# Chapitre 2 : Tests de signification et validation du modèle

## 1. Introduction

Ce chapitre a pour objectif d'évaluer la pertinence statistique du modèle obtenu à partir du plan d'expériences. Après l'ajustement du modèle aux résultats expérimentaux, il est essentiel de vérifier sa validité à l'aide de tests statistiques. Ces tests permettent de distinguer les effets réellement significatifs des simples fluctuations dues aux erreurs expérimentales. La validation du modèle repose ainsi sur l'analyse de la variance (ANOVA), les tests de signification des effets et la détermination des intervalles de confiance.

## 2. Erreurs expérimentales

Les erreurs expérimentales représentent les écarts observés entre les valeurs mesurées et celles prédites par le modèle.

$e = y_{éxp} - y_{mod}$

Elles peuvent être dues :

- à des incertitudes de mesure (appareillage, lecture, manipulation) ;
- à des variations incontrôlées des conditions opératoires ;
- ou à des approximations liées au modèle statistique.

Dans le cadre de l'ANOVA, ces erreurs sont quantifiées à travers la somme des carrés de l'erreur (SCE), qui permet d'évaluer la part de variabilité non expliquée par les facteurs étudiés.

Une erreur expérimentale faible traduit une bonne répétabilité des essais et renforce la fiabilité du modèle

## Tests de signification des effets

Les tests de signification visent à déterminer si les effets des facteurs ou de leurs interactions sont statistiquement significatifs. L'outil principal utilisé est le test de Fisher (F-test), appliqué dans le cadre de l'analyse de la variance (ANOVA).

- Hypothèses du test :
  - $H_0$ : l'effet du facteur est nul (non significatif)
  - $H_1$ : l'effet du facteur est significatif
- Statistique de test :

$F_{calculé} = MS_{facteur} / MS_{erreur}$

- Si Fcalculé>Ftheorique (au seuil de signification α, souvent 5 %), alors l'effet est jugé significatif.

## 4. Intervalle de confiance des effets du modèle

Un intervalle de confiance indique la plage dans laquelle se situe la vraie valeur d'un effet avec une probabilité donnée (souvent 95 %).

L'analyse est souvent complétée par la valeur de probabilité *p* (*p*-value) :

- $p<0.05$ (5% d'erreur) → effet significatif,

- $p>0.05$ (5% d'erreur)→ effet non significatif

**5. Analyse de la variance. Validation du modèle linéaire**

**Degrés de liberté**

Soit n réponses mesurées indépendamment les unes des autres. Il n'existe pas de relation mathématique entre elles. Les n écarts à la moyenne correspondants ne sont pas indépendants. En effet, il existe une relation mathématique entre ces écarts. Quand on en connaît n − 1, on peut calculer le dernier avec la relation mathématique. Par exemple, reprenons les quatre écarts à la moyenne de l'exemple. Les trois premiers écarts sont :

| | | |
|---|---|---|
| −0,4 | +1,1 | −1,1 |

Le quatrième écart s'obtient facilement puisque la somme des écarts est toujours égale à 0 :

Quatrième écart – 0,4 + 1,1– 1,1 = 0

**Quatrième écart = 0,4**

Il n'y a donc que n − 1 écarts indépendants. On dit que la série des n écarts à la moyenne possède n − 1 degrés de liberté (ou ddl). Le nombre de degrés de liberté est important car il intervient dans de nombreuses formules de statistique.

**II.2.2. Test de Fisher**

L'objectif de l'analyse globale des résultats est de définir la qualité descriptive du modèle au moyen d'un tableau d'analyse de la variance, Analysis Of Variance (ANOVA). Pour ce faire, plusieurs grandeurs doivent être préalablement définies. Soit SCT la somme des carrés totale, c'est-à-dire la somme des carrés des écarts entre les mesures de la réponse et leur moyenne :

$$\boldsymbol{SCT = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} \quad \textbf{(II.1)}$$

Cette somme peut être décomposée en deux sommes, SCM, la somme des carrés due à la régression ou variation expliquée par le modèle et SCE, la somme des carrés des résidus ou variation inexpliquée par le modèle :

$$\boldsymbol{SCT = SCM + SCE} \quad \textbf{(II.2)}$$

SCM est la somme des carrés des erreurs entre les réponses estimées et la moyenne des réponses mesurées :

$$\boldsymbol{SCM = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2} \quad \textbf{(II.3)}$$

SCE est la somme du carré des écarts entre les réponses mesurées et estimées :

$$\boldsymbol{SCE = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2} \quad \textbf{(II.4)}$$

On effectue alors le test de Fisher. Fcal est une valeur calculée d'une valeur F de Fisher, à (p-1) et (n - p) degrés de liberté. On calcule le ratio :

$$F_{calculé} = \frac{SCM/_{p-1}}{SCT/_{n-p}} \qquad \textbf{(II.5)}$$

En pratique, le modèle utilisé contient un terme constant ao, correspondant à la moyenne des réponses mesurées. Cette composante n'étant d'aucun intérêt dans l'analyse de la variance, elle est supprimée et donc on prend (p-1) degré de liberté pour le modèle de régression.

Avec p : c'est le nombre des coefficients du modèle.

Pour réunir ces informations, on utilise le tableau de la variance suivant :

**Tableau II.1 :** Analyse de la variance (ANOVA).

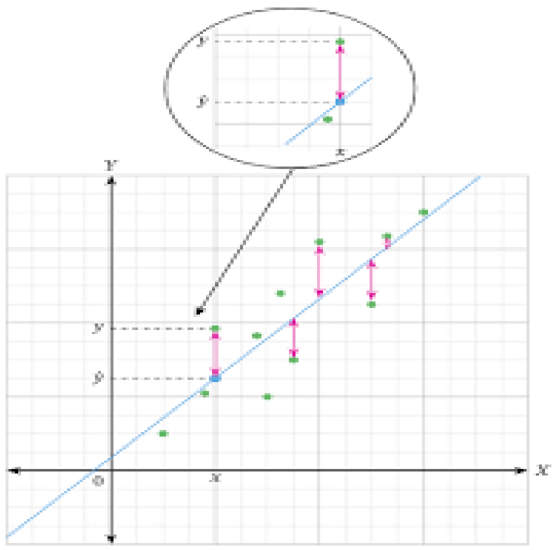
| **Source de variation** | **ddl** | **Variation** | **Carré moyen** | **Fisher** |
|---|---|---|---|---|
| Régression | p-1 | $SCM=\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i-\bar{y}\right)^2$ | $\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i-\bar{y}\right)^2/p-1$ | $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i-\bar{y}\right)^2/p-1}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\hat{y}_i\right)^2/n-p}$ |
| Résiduelle | n-p | $SCE=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\hat{y}_i\right)^2$ | $\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\hat{y}_i\right)^2/n-p$ | |
| Totale | n-1 | $SCT=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2$ | | |

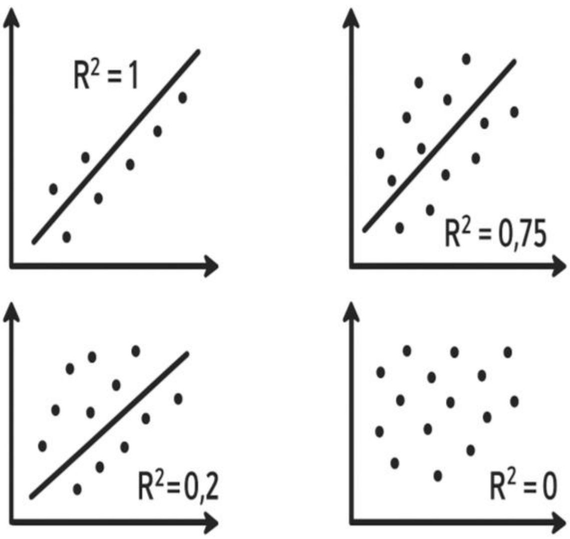
On note $F_{crit}$ (p–1, n– p) la valeur critique au seuil α d'une loi de Fisher à (p–1) et (n–p) degrés de liberté avec une probabilité α si : $F_{cal}>F_{crit}$ (p-1 ; n-p)

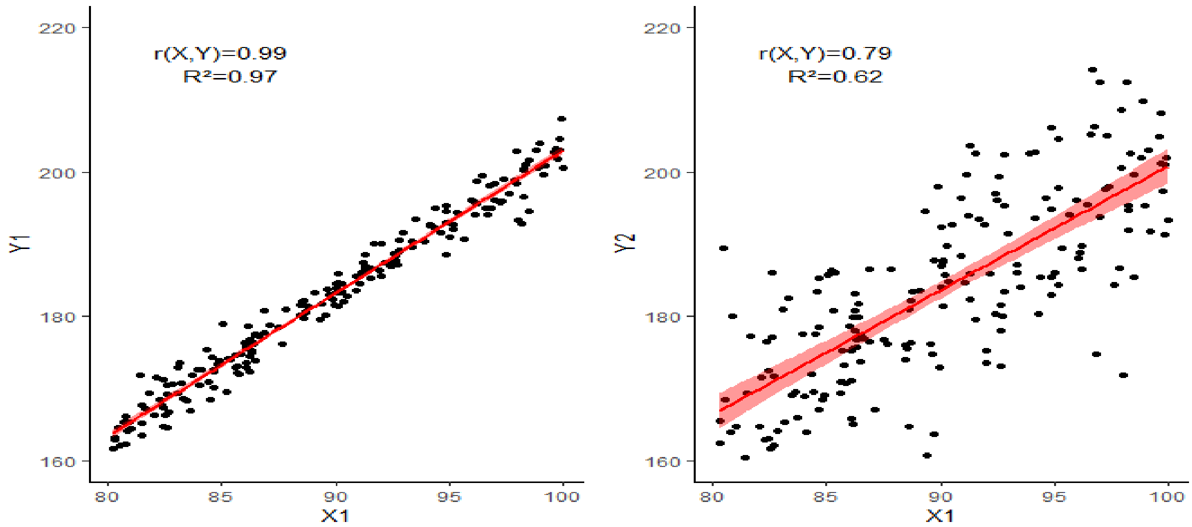
### II.2.4. Coefficient de détermination ($R^2$)

Le coefficient de détermination $R^2$ est à la fois la fraction des variations de la réponse expliquée par le modèle et un indice de la qualité de la régression :

$$R^2 = \frac{SCM}{SCT} = 1 - \frac{SCE}{SCT} \qquad \textbf{(II.6)}$$








$R^2 = 1$, indique un ajustement parfait, par contre un $R^2$ qui vaut 0 indique l'absence de relation entre la variable dépendante et la variable explicative. Cependant, dans le contexte de la régression multiple, cela pose le problème de la paramétrisation du modèle. Plus l'on ajoute de variables explicatives, plus le $R^2$ augmente. Pour éviter ce phénomène, on calcule le coefficient de détermination ajusté :

$$\boldsymbol{R^2_{ajusté}} = \mathbf{1} - \frac{SCE/_{n-p}}{SCT/_{n-1}} = \mathbf{1} - \left[\frac{(1-R^2)(n-1)}{n-p}\right]$$

La qualité du modèle sera donc d'autant meilleure que $R^2_{\text{ajusté}}$ sera proche de 1.

**II.2.3. Analyse statistique des coefficients (Test de Student)**

Les différents paramètres du modèle peuvent aussi être analysés statistiquement. L'hypothèse nulle ($H_0$) est alors étudiée pour chacun des coefficients, selon laquelle ceux-ci sont nuls. Pour ce faire, la statistique tcal qui dépend de l'estimation de l'écart type de ai, σ (ai) est alors calculée :

$$t_{cal} = \frac{a_i}{\sigma(a_i)}$$

Pour réaliser ce test au seuil α, il faut comparer la valeur de t de Student avec la valeur critique d'un Student à (n–p) degrés de liberté.

$\sigma(a_i)$ : Ecart type des coefficients

$$\sigma(a_i) = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{n-p}\right)}$$

On utilise une table de Student à (n–p) degré de liberté, α étant choisi, on lit dans cette table de Student la valeur t critique (α, n–p). On rejette $H_0$ lorsque tcal > tcrit.