Chapitre III : Les Plans Fractionnaires 2^{k-q}

1. Introduction

Comme les plans factoriels complets, les plans factoriels fractionnaires possèdent des facteurs ayant chacun deux niveaux, un niveau bas et un niveau haut. Mais, on ne réalise pas toutes les combinaisons de niveaux. En effet, le nombre d'essais des plans factoriels complets augmente rapidement avec le nombre de facteurs. Il n'est pas rare de rencontrer des études faisant intervenir 7 ou 8 facteurs. Il est bien sûr déraisonnable de vouloir exécuter $2^7 = 128$ ou $2^8 = 256$ essais. On sélectionne une fraction des essais d'un plan complet pour construire un plan fractionnaire. Cette sélection est basée sur des considérations mathématiques qui seront mises en application grâce au calcul de Box.

Plans fractionnaires (2^{k-q}) :

Ce plan consiste à utiliser pour l'étude de « k » facteurs la matrice d'effet d'un plan factoriel complet 2^{k-1}, 2^{k-2}, 2^{k-3}... Ce qui permet de réduire le nombre d'essais par 2q Nous remarquons que pour un plan factoriel complet les interactions d'ordre deux et plus sont le plus souvent négligeables. L'astuce est que les interactions les moins influentes sont remplacées par les facteurs « k - q»,…«k», en suivant leurs mêmes alternances de signes. Le plan obtenu est dit fractionnaire 2^{k-q}.

2 : Nombre de niveaux

k : Nombre de facteurs à étudier.

q : Nombre de facteurs supplémentaires

Calcul de Box

Le calcul de Box permet de retrouver rapidement comment les effets et les interactions sont aliasés dans les contrastes. Comme nous l'avons déjà signalé, il s'applique aux plans fractionnaires à deux niveaux fixés à –1 et +1.

Notation de Box :

Dans la notation de Box, on désigne par le chiffre **1** (en gras) la colonne des signes du facteur 1, signes ordonnés selon la présentation de Yates. Pour un plan 2^2, on a :

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

La colonne du facteur 2 sera désignée par :

$$\mathbf{2} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

On introduit également des colonnes de signes moins et de signes plus :

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} \qquad -\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Opérations sur les colonnes de signes

Le calcul de Box consiste à faire des opérations sur les colonnes de signes que nous venons de définir. On multiplie les signes terme à terme en appliquant la règle des signes. Par exemple, la multiplication de 1 par 2 est :

$$\mathbf{1} \times \mathbf{2} = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

Le signe +1 du premier terme de la colonne-produit est le résultat de la multiplication de –1 (premier terme de **1**) par –1 (premier terme de **2**). Les autres signes de la colonne-produit sont obtenus de la même manière. Voyons dans les paragraphes suivants les opérations les plus utilisées sur les colonnes de signes.

Multiplication d'une colonne par elle-même Par exemple, multiplions la colonne **1** par elle même :

$$\mathbf{1} \times \mathbf{1} = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

La multiplication d'une colonne par une colonne de signes plus donne la colonne initiale. On peut dire aussi que la multiplication par une colonne de signes plus ne change pas la colonne multipliée.

Multiplication d'une colonne par une colonne de signes moins Multiplions la colonne **2** par –**I** :

$$\mathbf{2}\times(-\mathbf{I}) = \begin{bmatrix}-1\\-1\\+1\\+1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}+1\\+1\\-1\\-1\end{bmatrix} = -\mathbf{2}$$

Multiplication d'une colonne de signes plus par elle-même : On a

$$\mathbf{I}\times\mathbf{I} = \begin{bmatrix}+1\\+1\\+1\\+1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}+1\\+1\\+1\\+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}+1\\+1\\+1\\+1\end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

La multiplication d'une colonne de signes plus par elle-même donne une colonne de signes plus.

Commutativité de la multiplication

$$\mathbf{1}\times\mathbf{2} = \begin{bmatrix}-1\\+1\\-1\\+1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1\\-1\\+1\\+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}+1\\-1\\-1\\+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-1\\+1\\+1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1\\+1\\-1\\+1\end{bmatrix} = \mathbf{2}\times\mathbf{1}$$

Le résultat de la multiplication de **1** par **2** est le même que celui de la multiplication de **2** par **1**. Cette propriété s'appelle la *commutativité*

Règles à retenir

Il faut simplement retenir les règles suivantes du calcul de Box. Pour simplifier, les signes multipliés ont été éliminés des formules :

– **Règle 1 -** Commutativité :

– **Règle 2 -** Multiplication d'une colonne par elle-même :

– **Règle 3 -** Multiplication d'une colonne par **I** ou – **I** :

Relation d'équivalence

Plan de base Considérons un plan 23 et son modèle postulé :

Le terme *x*1 *x*2 est le produit des niveaux des facteurs 1 et 2. Ce terme est celui de l'interaction 12. On peut donc construire une colonne de signes correspondant à l'interaction 12 en multipliant, selon le calcul de Box, les colonnes du facteur 1 et du facteur 2. On peut faire de même pour les interactions 13, 23 et 123. On peut aussi ajouter une colonne de signes plus pour introduire la constante dans les calculs. On obtient ainsi un tableau, appelé *matrice de base* ou *plan de base*, qui comporte 8 lignes et 8 colonnes.

Tableau 1– Matrice de base d'un plana 2^3.

Essai n°	I	1	2	3	12	13	23	123
1	+	−	−	−	+	+	+	−
2	+	+	−	−	−	−	+	+
3	+	−	+	−	−	+	−	+
4	+	+	+	−	+	−	−	−
5	+	−	−	+	+	−	−	+
6	+	+	−	+	−	+	−	−
7	+	−	+	+	−	−	+	−
8	+	+	+	+	+	+	+	+

Cette matrice de base correspond à la matrice qui est utilisée pour calculer les effets et les interactions d'un plan complet. Mais pour un plan fractionnaire, on n'utilise que la moitié des essais de cette matrice. Divisons cette matrice de base en deux fractions : un demi-plan constitué des essais n° 5, 2, 3 et 8 (lignes plus foncées du tableau 2) et un demi-plan constitué des essais n° 1, 6, 7 et 4.

Tableau 2 – Matrice de base coupée en deux plans fractionnaires.

Essai n°	I	1	2	3	12	13	23	123
5	+	−	−	+	+	−	−	+
2	+	+	−	−	−	−	+	+
3	+	−	+	−	−	+	−	+
8	+	+	+	+	+	+	+	+
1	+	−	−	−	+	+	+	−
6	+	+	−	+	−	+	−	−
7	+	−	+	+	−	−	+	−
4	+	+	+	−	+	−	−	−

Dans un premier temps, intéressons-nous au demi-plan supérieur, le plan plus foncé. Il contient huit colonnes de quatre signes qui sont égales deux à deux. En notation de Box, on peut écrire, par exemple, que la colonne des quatre signes du facteur 1 est égale à celle de l'interaction 23, soit :

1 = 23

Nous avons vu que, dans ce demi-plan, le facteur 1 était confondu avec l'interaction 23 et que le contraste l1 calculé avec la colonne 1 (ou avec la colonne 23) était la somme des coefficients a_1 et a_{23} : $l_1 = l_{23} = a_1 + a_{23}$.

Relation d'équivalence On remarque que les coefficients aliasés dans un contraste sont ceux qui ont les mêmes colonnes de signes dans le demi-plan considéré. C'est une règle générale : un contraste est la somme algébrique des coefficients qui ont les mêmes colonnes de signes. C'est-à-dire que si l'on a **1** = **23** en calcul de Box, le contraste calculé avec la colonne l_1 sera la somme $l_1 = a_1 + a_{23}$ et le contraste calculé avec la colonne **23** sera la somme $l_{\mathbf{23}} = a_1 + a_{23}$.

On a donc : **1** = **23** est équivalent à $l_{\mathbf{1}} = l_{\mathbf{23}} = a_1 + a_{23}$

C'est la relation d'équivalence. Elle est valable dans les deux sens et elle constitue la base de la théorie des aliases.

L'examen du tableau précédent 2 montre que l'on a aussi :

Générateurs d'aliases

Générateur d'aliases du demi-plan supérieur

Considérons le demi-plan supérieur du tableau 2. Les deux colonnes de signes plus permettent d'écrire en notation de Box :

I = 123

En multipliant par 1 les deux membres de cette relation et en tenant compte des règles de multiplication de Box, on retrouve les colonnes identiques du demi-plan supérieur :

1. Multiplication par 1 des deux membres de la relation {6.3} :

1.I = 1.123

2. Application de la règle 2 :

1.I = I.23

3. Application de la règle 3 :

1 = 23

En multipliant les deux membres de la relation {6.3} successivement par 2 et par

3, on obtient les deux relations :

2 = 13

3 = 12

La relation I = 123 permet donc de retrouver toutes les colonnes qui sont égales dans le demi-plan supérieur. Connaissant ces égalités et en appliquant la relation d'équivalence, on retrouve comment les coefficients sont aliasés dans les contrastes. La relation I = 123 s'appelle le *générateur d'aliases*.

6.5.2 Générateur d'aliases du demi-plan inférieur

En considérant le demi-plan inférieur (Tableau 2), on vérifie que les colonnes se correspondent deux à deux, mais avec des signes opposés. À la colonne de signes plus correspond la colonne de signes moins de l'interaction 123. On peut écrire, en notation de Box :

I = -123

C'est le générateur d'aliases du demi-plan inférieur.

En multipliant par **1** les deux membres de la relation de I et en tenant compte des règles de multiplication de Box, on a :

1.I = 1.-123

1 = -I 23

1 = -23

La colonne de l'interaction 23 a bien des signes opposés à ceux de la colonne 1. On trouve la structure du contraste de la colonne 1 en appliquant la relation d'équivalence :

$l_1' = -l_{23}' = a_1 - a_{23}$

Les contrastes calculés avec le demi-plan inférieur sont des différences de coefficients. On calcule que l'on a de même :

2 = –13 soit $l_2' = -l_{13}' = a_2 - a_{13}$

3 = –12 soit $l_3' = -l_{12}' = a_3 - a_{12}$

I = –123 soit $l_1' = -l_{123}' = a_0 - a_{123}$

Construction pratique d'un plan fractionnaire

Lorsqu'on examine les quatre premières colonnes du demi-plan supérieur (Tableau 3), on constate que l'on retrouve les colonnes de signes d'un plan de base 22. Ce plan comporte la colonne des facteurs 1 et 2, la colonne 12 construite par la règle des signes et une colonne de signes plus (Tableau 3).

Tableau 3 – Plan de base 2^2

Essai n°	I	1	2	12
1	+	–	–	+
2	+	+	–	–
3	+	–	+	–
4	+	+	+	+

L'interaction 12 peut servir à étudier un facteur supplémentaire, le facteur 3. En effet, les niveaux d'étude du facteur supplémentaire sont semblables aux signes de la colonne de signes de l'interaction 12 (Tableau 3). On profite de cette similitude pour construire facilement les plans fractionnaires. En notation de Box, on écrit que le facteur 3 est étudié sur les signes de l'interaction 12 :

3 = 12

Multiplions chaque membre de cette relation par 3, on retrouve le générateur du plan fractionnaire :

I = 123

Ce générateur permet, grâce au calcul de Box et à la relation d'équivalence, de retrouver comment les coefficients sont aliasés dans les contrastes.

Tableau 4 – Plan d'expériences 2^{3-1} bâti avec le générateur **I** = **123**.

Essai n°	1	2	3
1	–	–	+
2	+	–	–
3	–	+	–
4	+	+	+

Au lieu de prendre le générateur **I** = **123**, on peut prendre le générateur :

I = **-123**

Dans ce cas, le troisième facteur est étudié sur les signes de l'interaction –12 (Tableau 5).

Tableau 5 – Plan d'expériences 23–1 bâti avec le générateur **I** = **–123**.

Essai n°	1	2	3
1	–	–	–
2	+	–	+
3	–	+	+
4	+	+	–

La construction pratique des plans fractionnaires que nous venons de voir sur un plan de base 22, se généralise à tous les plans de base 2^k :

– On choisit un plan complet et l'on écrit le plan de base correspondant en appliquant la règle des signes.

– Dans ce plan de base, on choisit une colonne de signes correspondant à une interaction et on lui attribue un facteur supplémentaire. On peut prendre, soit la colonne elle-même avec ses signes, soit la colonne avec les signes opposés.

– On en déduit le générateur d'aliases grâce au calcul de Box.

– En multipliant le générateur d'aliases et en appliquant la relation d'équivalence, on retrouve la structure de tous les contrastes.

Voyons comment cela fonctionne sur un plan de base 2^3.

Reprenons le plan de base 2^3 (Tableau 6). Il y a quatre colonnes disponibles pour étudier des facteurs supplémentaires : les interactions **12**, **13**, **23** et **123**. On peut donc construire plusieurs plans fractionnaires qui auront tous 8 essais mais qui permettront d'étudier plus ou moins de facteurs.

Tableau 6 – Plan de base d'un plan 2^3.

Essai n°	I	1	2	3	12	13	23	123
1	+	–	–	–	+	+	+	–
2	+	+	–	–	–	–	+	+
3	+	–	+	–	–	+	–	+
4	+	+	+	–	+	–	–	–
5	+	–	–	+	+	–	–	+
6	+	+	–	+	–	+	–	–
7	+	–	+	+	–	–	+	–
8	+	+	+	+	+	+	+	+

De ce plan de base, nous allons successivement extraire le plan complet et les plans fractionnaires que l'on peut construire.

6.6.1 Plan complet 2^3

Les colonnes 1, 2 et 3 sont celles d'un plan complet pour étudier trois facteurs (Tableau 7).

Tableau 7 – Plan complet 2^3.

Essai n°	1	2	3
1	–	–	–
2	+	–	–
3	–	+	–
4	+	+	–
5	–	–	+
6	+	–	+
7	–	+	+
8	+	+	+

Plan fractionnaire 2^{4-1}

C'est le plan qui a été utilisé pour le tellure. On désire étudier quatre facteurs en ne faisant que 8 essais. On donne le nom de 4 au facteur supplémentaire. On choisit l'une des quatre colonnes d'interaction, par exemple la colonne **123** (Tableau 8). Les niveaux d'étude du facteur 4 sont ceux de la colonne **123**. On construit le plan fractionnaire en extrayant les quatre colonnes **1**, **2**, **3** et **123** du plan de base.

Tableau 8 – Plan d'expériences 2^{4-1}

Essai n°	1	2	3	4 = 123
1	–	–	–	–
2	+	–	–	+
3	–	+	–	+
4	+	+	–	–
5	–	–	+	+
6	+	–	+	–
7	–	+	+	–
8	+	+	+	+

Le quatrième facteur étant étudié sur la colonne de signes de l'interaction 123, on peut écrire en notation de Box :

I = 1234

C'est le générateur d'aliases qui permet de calculer la structure des contrastes. En multipliant ce générateur successivement par **1**, **2**, **3** et **4**, on obtient les égalités de colonnes, puis en utilisant la relation d'équivalence, les contrastes :

1 = **234** est équivalent à $l_1 = a_1 + a_{234}$

2 = **134** est équivalent à $l_2 = a_2 + a_{134}$

3 = **124** est équivalent à $l_3 = a_3 + a_{124}$

4 = **123** est équivalent à $l_4 = a_4 + a_{123}$

I = **1234** est équivalent à $l_0 = a_0 + a_{1234}$

On aurait pu aliaser le facteur 4 sur une autre interaction, on aurait eu d'autres structures de contrastes. Par exemple, si on choisit d'étudier le facteur 4 sur l'interaction 12, on a :

4 = **12**

d'où le générateur d'aliases :

I = **124**

En multipliant ce générateur successivement par **1**, **2**, **3** et **4**, on obtient les relations d'équivalence et la structure des contrastes correspondants :

1 = **24** est équivalent à $l_1 = a_1 + a_{24}$

2 = **14** est équivalent à $l_2 = a_2 + a_{14}$

3 = **1234** est équivalent à $l_3 = a_3 + a_{1234}$

4 = **12** est équivalent à $l_4 = a_4 + a_{12}$

I = **124** est équivalent à $l_0 = a_0 + a_{124}$

On pourrait également choisir soit l'interaction 13 soit l'interaction 23 pour étudier le facteur 4. Mais ces choix ne sont pas équivalents. Le premier choix, **4** = **123**, est bien meilleur que les trois autres car les effets principaux des facteurs sont tous aliasés avec des interactions d'ordre 3, c'est-à-dire avec des interactions qui ont de grandes chances d'être faibles. Ce n'est pas le cas des trois autres plans 24-1 pour lesquels certains effets principaux sont aliasés avec des interactions d'ordre 2.

Plan fractionnaire 2^{5-2}

Il est tout à fait possible d'étudier deux facteurs supplémentaires. On choisit deux colonnes qui ne sont pas déjà occupées par des facteurs (ici colonnes 1, 2 et 3), par exemple, on peut choisir la colonne **12** pour le quatrième facteur et la colonne **13** pour le cinquième facteur (Tableau 9). Le plan fractionnaire correspondant est un plan 2^{5-2} car il s'agit d'un plan complet à 32 essais coupé en quatre. Le plan 2^5 a été divisé par 2^2 soit $2^5/2^2$, ce qui peut également s'écrire 2^{5-2}. Le tableau 9 représente ce plan fractionnaire 2^{5-2}.

Tableau 9 – Plan d'expériences 2^{5-2}.

Essai n°	1	2	3	4 = 12	5 = 13
1	–	–	–	+	+
2	+	–	–	–	–
3	–	+	–	–	+
4	+	+	–	+	–
5	–	–	+	+	–
6	+	–	+	–	+
7	–	+	+	–	–
8	+	+	+	+	+

Établissons, grâce à la notation de Box, la structure des aliases de ce plan fractionnaire. On a deux relations :

4 = 12 5 = 13

et, bien sûr, deux générateurs d'aliases :

I = 124 I = 135

Ces deux générateurs d'aliases proviennent du choix de deux interactions indépendantes du plan de base. On les appelle des générateurs d'aliases *indépendants*.

Si l'on multiplie ces deux générateurs d'aliases indépendants membre à membre, on obtient un troisième générateur :

I.I = 124.135

I = 2345

Ce nouveau générateur d'aliases est un générateur *dépendant*. On remarque que deux facteurs supplémentaires introduisent non pas un générateur mais un *groupe de générateurs d'aliases* (GGA) comportant quatre termes :

I = 124 = 135 = 2345

Ce GGA est utilisé pour établir la structure des aliases de ce plan fractionnaire. Par exemple, le contraste l_1 sera déterminé en multipliant tous les termes du GGA par la colonne **1** :

1.I = 1.124 = 1.135 = 1.2345

En simplifiant :

1 = 24 = 35 = 12345

Les quatre colonnes **1**, **24**, **35** et **12345** sont identiques dans le quart de plan de base. La relation d'équivalence donne les quatre coefficients aliasés dans les contrastes l_1, l_{24}, l_{35} et l_{12345} :

$l_1 = l_{24} = l_{35} = l_{12345} = a_1 + a_{24} + a_{35} + a_{12345}$

On simplifie l'écriture en n'indiquant que l'un des contrastes :

$l_1 = a_1 + a_{24} + a_{35} + a_{12345}$

Les autres contrastes sont calculés de la même manière et comportent tous 4 coefficients.

Plan fractionnaire 2^{7-4}

On peut généraliser cette méthode et utiliser toutes les colonnes du plan de base (Tableau 10). Sur le plan de base 2^3, on peut étudier jusqu'à 7 facteurs puisqu'il y a 4 colonnes d'interaction. Dans ce cas, il s'agit de diviser en 16 un plan complet de 128 essais.

Tableau 10 – Plan d'expériences 2^{7-4}.

Essai n°	1	2	3	4 = 123	5 = 12	6 = 13	7 = 23
1	–	–	–	–	+	+	+
2	+	–	–	+	–	–	+
3	–	+	–	+	–	+	–
4	+	+	–	–	+	–	–
5	–	–	+	+	+	–	–
6	+	–	+	–	–	+	–
7	–	+	+	–	–	–	+
8	+	+	+	+	+	+	+

Le générateur d'aliases s'obtient en prenant d'abord les 4 générateurs indépendants :

4 = 123 **5 = 12**

6 = 13 **7 = 23**

Les générateurs dépendants s'obtiennent en multipliant deux à deux, puis trois à trois et enfin quatre à quatre les générateurs indépendants. Le GGA contient 16 termes. Ce GGA est multiplié successivement par **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6** et **7**. Les relations obtenues permettent d'établir la structure des contrastes qui comportent chacun 16 termes dans le cas du plan 27-4. Dans le cas général, les contrastes d'un plan fractionnaire 2^{k-q} contiennent 2^q termes. Le calcul de tels contrastes est ennuyeux, fatigant et fastidieux et nous verrons comment on les obtient facilement avec le logiciel.

Nombre maximal de facteurs étudiés sur un plan de base

On peut étudier autant de facteurs supplémentaires qu'il y a d'interactions dans le plan de base (Tableau 11). Sur un plan de base 2^2 il y a une interaction. On pourra donc étudier trois facteurs, deux sur les colonnes 1 et 2, le troisième sur la colonne de l'interaction. Sur un plan de base 2^3, il y a quatre interactions. On pourra donc étudier sept facteurs, trois sur les colonnes 1, 2 et 3, les quatre autres sur les colonnes d'interaction 12, 13, 23 et 123. Le tableau 11 indique le nombre maximal de facteurs que l'on peut étudier sur différents plans de base.

Tableau 11 – Nombre maximal de facteurs étudiés sur un plan de base donné.

Plan de base	Nombre de facteurs du plan complet	Nombre d'interactions	Nombre maximal de facteurs étudiés
2^2	2	1	3
2^3	3	4	7
2^4	4	11	15
2^5	5	26	31
2^6	6	57	63
2^7	7	120	127