Chapitre Plans de mélange

6.1 Introduction

Dans une expérience de mélange, les facteurs indépendants sont des proportions des différents composants d'un mélange (voir figure 6.1). Par exemple, si vous souhaitez optimiser la résistance à la traction de l'acier inoxydable, les facteurs d'intérêt peuvent être les proportions de fer, de cuivre, de nickel et du chrome dans l'alliage. Le fait que les proportions des différents facteurs doivent totaliser 100% rend impossible l'utilisation des plans d'expériences ordinaires déjà vus.

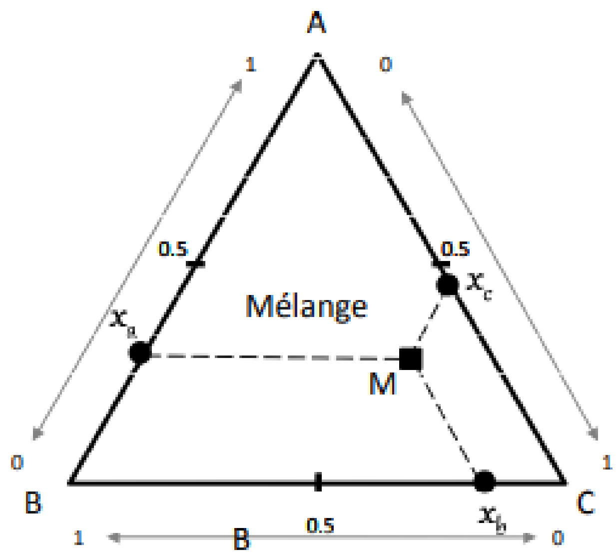

FIGURE 6.1: Valeurs des composants dans un plan de mélange à trois constituants

6.2 Types des plans de mélange

Lorsque les composants du mélange sont soumis à la contrainte qu'ils doivent s'additionner, il existe des plans de mélange standard pour l'ajustement, telles que les **Plans de Mélange en Réseaux** et les **Plans de Mélange Centrés**. Lorsque des composants de mélange sont soumis à des contraintes supplémentaires, telles qu'une valeur maximale et / ou minimale pour chaque composant, des plans autres que les plans de mélange standard, appelées plans de mélange contraints ou **Plans Sommets Extrêmes**, sont appropriés.

Pour évaluer le manque d'ajustement, une estimation de l'erreur pure est nécessaire. Cette estimation provient de la réplication de plusieurs points du plan (Cette réplication peut être appliquée aussi sur des points ajoutés à un plan standard tels que les points axiaux et le point central).

6.2.1 Plans de mélange en réseau

Un Plan de Mélange en Réseau (q, m) pour q composants est constitué de points définis par les paramètres de coordonnées suivants : les proportions assumées par chaque composant prennent les $m+1$ valeurs également espacées de 0 à 1 .

$x_i = 0, 1/m, 2/m, ..., 1$ pour $i = 1, 2, ..., q$ et toutes les combinaisons possibles (mélanges) des proportions de cette équation sont utilisées. À l'exception du centre, tous les points du plan se trouvent sur les limites du simplexe.

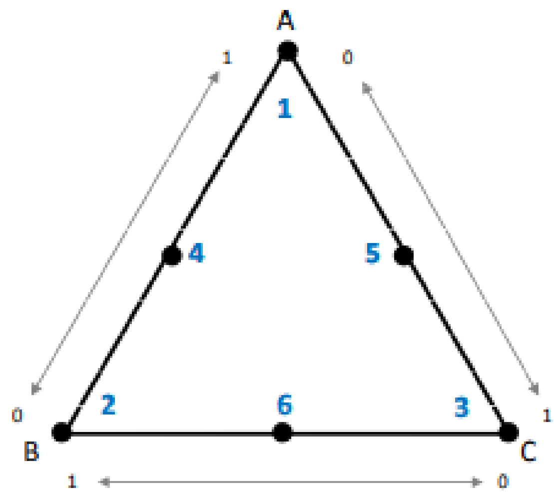

FIGURE 6.2: Plan de mélange en réseau (3, 2)

Considérons un mélange à trois composants pour lequel le nombre de niveaux équidistants pour chaque composant est de deux (c'est-à-dire, $x_i = 0, 0.5, 1$). La figure 6.2 montre la région expérimentale et la distribution des points du plan sur la région simplex. Il existe 6 points expérimentaux pour le plan de mélange en réseau (3, 2).

Dans cet exemple, $q = 3$ et $m = 2$. Si nous utilisons tous les mélanges possibles des trois composants avec ces proportions, le simplex réseau contient alors les 6 expériences de mélange énumérées dans la matrice d'expériences de la table 6.1.

TABLE 6.1: Matrice d'expériences pour un plan de mélange en réseau (3, 2)

Exp	A	B	C
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1
4	0,5	0,5	0
5	0,5	0	0,5
6	0	0,5	0,5

Les points comprennent les composantes pures et suffisamment de points entre eux pour estimer une équation de degré m. Un plan de mélange en réseau (3,3) diffère du plan de mélange centré en ayant suffisamment de points pour estimer un modèle cubique complet.

Chapitre Plans de mélange

L'augmentation du plan de mélange en réseau revient à ajouter des points intérieurs ; des points de mélange de contrôle et un point central. Les points de mélange de contrôle sont à mi-chemin entre le point central et chaque sommet de la simplexe. La figure 6.3 montre un plan de mélange en réseau (3, 2) augmenté de 4 points (*un* point central + *trois* points de mélange de contrôle).

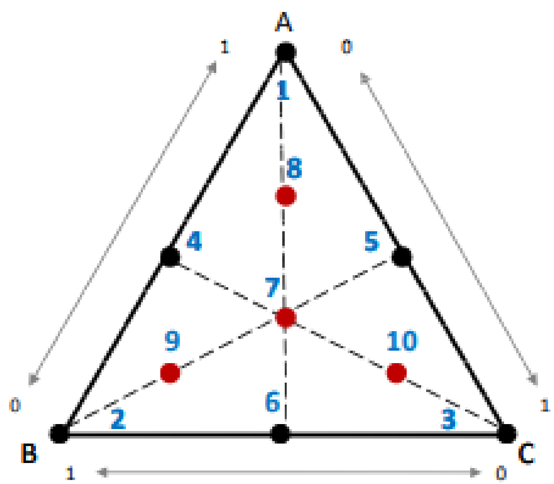

FIGURE 6.3: Plan de mélange en réseau (3, 2) augmenté

La nouvelle matrice d'expériences qui correspond au nouveau plan de mélange en réseau (3, 2) augmenté est illustré dans la table 6.2

TABLE 6.2: Matrice d'expériences pour un plan de mélange en réseau (3, 2) augmenté

Exp	A	B	C
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1
4	0,5	0,5	0
5	0,5	0	0,5
6	0	0,5	0,5
7	0,3333	0,3333	0,3333
8	0,6667	0,1667	0,1667
9	0,1667	0,6667	0,1667
10	0,1667	0,1667	0,6667

6.2.2 Plans de mélange centrés

Un deuxième type de plan de mélange est le plan de mélange centré. Dans le plan de mélange centré à q composants, le nombre de points distincts est 2^q-1 points ou mélanges, ces points sont organisés de la manière suivante :

Chapitre Plans de mélange

- q composants purs : q permutations de (1,0,0,0, ..., 0).
- Mélanges binaires à proportions égales $\begin{bmatrix} q \\ 2 \end{bmatrix}$ permutations de (1/2, 1/2, 0, 0..., 0).
- Mélanges ternaires à proportions égales $\begin{bmatrix} q \\ 3 \end{bmatrix}$ permutations de (1/3, 1/3, 1/3, 0, ..., 0).
- ...
- Un mélanges q-aire avec des proportions égales ($1/q$, $1/q$, $1/q$, ..., $1/q$).

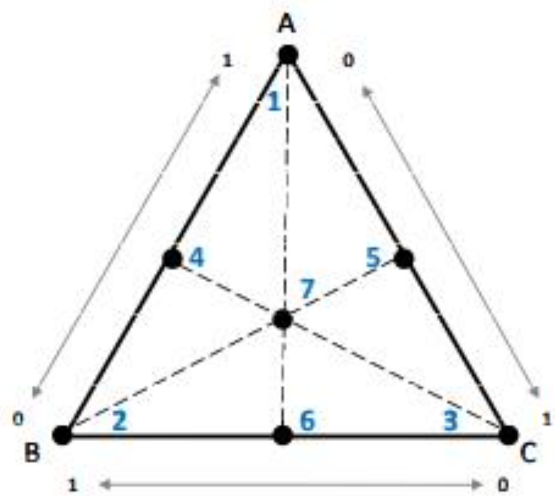

FIGURE 6.4: Plan de mélange centré à 3 composants

La figure 6.4 et la table 6.3 montrent les différents points expérimentaux pour un plan de mélange centré (3, 2).

TABLE 6.3: Matrice d'expériences pour un plan de mélange centré à 3 composants

Exp	A	B	C
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1
4	0,5	0,5	0
5	0,5	0	0,5
6	0	0,5	0,5
7	0,3333	0,3333	0,3333

Pour un nombre donné de composants, il n'existe qu'un seul plan de mélange centré, alors que différents plans de mélange en réseaux sont possibles. Les points d'un plan de mélange centré prendront en charge le polynôme suivant :

$$y = \sum_{i=1}^{q} a_i x_i + \sum_{i=1}^{q} \sum_{i<j}^{q} a_{ij} x_i x_j + \ldots + \sum_{i=1}^{q} \ldots \sum_{i<j<\ldots<=q}^{q} a_{ij\ldots q} x_i x_j \ldots x_q \tag{6.1}$$

Les plans de mélange centrés peuvent être augmentés en ajoutant des points intérieurs ; ces points sont à mi-chemin entre le point central et chaque sommet. La figure 6.5 montre un plan de mélange centré à 3 composants augmenté avec les 3 points.

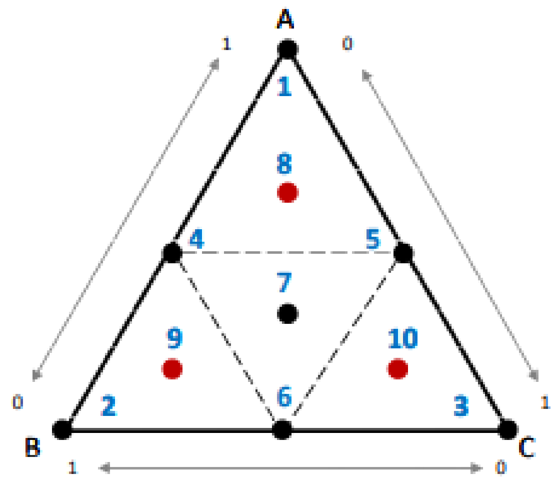

FIGURE 6.5: Plan de mélange centré à 3 composants (augmenté)

La nouvelle matrice d'expériences qui correspond au nouveau plan de mélange centré à 3 composants augmenté est illustré par la table 6.4

TABLE 6.4: Matrice d'expériences pour un plan de mélange centré à 3 composants (augmenté)

Exp	A	B	C
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1
4	0,5	0,5	0
5	0,5	0	0,5
6	0	0,5	0,5
7	0,3333	0,3333	0,3333
8	0,6667	0,1667	0,1667
9	0,1667	0,6667	0,1667
10	0,1667	0,1667	0,6667

6.2.3 Plans de mélange contraints (Sommets extrêmes)

Les plans de sommets extrêmes sont des plans de mélange qui couvrent uniquement une sous-partie ou un espace plus petit dans le simplex. Ces plans doivent être utilisés lorsque l'espace du plan choisi n'est pas lui même un plan simplex. La présence de contraintes de limite inférieure et supérieure sur les composants crée souvent cette condition. Les contraintes sont de la forme $I_i \leq x_i \leq S_i, (i = 1, 2, ..., q)$, où I_i est la limite inférieure du i^{eme} composant et S_i la limite supérieure du i^{eme} composant. La forme générale d'un problème de mélange contraint (Plan de sommets extrêmes) est :

$x_1 + x_2 + ... + x_q = 1$
$I_i \leq x_i \leq S_i$ pour $i = 1, 2,..., q$ Avec : $I_i \geq 0$ et $S_i \leq 1$

Par exemple, vous devez déterminer les proportions de la farine, du lait, de la levure chimique, d'œufs et d'huile dans un mélange à crêpes qui donneront un produit optimal à base de goût. Comme les expériences précédentes indiquent qu'un mélange ne contenant pas tous les ingrédients ou contenant trop de levure chimique ne répondra pas aux exigences de la saveur, vous décidez de limiter le plan en définissant des limites inférieures et supérieures.

L'objectif d'un plan de sommets extrêmes est de choisir des points du plan qui couvrent de manière adéquate l'espace du plan. La figure 6.6 montre les sommets extrêmes d'un plan à trois composants avec des contraintes supérieures et inférieures :

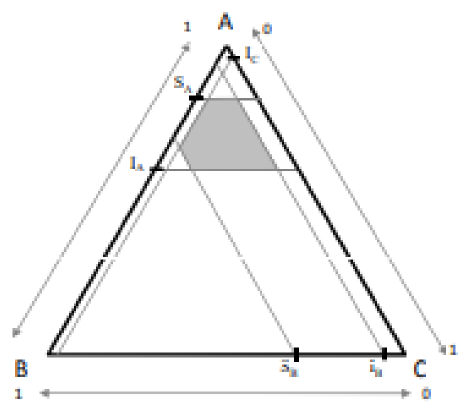

FIGURE 6.6: Limites inférieures et supérieures dans un plan de mélange contraint

Les lignes en gris clair représentent les limites inférieures et supérieures des composants. La zone en gris foncé représente l'espace du plan. Les points sont placés aux sommets extrêmes de l'espace du plan.

6.3 Combinaison des plans de mélange avec d'autres plans

Il est possible de combiner p facteurs ordinaires avec q composants de mélange dans un plan. Dans une expérience factorielle (ou RSM) avec les p facteurs, les propriétés des facteurs doivent être examinées pour chaque niveau de tous les composants q du mélange. Le nombre de variables du processus augmente exponentiellement la quantité des points expérimentaux. Par conséquent, le nombre des facteurs ordinaires doit être réduit au minimum. Le plan expérimental combiné implique la mise en place d'une expérience factorielle à chaque point d'une configuration dans les composants du mélange ou la mise en place d'une expérience de mélange à chaque point

Chapitre Plans de mélange

d'une configuration dans les points factoriels (Voir figure 6.7).

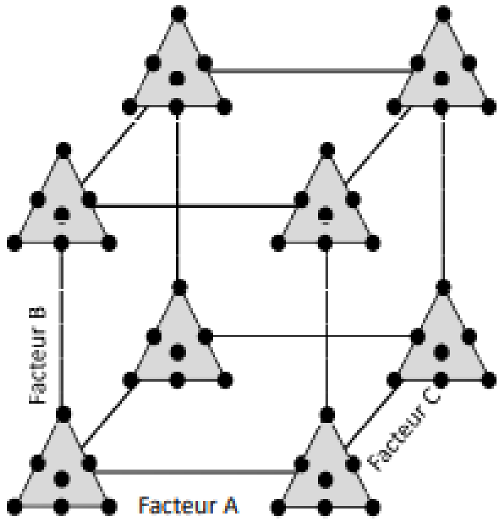

FIGURE 6.7: Un plan combiné de variables factorielles et de composants de mélange