Les applications au Plan Factoriel Complet 2^k

Les exemples de Plan Factoriel Complet 2^k sans l'analyse statistique

Exemple 1 : PFC 2^2

Un industriel cherche à augmenter le rendement de sa fabrication. Il prépare un médicament à partir de plantes naturelles et cherche à améliorer le rendement d'extraction du principe actif. L'extraction est effectuée en présence de chlorure de sodium dont la concentration est de 50 grammes par litre et à une température de 70°C. L'industriel décide d'étudier ces deux facteurs et de les faire varier autour des consignes normales de fonctionnement. D'où les facteurs et le domaine d'étude :

✓ **Facteur 1 :** concentration en chlorure de sodium entre 40 et 60 grammes.

✓ **Facteur 2 :** température entre 60 °C et 80 °C.

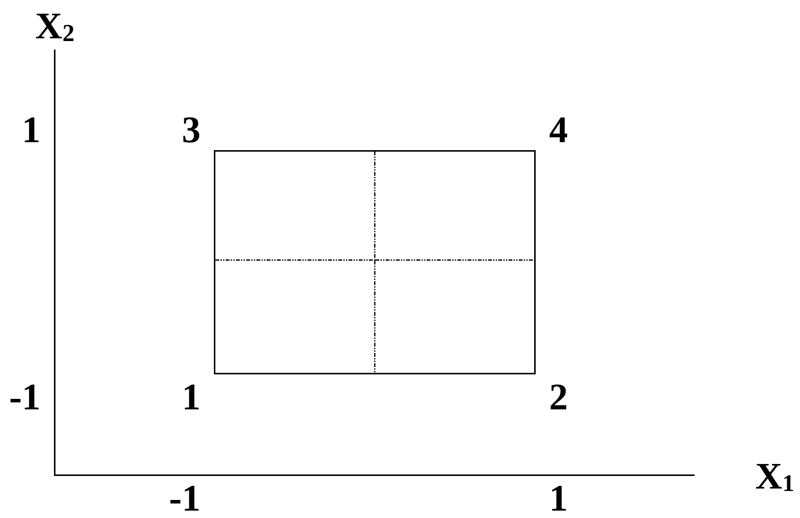
La réponse est la masse de produit actif fabriqué.

N	X_1	X_2	Yi exp
1	-1	-1	115
2	1	-1	185
3	-1	1	104
4	1	1	156

1- Donner la présentation graphique de domaine d'étude en 2D.
2- Quels sont le type de ces facteurs.
3- Calculer les valeurs codées (-1 ; +1) pour chaque facteur.
4- Dresser la matrice des effets selon la configuration de Fister et Yates.
5- Calculer tous les coefficients du modèle proposé dans cette étude.

Solution

La présentation graphique de domaine d'étude en 2D.



Le type de ces facteurs, sont des facteurs continus.

Calcul les valeurs codées (-1 ; +1) pour chaque facteur (X_1 et X_2).

$X_i = \frac{V_i - \overline{V_i}}{\Delta V_i}$ *avec* V_i *valeur réelle*, $\overline{V_i} = \frac{V_{i,\sup} + V_{i,\inf}}{2}$, $\Delta V_i = \frac{V_{i,\sup} - V_{i,\inf}}{2}$ Voir les formules de cours

Pour X_1=-1

$$V_1 \; valeur\ réelle = 40,\ \overline{V_1} = \frac{V_{1,\sup} + V_{1,\inf}}{2} = \frac{60+40}{2} = 50,\ \ \Delta V_1 = \frac{V_{1,\sup} - V_{1,\inf}}{2} = \frac{60-40}{2} = 10$$

$$X_{1,\,-1} = \frac{40-50}{10} = -1$$

Pour X_1=+1

$$V_1 \; valeur\ réelle = 60$$

$$X_{1,\,+1} = \frac{60-50}{10} = +1$$

Pour X_2=-1

$$V_2 \; valeur\ réelle = 60,\ \overline{V_2} = \frac{V_{2,\sup} + V_{2,\inf}}{2} = \frac{80+60}{2} = 70,\ \ \Delta V_2 = \frac{V_{2,\sup} - V_{2,\inf}}{2} = \frac{80-60}{2} = 10$$

$$X_{2,\,-1} = \frac{60-70}{10} = -1$$

Pour X_2=+1

$$V_2 \; valeur\ réelle = 80$$

$$X_{2,\,+1} = \frac{80-70}{10} = +1$$

La matrice des effets selon la configuration de Fister et Yates et calculs tous les coefficients du modèle proposé dans cette étude.

N	**X_0**	**X_1**	**X_2**	**X_1*X_2**	**Y exp**
1	1	-1	-1	1	115
2	1	1	-1	-1	185
3	1	-1	1	-1	104
4	1	1	1	1	156
	a_0	**a_1**	**a_2**	**a_{12}**	
	140	**30,5**	**-10**	**-4,5**	

Le modèle proposé dans cette étude est

$$y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_{12} X_1 X_2 = 140 + 30.5 X_1 - 10 X_2 - 4.5 X_1 X_2$$

Mr Boudechiche Noreddine -Email : bboudechiche@gmail.com

Exemple 2 : PFC 2^3

Influence des conditions de pétrissage sur **la compressibilité d'une pate biscuitière**.

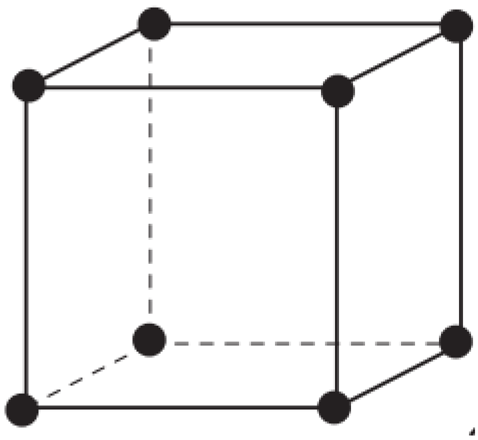
Facteurs	**Niveau −1**	**Niveau +1**
Farine (A)	Apollo	Thésée
To Bain-marie (B)	20 °C	35 °C
Durée pétrissage (C)	5 min	10 min

1- Donner la présentation graphique de domaine d'étude en 3D.
2- Quels sont le type de ces facteurs.
3- Dresser la matrice des effets selon la configuration de Fister et Yates.
4- Calculer tous les coefficients du modèle proposé dans cette étude.

N	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0,367	0,532	0,495	0,489	0,31	0,485	0,476	0,44

Solution

La présentation graphique de domaine d'étude en 3D.



Le type de chaque facteur,

Facteur A, c'est un facteur discret, mais les facteurs B et C, sont des facteurs continus.

La matrice des effets selon la configuration de Fister et Yates et calculs tous les coefficients du modèle.

N	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	Y_{exp}
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	0,367
2	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	0,532
3	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	0,495
4	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	0,489
5	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	0,31
6	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	0,485
7	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	0,476
8	1	1	1	1	1	1	1	1	0,44
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_{12}	a_{13}	a_{23}	a_{123}	
	0,449	**0,037**	**0,026**	**-0,022**	**-0,048**	**-0,003**	**0,005**	**-0,005**	

Les exemples de Plan Factoriel Complet 2^k avec l'analyse statistique

Exemple 3: PFC 2^2 + en négligeant l'interaction X_1X_2.

Les mêmes valeurs de l'exemple 2^2, mais cette fois, en négligeant l'interaction X_1X_2.

1- Dresser la matrice des effets
2- Calculer les coefficients
3- Calculer SCM, SCE, SCT, puis calculer la valeur de Fisher calculé.
4- R^2 et R^2 ajusté.
5- t-student

La solution

La matrice des effets avec les calculs des coefficients

N	X_0	X_1	X_2	Yi exp
1	1	-1	-1	115
2	1	1	-1	185
3	1	-1	1	104
4	1	1	1	156
Les Coeff	**a0**	**a1**	**a2**	
	140	**30,5**	**-10**	

SCM, SCE et SCT

N	X_0	X_1	X_2	Yi exp	Yi theo	$(Y_{i\,theo}-\bar{Y})^{\wedge 2}$	$(Y_{i\,theo}-Y_{i\,exp})^{\wedge 2}$
1	1	-1	-1	115	119,5	420,25	20,25
2	1	1	-1	185	180,5	1640,25	20,25
3	1	-1	1	104	99,5	1640,25	20,25
4	1	1	1	156	160,5	420,25	20,25
	a0	a1	a2			**SCM**	**SCE**
	140	**30,5**	**-10**			**4121**	**81**
					SCT	**4202**	

Fisher : Analyse de la Variance, Analysis Of Variance (ANOVA)

	ddl	**Variation**	**Carré moyen**	**Fisher**
Régression	2	4121	2060,5	25,43827
Résidus	1	81	81	
Total	3	4202		

Fisher calculé= 25.44 < Fisher critique $_{(2,1)}$ = 200, donc le modèle n'est pas valide (le modèle n'est pas statistiquement significatif au niveau de confiance choisi (souvent 95 %)

R^2 et R^2 ajusté.

R^2	0,980723
R^2 ajusté	0,94217

Selon R^2 et R^2 ajusté, le modèle est valide (contradiction avec le Fisher)

t-student ou Rapport de t

Estimations des coefficients

Terme	Estimation	Erreur standard	t ratio	Prob. > |t|
Constante	140	4,5	31,11	0,0205*
X1	30,5	4,5	6,78	0,0933
X2	-10	4,5	-2,22	0,2692

Erreur standard= écart type de chaque coefficient

t-ratio = t-student

Prob.= Probabilité

Selon la table de t-student critique $_{(0.05,\ 1)}$=12.706, aucun coefficient retenu (t-student critique> │t-student│. Deux facteurs non significatifs

Exemple 4 : PFC 2^2 + les points centraux

Les mêmes valeurs de l'exemple 2^2, Dans ce cas-là, en rajoutant les points au centre de domaine **(139,5 et 139).**

1- Dresser la matrice des effets
2- Calculer les coefficients
3- Calculer SCM, SCE, SCT, puis la valeur de Fisher calculé.
4- R^2 et R^2 ajusté.
5- t-student ; quels sont les coefficients significatifs et non significatifs.

La solution

La matrice des effets avec les calculs des coefficients

N	X_0	X_1	X_2	X_1X_2	Y exp
1	1	-1	-1	1	115
2	1	1	-1	-1	185
3	1	-1	1	-1	104
4	1	1	1	1	156
5	1	0	0	0	139,5
6	1	0	0	0	139
	a_0	a_1	a_2	a_{12}	
	139,75	**30,5**	**-10**	**-4,5**	

SCM, SCE et SCT

N	X_0	X_1	X_2	X_1X_2	Yi exp	Yi theo	$(Y_{i\,theo}-\bar{Y})^{\wedge 2}$	$(Y_{i\,theo}-Y_{i\,exp})^{\wedge 2}$
1	1	-1	-1	1	115	114,75	625	0,0625
2	1	1	-1	-1	185	184,75	2025	0,0625
3	1	-1	1	-1	104	103,75	1296	0,0625
4	1	1	1	1	156	155,75	256	0,0625
5	1	0	0	0	139,5	139,75	0	0,0625
6	1	0	0	0	139	139,75	0	0,5625
	a_0	a_1	a_2	a_{12}			**SCM**	**SCE**
	139,75	**30,5**	**-10**	**-4,5**			**4202**	**0,875**
						SCT	**4202,88**	

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{6} Yi}{6}$$

Fisher : L'Analyse de de Variance ANOVA

	ddl	**Variation**	**Carré moyen**	**Fisher**
Régression	3	4202	1400,667	3201,524
Résidus	2	0,875	0,438	
Total	5	4202,875		

Fisher= 3201,524 > Fisher critique $_{(3,2)}$ = 19.2, donc le modèle est valide.

R^2 et R^2 ajusté.

R^2	0,999792
R^2 ajusté	0,99948

Selon R2 et R2 ajusté, le modèle est valide (en accord avec le résultat de Fisher)

t-student

Estimations des coefficients

Terme	Estimation	Erreur standard	t ratio	Prob. > |t|
Constante	139,75	0,270031	517,53	<,0001*
X1	30,5	0,330719	92,22	0,0001*
X2	-10	0,330719	-30,24	0,0011*
X1*X2	-4,5	0,330719	-13,61	0,0054*

Selon la table de t-student critique $_{(0.05,\,2)}$=4.303, tous coefficient retenu (t-student critique< │t-student│.

Tous les effets sont significatifs.

Avec : X_1, significatif positif a_1>0. X_2, significatif négatif a_2 <0. X_{12}, significatif négatif a_{12} <0.

Exemple 3 : Les résultats de TP 1 PFC 2^3+3 points centraux

N	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	Yi exp	Yi theo	$(Y_{i\ theo}-\bar{Y})$^2	$(Y_{i\ theo}-Y_{i\ exp})$^2
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	**75,4**	**75,590**	129,078	0,03597
2	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	**93**	**93,190**	38,922	0,03597
3	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	**96,52**	**96,710**	95,233	0,03597
4	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	**98,64**	**98,830**	141,105	0,03597
5	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	**71**	**71,190**	248,417	0,03597
6	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	**80,32**	**80,510**	41,490	0,03597
7	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	**86,12**	**86,310**	0,411	0,03597
8	1	1	1	1	1	1	1	1	**93,09**	**93,280**	40,053	0,03597
9	1	0	0	0	0	0	0	0	**87,27**	**86,951**	0,000	0,10182
10	1	0	0	0	0	0	0	0	**87,23**	**86,951**	0,000	0,07789
11	1	0	0	0	0	0	0	0	**87,87**	**86,951**	0,000	0,84473
	a0	a1	a2	a3	a12	a13	a23	a123			**SCM**	**SCE**
	86,951	**4,501**	**6,831**	**-4,129**	**-2,229**	**-0,429**	**0,141**	**1,641**			**734,709**	**1,3122**
										SCT	**736,0211**	

Fisher

	ddl	Variation	Carré moyen	Fisher
Régression	7	734,7089	104,958	239,9592
Résidus	3	1,312203	0,437	
Total	10	736,0211		

Fisher calculé > Fisher critique, donc le modèle est valide.

R^2 et R^2 ajusté.

R^2	0,998217
R^2 ajusté	0,994057

Selon R^2 et R^2 ajusté, le modèle est valide (en accord avec le résultat de Fisher)

t-student

Selon la table de t-student critique $_{(0.05,\ 3)}$=3.182,

Estimations des coefficients

Terme	Estimation	Erreur standard	t ratio	Prob. > |t|
Constante	86,950909	0,199408	436,04	<,0001*
X1	4,50125	0,233827	19,25	0,0003*
X2	6,83125	0,233827	29,21	<,0001*
X3	-4,12875	0,233827	-17,66	0,0004*
X1*X2	-2,22875	0,233827	-9,53	0,0024*
X1*X3	-0,42875	0,233827	-1,83	0,1641
X2*X3	0,14125	0,233827	0,60	0,5884
X1*X2*X3	1,64125	0,233827	7,02	0,0059*

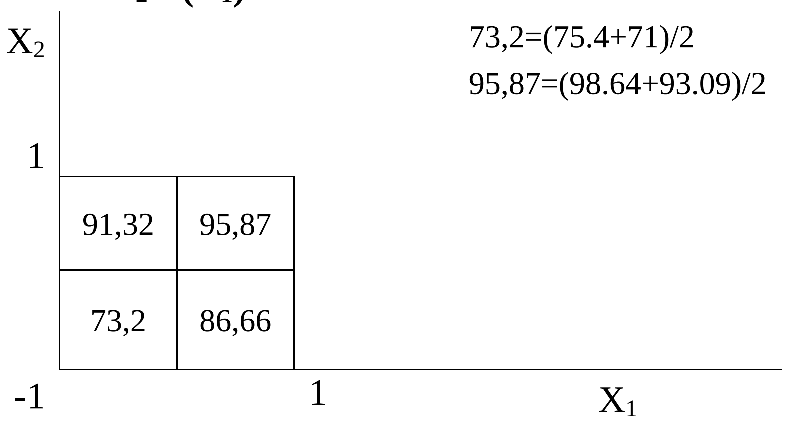
Si |t-student| > t-student critique → coefficient significatif.

Si |t-student| < t-student critique → coefficient non significatif.

Termes	Signification
X1	Significatif positif
X2	Significatif positif
X3	Significatif négatif
X1X2	Significatif négatif
X1X3	Non significatif
X2X3	Non significatif
X1X2X3	Significatif positif

Présenter les diagrammes des effets (X_1X_2 et X_1X_3)

$X_2=f(X_1)$



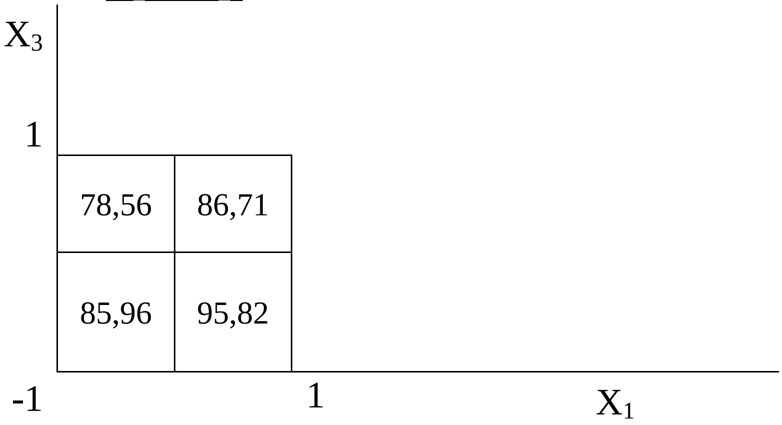
73,2=(75.4+71)/2

95,87=(98.64+93.09)/2

Meilleure réponse 95,87 au point (X_1=1, X_2=1)

Mr Boudechiche Noreddine -Email : bboudechiche@gmail.com

$X_3=f(X_1)$



Meilleure réponse 95,82 au point (X_1=1, X_3=-1)

Présentation en 03D