساب المتوسطات نقوم بتشكيل جدول التو افق التالي :

x	y	x.y	x^2	y^2
01	02	01*02 = 02	01^2 = 01	02^2=04
02	03	02*03= 06	02^2 = 04	03^2=09
04	05	04*05= 20	04^2=16	05^2=25
05	07	05* 07 = 35	05^2=25	07^2=49
06	08	06* 08 = 48	06^2=36	08^2=64
08	13	08*13= 104	08^2=64	13^2=169
$\bar{x} = 4.33$	$\bar{y} = 6.33$	$\sum x.y = 215$	$\sum x^2 = 146$	$\sum y^2 = 320$

بعد ذلك نقوم بتعويض المجاميع في القانون لحساب معامل الانحدار b

$$b = \frac{Sxy}{Sxx}$$

1- حساب قيمة Sxy

$$Sxy = \sum xy - n\bar{x}\bar{y}$$

$$Sxy = 215 - 6(4.33 * 6.33)$$

$$Sxy = 215 - 6 * (27.40)$$

$$Sxy = 50.6$$

2- حساب قيمة Sxx

$$Sxx = \sum x^2 - n\bar{x}^2$$

$$Sxx = 146 - 6 * (4.33)^2$$

$$Sxx = 146 - 6 * (18.74)$$

$$Sxx = 33.56$$

بعد ذلك ، نقوم بتعويض كل من قيمة Sxy وقيمة Sxx في قانون معامل الانحدار

$$b = \frac{Sxy}{Sxx}$$

$$b = \frac{50.6}{33.56}$$

$$b = 1.50$$

ثانيا : حساب ثابت الانحدار a

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$a = 6.33 - 1.50 * (4.33)$$

$$a = 6.33 - 6.49$$

$$a = -0.16$$

بعد حساب كل من قيمة معامل الانحدار b و ثابت الانحدار a نتحصل على معادلة نموذج الانحدار للعلاقة بين متغير سنوات السجن وعدد الجرائم المرتكبة على النحو التالي :

$$\boldsymbol{yi = -0.16 + 1.5xi + ei}$$

ملاحظة :

قيمة معامل الانحدار b موجبة (1.5) بمعنى ان العلاقة الارتباطية بين السنوات وعدد الجرائم المرتكبة علاقة طردية كلما زادت عدد السنوات داخل السجن زاد عدد الجرائم المرتكبة بعد الافراج .

يمكن القول ان كل زيادة في عدد السنوات داخل السجن تقابلها زيادة في عدد الجرائم المرتكبة بمقدار 1.5 .

قيمة b موجبة	علاقة طردية ، زيادة قيم المتغير المستقل يقابلها زيادة قيم المتغير التابع بمقدار b
قيمة b سالبة	علاقة عكسية ، زيادة قيم المتغير المستقل يقابها نقصان قيم المتغير التابع بمقدار b
قيمة b= 0	لا توجد علاقة بين المتغيرين

خامسا : حساب معامل التحديد R^2

يستخدم معامل التحديد بشكل عام لتقرير ما تفسره المتغيرات المستقلة التي تطرأ على قيم المتغير التابع ، ويطلق أحيانا على معامل التحديد معامل التفسير ، وبناءا على ذلك يعرف معامل التحديد على انه مؤشر احصائي يوضح مقدار ما يفسره المتغير المستقل من تغير في المتغير التابع ، كما ان قيمة معامل التحديد تتراوح بين 0 و 1 ، حيث يمكن حساب قيمة معامل الارتباط وفق القانون التالي :

$$R^2 = \frac{S^2\, xy}{Sxx * Syy}$$

بناءا على معطيات التطبيق السابق ، (انظر جدول التوافق)

لدينا كل من قيم Sxy و Sxx ، نقوم بحساب قيمة Syy وفق القانون التالي :

$$Syy = \sum y^2 - n\bar{y}^2$$

بتعويض القيم في القانون نجد :

$$Syy = 320 - 6 * (40.06)$$

$$Syy = 320 - 240.36$$

$$Syy = 79.64$$

نقوم بتعويض القيم في قانون معامل R^2 ، حيث نجد :

$$R^2 = \frac{50.6^2}{33.56 * 79.64}$$

$$R^2 = \frac{2560.36}{2672.71}$$

$$R^2 = 0.95$$

التفسير

بناءا على قيمة معامل التحديد التي تساوي 0.95 (0.95 *100 = 95%) ، يمكن القول ان المتغير المستقل يؤثر في المتغير التابع بنسبة 95% ، في حين 05 % المتبقية ترجع الى أخطاء عشوائية او الى متغيرات لم تدرج في الدراسة.