

## Des exemples sur Plans Factoriels Fractionnaires $2^{k-q}$

**Exemple 1 :  $2^{3-1}$  avec  $3=1*2$  et Plan de base  $2^2$**

N	I	1	2	3=12		Y exp
1	1	-1	-1	1		45
2	1	1	-1	-1		51
3	1	-1	1	-1		25
4	1	1	1	1		43
Contrastes	$l_0$	$l_1$	$l_2$	$l_3$		
	<b>41</b>	<b>6</b>	<b>-7</b>	<b>3</b>		

- 1- Donner la relation d'équivalence
- 2- Dédire le Générateur d'alias I.
- 3- Dédire les effets aliasés ?
- 4- Calculer tous les contrastes

### Nouvelles hypothèses d'interprétation

Pour analyser les résultats d'un plan fractionnaire, l'hypothèse 1 doit être complétée par de nouvelles hypothèses :

- **Hypothèse 1** – Les interactions d'ordre trois et toutes celles d'ordre plus élevé peuvent être négligées.
- **Hypothèse 2** – Tous les coefficients aliasés dans un contraste faible (négligeable) sont eux-mêmes faibles (négligeables).
- **Hypothèse 3** – Si deux contrastes sont forts, on se méfiera de leur interaction qui peut être forte.
- **Hypothèse 4** – Si deux contrastes sont faibles, on suppose que leur interaction l'est aussi.

### Exemple 2 : $2^{4-1}$

N	I	1	2	3	4	Y exp
1	1	-1	-1	-1	1	y1
2	1	1	-1	-1	-1	y2
3	1	-1	1	-1	-1	y3
4	1	1	1	-1	1	y4
5	1	-1	-1	1	1	y5
6	1	1	-1	1	-1	y6
7	1	-1	1	1	-1	y7
8	1	1	1	1	1	y8
Contrastes	$l_0$	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_4$	

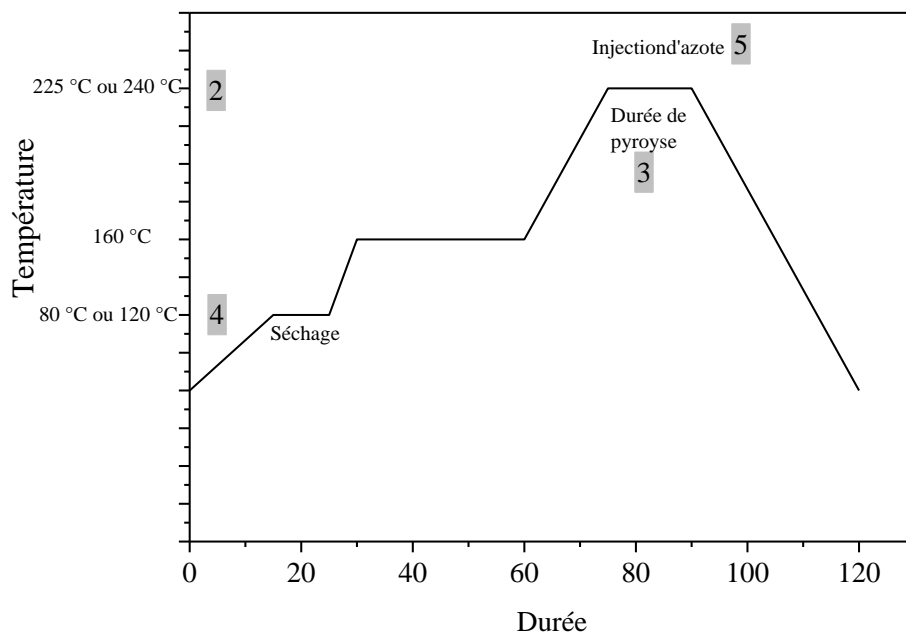
- 1- Donner la relation d'équivalence et le plan de base.
- 2- Dédire le Générateur d'alias I.
- 3- Dédire tous les effets aliasés ?

### Exemple 3 Amélioration du bois : Plan de base 2<sup>3</sup>

#### Description de l'étude

Le bois est un matériau de construction qui présente de nombreux avantages : il est léger, facile à traiter et du plus bel effet. Ses défauts sont généralement combattus par des traitements chimiques qui le rendent imputrescible et qui diminuent sa sensibilité à l'humidité. Des chercheurs ont amélioré les propriétés des bois européens à croissance rapide (sapin, pin maritime, peuplier, hêtre etc.) par un traitement thermique. Le procédé qu'ils ont mis au point s'appelle la *sétification*. C'est un procédé en deux étapes, une première étape de séchage et une seconde de pyrolyse ménagée à faible température. Au cours de ce traitement les hémicelluloses sont craquées, ce qui le rend bois moins sensible à l'humidité. Si les températures sont bien choisies, les produits de ce craquage réagissent avec la ligne du bois et améliorent encore sa stabilité dimensionnelle et sa résistance aux attaques des insectes.

Dans un for spécialement conçu pour effectuer les traitements thermiques, on sèche d'abord le bois à 20 à 120 °C, puis on le chauffe à 160 °C pendant 2h. Enfin on réalise la pyrolyse ménagée soit à 225 °C, soit à 240 °C pendant un temps pouvant durée de 5 à 15 minutes pour éviter endommager le bois, on injecte habituellement de l'azote pendant le refroidissement. La présente étude porte sur le 2 types de bois sapin et le pin maritime.



**Figure :** Schéma du traitement thermique.

#### L'objectif de l'étude :

L'objectif de l'étude est de trouver les conditions de traitement qui rendent le bois le plus solide et moins sensible à l'humidité.

**La réponse** est de mesurer la résistance mécanique de bois pour cela on prépare les échantillons parallélépipédiques de bois traité et on mesure le module de rupture en réflexion (Norme NF B51-008). Cette réponse mesure la solidité de bois.

#### Domaine d'étude :

Le tableau suivant rassemble les facteurs et les niveaux qui ont été choisis.

Facteur	Niveau -1	Niveau +1
Espèce -1	Sapin	Pin
Température de pyrolyse- 2	225 °C	240 °C
Durée de pyrolyse-3	5 min	15 min
Température de séchage -4	80 °C	120 °C
Injection d'azote -5	Avant pyrolyse	Après pyrolyse

Le tableau d'expérimentation est le suivant

N	I	1	2	3	4	5	Y exp
1	1	-1	-1	-1	-1	1	81,1
2	1	1	-1	-1	1	-1	75,2
3	1	-1	1	-1	1	1	62,4
4	1	1	1	-1	-1	-1	65,3
5	1	-1	-1	1	1	-1	77,8
6	1	1	-1	1	-1	1	63,6
7	1	-1	1	1	-1	-1	76,2
8	1	1	1	1	1	1	48,2

- 1- Donner les relations d'équivalence
- 2- Dédurre les Générateurs d'alias I (indépendants et dépendants).
- 3- Dédurre tous les effets aliasés possibles ?
- 4- Calculer tous les contrastes.

### Solution

Selon le tableau d'expérimentation, les relations d'équivalence **4=123** et **5=13**.

Il sera donc essentiel de trouver deux générateurs

**4\*4=4\*123** et **5\*5=5\*13**. → **I=1234** (via de 4) et **I=135** (via de 5).

Sont appelés **générateurs indépendants** et leurs produits **I=I\*I=1234\*135**

**I=245** est appelé **générateur dépendant**

Générateur Global d'Alias (GGA) **I=1234=135=245** Pour connaître le nombre de Générateurs, on applique la loi suivante :

$$\frac{\text{nombre d'expériences de PFC}}{\text{nombre d'expériences de PFF}} - 1 = \frac{2^k}{2^{k-q}} - 1$$

Dans notre cas k=5 et q=2

$$\frac{\text{nombre d'expériences de PFC}}{\text{nombre d'expériences de PFF}} - 1 = \frac{2^5}{2^{5-2}} - 1 = 4 - 1 = 3 \text{ Générateurs}$$

## Les calculs des contrastes

N	I	1	2	3	4	5	12	14	Y exp
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	81,1
2	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	75,2
3	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	62,4
4	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	65,3
5	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	77,8
6	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	63,6
7	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	76,2
8	1	1	1	1	1	1	1	1	48,2
<b>Contrastes</b>	$l_0$	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_4$	$l_5$	$l_{12}$	$l_{14}$	
	<b>68,725</b>	<b>-5,65</b>	<b>-5,7</b>	<b>-2,275</b>	<b>-2,825</b>	<b>-4,9</b>	<b>-0,625</b>	<b>1,45</b>	

- Selon les hypothèses de PFF pour la simplification des coefficients (a été faite en cours en détaille). On résume les résultats finaux

$$\left[ \begin{array}{l} l_0 = a_0 = 68,725 \\ l_1 = a_1 + a_{35} = -5,65 \\ l_2 = a_2 + a_{45} = -5,7 \\ l_3 = a_3 + a_{15} = -2,275 \\ l_4 = a_4 + a_{25} = -2,825 \\ l_5 = a_5 + a_{13} + a_{24} = -4,9 \\ l_{12} = a_{12} + a_{34} = -0,625 \\ l_{14} = a_{14} + a_{23} = 1,45 \end{array} \right]$$

## Désaliaser les facteurs aliasés

### Exemple 5 : 2<sup>5-2</sup> (suite de l'exemple 3)

Ce que l'on veut, ce sont les coefficients seuls, c'est-à-dire non aliasés. Il faut désaliaser les contrastes. Pour cela, on recherche le plan qui va nous fournir des équations permettant de trouver séparément chacun des coefficients. Nous considérons le contraste  $l_1$ . Si nous trouvons un plan nous permettant de connaître la valeur du contraste  $l_1'$

Lorsqu'on désire savoir les coefficients ( $a_i$  ou  $a_{ij}$ ) de chaque contraste, il faut passer par des essais supplémentaire (plan complémentaire).  $l_1 = a_1 + a_{35}$   $l_1' = a_1 - a_{35}$

**Tableau** : résultats des plans initial et complémentaire

N	I	1	2	3	4	5=- 13	Y exp
9	1	-1	-1	-1	-1	-1	86,3
10	1	1	-1	-1	1	1	60,9
11	1	-1	1	-1	1	-1	67,6
12	1	1	1	-1	-1	1	51
13	1	-1	-1	1	1	1	72,5
14	1	1	-1	1	-1	-1	78
15	1	-1	1	1	-1	1	71
16	1	1	1	1	1	-1	62,5

En additionnant le contraste du plan initial et celui du plan complémentaire, nous pourrions obtenir séparément les deux coefficients. En effet, on a :

$$a_1 = \frac{(l_1 + l_1')}{2} \qquad a_{35} = \frac{(l_1 - l_1')}{2}$$

- 1- Donner les nouvelles relations d'équivalence
- 2- Dédire les nouveaux générateurs d'alias I (indépendants et dépendants).
- 3- Dédire tous les effets aliasés possibles ?
- 4- Calculer les nouveaux contrastes.

**Solution**

Les nouvelles relations d'équivalence :

Selon le tableau d'expérimentation, les relations d'équivalence **4=123** et **5=-13**.

Deux générateurs indépendants **I=1234 (via de 4)** et **I=-135 (via de 5)**.

Leurs produits **I\*I=1234\*- 135=-245** (générateur dépendant)

GGA **I=1234=-135=-245**.

N	I	1	2	3	4	5=-13	12	14	Y exp
9	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	86,3
10	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	60,9
11	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	67,6
12	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	51
13	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	72,5
14	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	78
15	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	71
16	1	1	1	1	1	-1	1	1	62,5
Contrastes	$l'_0$	$l'_1$	$l'_2$	$l'_3$	$l'_4$	$l'_5$	$l'_{12}$	$l'_{14}$	
	<b>68,725</b>	<b>-5,625</b>	<b>-5,7</b>	<b>2,275</b>	<b>-2,85</b>	<b>-4,875</b>	<b>-0,65</b>	<b>1,45</b>	

De même manière précédente, on obtient les contrastes en fonction des coefficients.

$$\begin{aligned}
 l'_0 &= a_0 = 68,725 \\
 l'_1 &= a_1 - a_{35} = -5,625 \\
 l'_2 &= a_2 - a_{45} = -5,7 \\
 l'_3 &= a_3 - a_{15} = 2,275 \\
 l'_4 &= a_4 - a_{25} = -2,85 \\
 l'_5 &= a_5 - a_{13} - a_{24} = -4,875 \\
 l'_{12} &= a_{12} + a_{34} = -0,65 \\
 l'_{14} &= a_{14} + a_{23} = 1,45
 \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{array}{l} l_0 = a_0 = 68,725 \\ l_1 = a_1 + a_{35} = -5,65 \\ l_2 = a_2 + a_{45} = -5,7 \\ l_3 = a_3 + a_{15} = -2,275 \\ l_4 = a_4 + a_{25} = -2,825 \\ l_5 = a_5 + a_{13} + a_{24} = -4,9 \\ l_{12} = a_{12} + a_{34} = -0,625 \\ l_{14} = a_{14} + a_{23} = 1,45 \end{array} \right] \quad \left[ \begin{array}{l} l'_0 = a_0 = 68,725 \\ l'_1 = a_1 - a_{35} = -5,625 \\ l'_2 = a_2 - a_{45} = -5,7 \\ l'_3 = a_3 - a_{15} = 2,275 \\ l'_4 = a_4 - a_{25} = -2,85 \\ l'_5 = a_5 - a_{13} - a_{24} = -4,875 \\ l'_{12} = a_{12} + a_{34} = -0,65 \\ l'_{14} = a_{14} + a_{23} = 1,45 \end{array} \right]$$

$$a_0 = 68,725$$

$$a_1 = \frac{(l_1 + l'_1)}{2} = -5,6375$$

$$a_{35} = \frac{(l_1 - l'_1)}{2} = -0,0125$$

$$a_2 = \frac{(l_2 + l'_2)}{2} = -5,7000$$

$$a_{45} = \frac{(l_2 - l'_2)}{2} = 0$$

$$a_3 = \frac{(l_3 + l'_3)}{2} = 0$$

$$a_{15} = \frac{(l_3 - l'_3)}{2} = -2,2750$$

$$a_4 = \frac{(l_4 + l'_4)}{2} = -2,8375$$

$$a_{25} = \frac{(l_4 - l'_4)}{2} = 0,0125$$

$$a_5 = \frac{(l_5 + l'_5)}{2} = -4,8875 \quad , \quad a_{13} \text{ et } a_{24} \text{ impossibles}$$

$a_{12}$ ,  $a_{34}$ ,  $a_{14}$  et  $a_{23}$  c'est impossible de trouver ces valeurs. Si on considère selon les hypothèses de PFF (hypothèse 2), la valeur plus faible est -0,625 /ou -0,65, donc  $a_{12}$  et  $a_{34}$  sont négligeables.

Mais, lorsqu'on s'intéresse les vraies valeurs de ces coefficients, il faut passer une nouvelle méthode de désaliaser un des contrastes.

**D'autres méthode supplémentaire pour déterminer les coefficients du modèle ( $a_i, a_{ij}$ ), cette méthode sera discutée lors de la réalisation de TP2 (PFF)**

N	I	1	2	3	4	5	12	14	13	15	23	24	25	34	35	45	Y exp
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	<b>81,1</b>
2	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	<b>75,2</b>
3	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	<b>62,4</b>
4	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	<b>65,3</b>
5	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	<b>77,8</b>
6	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	<b>63,6</b>
7	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	<b>76,2</b>
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	<b>48,2</b>
9	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	<b>86,3</b>
10	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	<b>60,9</b>
11	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	<b>67,6</b>
12	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	<b>51</b>
13	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	<b>72,5</b>
14	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	<b>78</b>
15	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	<b>71</b>
16	1	1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	<b>62,5</b>
coeff	<b>a0</b>	<b>a1</b>	<b>a2</b>	<b>a3</b>	<b>a4</b>	<b>a5</b>	<b>a12</b>	<b>a14</b>	<b>a13</b>	<b>a15</b>	<b>a23</b>	<b>a24</b>	<b>a25</b>	<b>a34</b>	<b>a35</b>	<b>a45</b>	
	68,725	-5,6375	-5,7	0	-2,8375	-4,8875	-0,6375	1,45	-0,0125	-2,275	1,45	-0,0125	0,0125	-0,6375	-0,0125	0	

## Exemple de Cours +de TP : Le spectrofluorimètre avec désaliaser les facteurs

### Description de l'étude

Le benzopyrène est un produit catalogué comme cancérigène. Sa teneur dans les huiles lubrifiantes doit être inférieure à des quantités infinitésimales. Son analyse est donc délicate et nécessite des moyens importants. Les spécialistes chargés de mettre au point la méthode de dosage ont choisi la spectrofluorimétrie. La figure 1 présente le schéma de l'appareil : un faisceau lumineux issu d'une lampe à xénon tombe sur un premier monochromateur. La lumière est diffractée. Une lumière de longueur d'onde bien définie ressort du monochromateur en passant par une fente, la fente d'excitation. Ce rayon tombe sur l'échantillon qui en absorbe une partie et réémet dans toutes les directions une lumière de fluorescence. Cette lumière doit être analysée. Elle passe donc dans un deuxième monochromateur qui la résout en différentes longueurs d'onde. Puis elle ressort en passant à travers une fente, la fente d'émission, et elle est détectée par un photomultiplicateur. Enfin, le spectre correspondant est enregistré par un appareil muni d'un photomultiplicateur. La longueur d'onde d'un des pics du spectre est caractéristique du benzopyrène. Ce pic est situé à 481 nm et sa hauteur est proportionnelle à la concentration du benzopyrène. L'objectif de l'étude est d'obtenir un spectre de bonne qualité permettant de faire un dosage quantitatif du benzopyrène. Pour cela il faut que la hauteur du pic à 481 nm soit la plus élevée possible, il faut aussi que le petit pic situé à 489 nm soit bien détaché du pic à 481 nm (Figure 1). Enfin, le bruit de fond ne doit pas cacher le pic du benzopyrène à 481 nm quand la teneur est faible et que ce pic est petit. Un tel appareil nécessite des réglages très fins pour que la concentration en benzopyrène soit déterminée avec fiabilité et précision.

### Réponses

Les expérimentateurs ont défini trois réponses

- la sensibilité (A) évaluée par la hauteur du pic situé à 481 nm ;
- le bruit de fond (B) évalué par la distance entre l'enveloppe inférieure et l'enveloppe supérieure de la courbe d'enregistrement aux basses longueurs d'onde ;
- la sélectivité (C) évaluée par la largeur à mi-hauteur du pic à 481 nm.

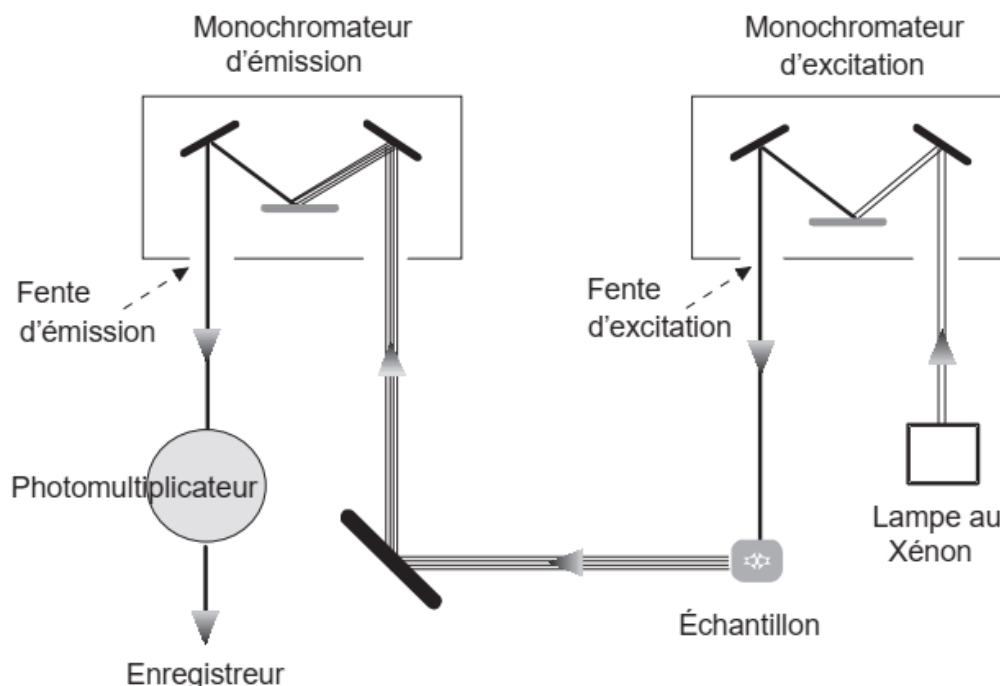
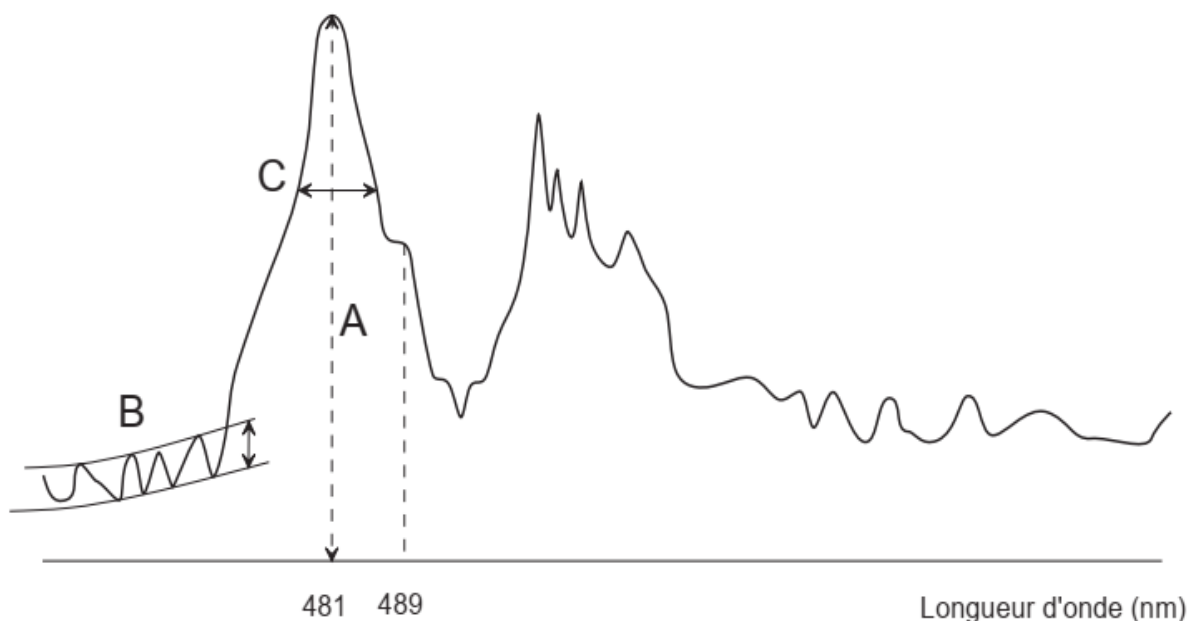


Figure 1 : Schéma d'un spectrofluorimètre

Les réponses A et B sont exprimées en densité optique.



**Figure 2 :** Définition des réponses sur le spectre d'enregistrement : sensibilité (A), bruit de fond (B) et sélectivité (C).

### Objectif de l'étude

Les cibles visées pour chacune des réponses sont les suivantes :

- Sensibilité : la hauteur du pic à 481 nm doit être la plus élevée possible.
- Sélectivité : la largeur à mi-hauteur du pic à 481 nm doit être la plus faible possible.
- Bruit de fond : la distance entre les enveloppes inférieure et supérieure doit être la plus faible possible.

### Facteurs et domaine d'étude

D'après les experts en spectrofluorimétrie, sept facteurs peuvent modifier les réponses choisies :

- Facteur 1 : largeur de la fente d'excitation.
- Facteur 2 : largeur de la fente d'émission.
- Facteur 3 : température de l'échantillon.
- Facteur 4 : vitesse de balayage.
- Facteur 5 : gain de l'appareil.
- Facteur 6 : tension du photomultiplicateur.
- Facteur 7 : amortissement de la plume d'enregistrement.

**Tableau 1 :** Domaine d'étude.

Facteurs	Niveau -1	Niveau +1
Fente d'excitation (1)	2,5 nm	7,5 nm
Fente d'émission (2)	2,5 nm	7,5 nm
Température (3)	20 °C	40 °C
Vitesse balayage (4)	20	100
Gain (5)	1	10
Tension (6)	310 V	460 V
Amortissement (7)	2	4

## Modélisation mathématique

On cherche les facteurs influents et leurs sens de variation ainsi que les interactions d'ordre 2. Le modèle mathématique choisi a priori est un modèle polynomial classique du premier degré avec les interactions d'ordre 2. Ce modèle mathématique comporte 29 coefficients.

**Choix du plan d'expériences** Avec 8 expériences, on peut déterminer 8 inconnues, c'est-à-dire 8 contrastes. Pour gagner notre pari, il faut que, pour chaque réponse, on puisse déterminer sans ambiguïtés les coefficients importants. Si ce n'est pas le cas, on risque d'avoir un plan complémentaire à effectuer. On aliase le premier facteur supplémentaire, le facteur 4, sur l'interaction 123 du plan de base 23. On peut écrire en notation de Box :

$$4 = 123$$

$$\text{Puis, on aliase les facteurs suivants ainsi : } 5 = 12 \quad 6 = 23 \quad 7 = 13$$

## Réalisation des essais

Les essais sont réalisés en accord avec le plan d'expériences et les résultats sont notés dans le tableau 2.

**Tableau 2 : Réponses du plan initial.**

Essai n°	Sensibilité	Sélectivité	Bruit de fond
1	1,22	5,5	-1,47
2	0,9	9	-1,47
3	5,33	20	2,3
4	5,64	12	-0,69
5	3,89	7,5	0,69
6	3,88	8	0,4
7	2,82	13	0,26
8	2,33	23	-3,91

Soit le plan fractionnaire suivant : Dans ce cas-là, l'expérimentateur a suivi trois réponses simultanément.

Les résultats obtenus sont dressés dans le tableau suivant :

Avec les confusions suivantes :  $4=123$  ;  $5=12$  ;  $6=23$  ;  $7=13$

N°	I	1	2	3	4=123	5=12	6=23	7=13	Y1	Y2	Y3
1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	1,22	5,5	-1,47
2	+1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	-1	0,9	9	-1,47
3	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	5,33	20	2,3
4	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	5,64	12	-0,69
5	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	3,89	7,5	0,69
6	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	3,88	8	0,4
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	2,82	13	0,26
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	2,33	23	-3,91

Le générateur d'alias s'obtient en prenant d'abord les 4 générateurs indépendants :

$$4 = 123$$

$$5 = 12$$

$$6 = 23$$

$$7 = 13$$

$$I = 1234$$

$$I = 125$$

$$I = 236$$

$$I = 137$$

### Confusions

Les quatre générateurs d'alias indépendants  $I = 1234 = 125 = 236 = 137$  permettent de calculer les générateurs d'alias dépendants : on multiplie, au sens du calcul de Box, les générateurs d'alias indépendants deux par deux, trois par trois et quatre par quatre. On obtient :

$$1234 \times 125 = 345$$

$$1234 \times 236 = 146$$

$$1234 \times 137 = 247$$

$$125 \times 236 = 1356$$

$$125 \times 137 = 2357$$

$$236 \times 137 = 1267$$

$$1234 \times 125 \times 236 = 2456$$

$$1234 \times 125 \times 137 = 1457$$

$$1234 \times 236 \times 137 = 3467$$

$$125 \times 236 \times 137 = 567$$

$$1234 \times 125 \times 236 \times 137 = 1234567$$

En admettant l'hypothèse 1, c'est-à-dire que les interactions d'ordre 3 et plus sont négligeables, dans ce cas-là on peut négliger les générateurs d'alias d'ordre 4 et plus.

En conséquence, on considèrera au plus que les générateurs d'alias d'ordre 3. Ces derniers sont les suivants :

$$I = 125 = 236 = 137 = 567 = 345 = 146 = 247$$

Nous obtenons finalement les expressions des contrastes suivants :

$$l_0 = a_0 + a_{125} + a_{236} + a_{137} + a_{567} + a_{345} + a_{146} + a_{247} \approx a_0$$

$$l_1 = a_1 + a_{25} + a_{1236} + a_{37} + a_{1567} + a_{1345} + a_{46} + a_{1247} \approx a_1 + a_{25} + a_{37} + a_{46}$$

$$l_2 \approx a_2 + a_{15} + a_{36} + a_{47}$$

$$l_3 \approx a_3 + a_{26} + a_{17} + a_{45}$$

$$l_4 \approx a_4 + a_{35} + a_{16} + a_{27}$$

$$l_5 \approx a_5 + a_{12} + a_{34} + a_{67}$$

$$l_6 \approx a_6 + a_{23} + a_{14} + a_{57}$$

$$l_7 \approx a_7 + a_{13} + a_{24} + a_{56}$$

Les valeurs des contrastes calculés pour chaque réponse sont résumées dans le tableau suivant :

Contraste	Valeurs de contraste de réponse Y1	Valeurs de contraste de réponse Y2	Valeurs de contraste de réponse Y3
$l_0$	3,25	12,25	-0,486
$l_1$	-0,06	0,75	<b>-0,931</b>
$l_2$	<b>0,78</b>	<b>4,75</b>	-0,024
$l_3$	-0,02	0,625	-0,154
$l_4$	-0,14	<b>2,625</b>	-0,111
$l_5$	0,018	-0,25	<b>-0,858</b>
$l_6$	<b>-1,43</b>	0,375	<b>-1,161</b>
$l_7$	-0,06	<b>1,875</b>	-0,183

**La valeur critique de contraste pour chaque réponse est 0.70, 1 et 0.5 respectivement pour Y1, Y2 et Y3.**

De ces résultats et d'après les hypothèses d'interprétation nous pouvons conclure que pour :

### Réponse Y1 :

Les contrastes  $l_2$  et  $l_6$  sont forts et les autres contrastes sont faibles. Il faut se méfier de l'interaction  $a_{26}$ .

L'interaction  $a_{26}$  se trouve dans un contraste faible,  $l_3$ , donc il n'y a pas lieu de se méfier.

### Réponse Y2 :

Les contrastes  $l_2$ ,  $l_4$  et  $l_7$  sont forts et les autres contrastes sont faibles. Il faut se méfier des interactions  $a_{24}$ ,  $a_{27}$  et  $a_{47}$ .

Ces interactions se trouvent dans des contrastes forts,  $l_2$ ,  $l_4$  et  $l_7$ , donc il faut se méfier de ces interactions.

### Réponse Y3 :

Les contrastes  $l_1$ ,  $l_5$  et  $l_6$  sont forts et les autres contrastes sont faibles. Il faut se méfier des interactions  $a_{15}$ ,  $a_{16}$  et  $a_{56}$ .

Toutes ces interactions se trouvent dans des contrastes faibles,  $l_2$ ,  $l_4$  et  $l_7$ , donc il n'y a pas lieu de se méfier.

Finalement, le problème se pose au niveau de l'interprétation des résultats de la réponse Y2 où il faut se méfier des interactions  $a_{24}$ ,  $a_{27}$  et  $a_{47}$  qui peuvent être fortes !!!

Il existe un moyen qui permet de vérifier si réellement ces interactions sont fortes ou pas.

**Tableau 2 :** Niveaux favorables des facteurs influents sur les réponses.

Facteurs	Sensibilité	Bruit de fond	Sélectivité
(1) Fente d'excitation		+	
(2) Fente d'émission	+		?
(3) Température			
(4) Vitesse balayage			?
(5) Gain		+	
(6) Tension	-	+	
(7) Amortissement			?

Il s'agit de rajouter des expériences supplémentaires appelées « **Plan complémentaire** » qui permet de désaliaser les coefficients des interactions.

L'objectif est d'arriver à désaliaser :

Le facteur  $a_2$  de l'interaction  $a_{47}$

Le facteur  $a_4$  de l'interaction  $a_{27}$

Le facteur  $a_7$  de l'interaction  $a_{24}$

Il faut trouver un plan complémentaire ayant comme contraste :

$l_2' = a_2 - a_{15} - a_{36} - a_{47}$  cela suggère que :

$$2 = -15 = -36 = -47 \longrightarrow 2.2 = -125 = -236 = -247 \longrightarrow \mathbf{I = -125 = -236 = -247}$$

Pour le facteur 4 on a :  $4 = 123$  d'où :  $\mathbf{I = 1234}$

$\mathbf{I = -247}$  on remplace 4 par 123, on obtient  $\mathbf{I = -21237 = -137}$

En fin de compte, les générateurs d'aliases indépendants du plan complémentaire sont :

$$I = 1234 = -125 = -236 = -137$$

Le groupe de générateurs d'aliases GGA obtenu est le suivant :

$$I = 1234 = -125 = -236 = -137 = 1356 = 2357 = -345 = 1267 = -146 = -247 = -567 = 2456 = 3467 = 1457 = -1234567$$

On ne considère que les générateurs d'aliases d'ordre 3.

$$I = -125 = -236 = -137 = -345 = -146 = -247 = -567$$

La matrice des effets ainsi que la nouvelle réponse Y2' sont représentés dans le tableau ci-dessous

N°	I	1	2	3	4=123	5=-12	6=-23	7=-13	Y2'
1	+1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	3.5
2	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	12
3	+1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	-1	14
4	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	14
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	8
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	6
7	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	14
8	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	14

Les expressions des nouveaux contrastes sont les suivantes :

$$l_0' = a_0 - a_{125} - a_{236} - a_{137} - a_{567} - a_{345} - a_{146} - a_{247} \approx a_0$$

$$l_1' = a_1 - a_{25} - a_{1236} - a_{37} - a_{1567} - a_{1345} - a_{46} - a_{1247} \approx a_1 - a_{25} - a_{37} - a_{46}$$

$$l_2' \approx a_2 - a_{15} - a_{36} - a_{47}$$

$$l_3' \approx a_3 - a_{26} - a_{17} - a_{45}$$

$$l_4' \approx a_4 - a_{35} - a_{16} - a_{27}$$

$$l_5' \approx a_5 - a_{12} - a_{34} - a_{67}$$

$$l_6' \approx a_6 - a_{23} - a_{14} - a_{57}$$

$$l_7' \approx a_7 - a_{13} - a_{24} - a_{56}$$

A partir de ces deux plans et en utilisant les expressions des contrastes nous obtenons :

$$\frac{l_{2+} l'_{2'}}{2} = a_2$$

$$\frac{l_{2-} l'_{2'}}{2} = a_{15} + a_{36} + a_{47}$$

$$\frac{l_{4+} l'_{4'}}{2} = a_4$$

$$\frac{l_{4-} l'_{4'}}{2} = a_{35} + a_{16} + a_{27} \frac{l_{7+} l'_{7'}}{2} = a_7$$

$$\frac{l_{7-} l'_{7}}{2} = a_{13} + a_{24} + a_{56}$$

Les valeurs des contrastes calculés pour la nouvelle réponse Y2' sont résumées dans le tableau suivant :

Contraste	$l_0'$	$l_1'$	$l_2'$	$l_3'$	$l_4'$	$l_5'$	$l_6'$	$l_7'$
Valeur	<b>10,6875</b>	<b>0,8125</b>	<b>3,3125</b>	<b>0,1875</b>	<b>1,3125</b>	<b>0,8125</b>	<b>-0,1875</b>	<b>1,3125</b>

Après calcul nous trouvons :

$$\frac{l_{2+} l'_{2}}{2} = a_2 = \mathbf{4.03125}$$

$$\frac{l_{2-} l'_{2}}{2} = a_{15} + a_{36} + a_{47} = 0.71875$$

$$\frac{l_{4+} l'_{4}}{2} = a_4 = \mathbf{1.96875}$$

$$\frac{l_{4-} l'_{4}}{2} = a_{35} + a_{16} + a_{27} = 0.65625$$

$$\frac{l_{7+} l'_{7}}{2} = a_7 = \mathbf{1.59375}$$

$$\frac{l_{7-} l'_{7}}{2} = a_{13} + a_{24} + a_{56} = 0.2812$$

Nous pouvons conclure que les facteurs 2, 4 et 7 sont influents et leurs interactions sont non significantes (influentes) sur la réponse.

### Conclusion de l'étude

Nous devons rassembler l'ensemble des conclusions obtenues sur chaque réponse pour faire le bilan de l'interprétation. Les résultats que nous avons consignés dans le tableau 2 sont confirmés pour la sensibilité et le bruit de fond. Nous pouvons maintenant le compléter pour la sélectivité (Tableau 3).

**Tableau 3 : Niveaux favorables des facteurs influents sur les réponses.**

Facteurs	Sensibilité	Bruit de fond	Sélectivité
Fente d'excitation (1)		+	
Fente d'émission (2)	+		-
Température (3)			
Vitesse balayage (4)			-
Gain (5)		+	
Tension (6)	-	+	
Amortissement (7)			-

Sur les 7 facteurs, 5 sont faciles à régler :

– La fente d'excitation (facteur 1) doit être réglée à 7,5 nm pour diminuer le bruit de fond.

- La température de l'échantillon (facteur 3) n'a aucune influence sur les réponses. Elle peut donc varier entre 20 et 40 °C.
- La vitesse de balayage (facteur 4) doit être réglée à 20 pour réduire la largeur du pic à mi-hauteur (sélectivité).
- Le gain (facteur 5) doit être réglé sur 10 pour abaisser le bruit de fond.
- L'amortissement (facteur 7) doit être réglé sur 2 pour favoriser la sélectivité. Deux facteurs sont délicats à régler :
  - Si la tension du photomultiplicateur (facteur 6) est réglée sur 310 V, la sensibilité sera élevée mais le bruit de fond sera important. Inversement si la tension du photomultiplicateur est de 460 V, il y aura peu de bruit de fond mais la sensibilité sera diminuée. Il faudra trouver le meilleur compromis entre ces deux réponses.
  - Une large fente d'émission (facteur 2) augmente la sensibilité mais dégrade la sélectivité. Une fente d'émission étroite améliore la sélectivité, mais dégrade la sensibilité. Il faudra régler la largeur de cette fente pour trouver le meilleur compromis entre ces deux réponses.