المحور 4

التحليل الى مركبات أساسية

مقدمة الفصل

غالبا ما تعرف طريقة التحليل الى مركبات أساسية (أو كما يطلق عليها بالإنجليزية Principal Component Analysis PCA) على انها طريقة تساعد في تقليل البيانات أو تقنية تقليل الأبعاد. ويقصد هنا انه في الأساس نبدأ بمجموعة من المتغيرات، لنقل n، وفي نهاية عملية التحليل نحصل على عدد أقل ولكنه لا يزال يعكس نسبة كبيرة من المعلومات الواردة في مجموعة البيانات الأصلية. والهدف هو إنشاء العلاقات المتبادلة التي تحدث بين مجموعة من المتغيرات بغرض تقليل التعقيد الذي يعكس ما هو أساسي أو أكثر أهمية وبالتالي تحديد بعض العوامل التركيبية القليلة التي تزيد من التمييز بين الأفراد.

ويقدم هذا الفصل تفاصيل عن طريقة التحليل الى مركبات اساسية والتي يمكن أن تساعد الطالب في إعادة هيكلة بياناته على وجه التحديد عن طريق تقليل عدد المتغيرات. حيث سنتطرق الى مجموعة الإجراءات المحددة في تحليل العوامل من أجل الحصول على نظرة عامة أولية لطبيعة هذه الطريقة. كما اننا سنعرض الميزات الأساسية لهذه الطريقة وصياغتها الرياضية، والتمثيلات الرسومية، وجميع العناصر اللازمة لقراءة أو تفسير نتائج هذا النوع من التحليل. كما سنعرض أمثلة توضيحية تساهم في فهم كريقة عمل PCA. وفي نهاية الفصل سيتم تفصيل كيفية الحصول على هذه النتائج من خلال تطبيق برنامج SPSS.

1.3. طريقة التحليل الى مركبات أساسية

تم تصميمها لأول مرة بواسطة كارل بيرسون في عام 1901 ، وتم دمجه في الإحصاء الرياضي بواسطة Hotelling في عام 1933 (صواليلي، 2011)، ولم يتم استخدام طريقة التحليل الى مركبات الرئيسية إلا منذ ظهور وسائل الحوسبة الحالية واتساع استخدامها.

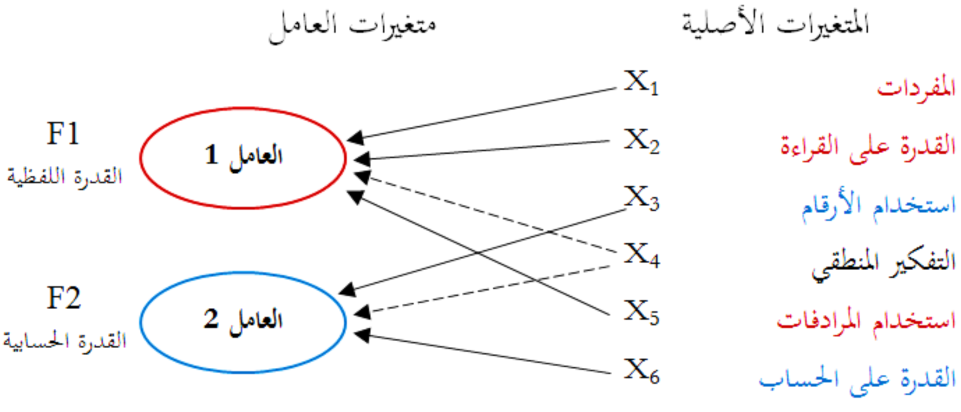
1.1.3. التعريف والاهداف

تحليل PCA هو أسلوب إحصائي مبسط متعدد المتغيرات يسمح بتحويل مجموعة من المتغيرات الأصلية المرتبطة ببعضها البعض، إلى مجموعة تركيبية من المتغيرات تسمى العوامل أو المكونات الأساسية. وتعتمد طريقة التحليل الى مركبات أساسية على إيجاد المتجهات المميزة لمصفوفة التباين والتباين المشترك للمتغيرات التوضيحية، مما يعني إيجاد الجذور المميزة لمصفوفة الارتباط. وتقدم طريقة PCA العديد من الاختلافات اعتمادا على التحولات التي تم إجراؤها على جدول البيانات (Jolliffe, 2002).

لذلك فان هذه الطريقة تضم مجموعة متنوعة من الإجراءات الإحصائية تعتبر أن هناك سلسلة من العلاقات الكامنة بين مجموعة من المتغيرات والتي تحدد ظاهرة معينة. لتحليل هذه العلاقات، أو لاكتشاف الأسباب غير الواضحة فيها وتفسير هيكلها يوفر تحليل PCA عددا أقل من الأبعاد الكامنة وراء مجموعة المتغيرات الأصلية. هذه العوامل ليست أكثر من متغيرات جديدة يتم الحصول عليها من المتغيرات الأصلية.

ويمكن تخطيط العلاقة بين المتغيرات الأصلية والعوامل من خلال المثال الموضح في الشكل الموالي:

الشكل رقم 3-01: العلاقة بين المتغيرات الأصلية والعوامل



تظهر طريقة تحليل PCA وجود متغيرات تقيس بشكل مشترك نفس الظاهرة أو العديد منها، أي أن العوامل أو الأبعاد الموجودة هي مجموعات (خطية) من المتغيرات الأصلية، وسوف يساهم كل من هذه المتغيرات في تكوين متغيرات العامل الجديدة. لذلك فإن النموذج الرياضي الذي يبنى عليه تحليل PCA هو النموذج الخطي ويحاول

شرح الارتباطات والتغيرات لمجموعة من المعلومات مع عدد أقل من المتغيرات الأساسية الجديدة التي تأتي من مجموعة المتغيرات الأصلية.

من الناحية الهندسية تتوافق العوامل مع المحاور المتعامدة مع بعضها البعض والتي تناسب شكل سحابة النقاط التي تشكل مجموعة من الأفراد في فضاء المتغيرات.

ومنه يمكننا القول ان تحليل PCA هو طريقة جبرية إحصـائية نحاول من خلالها تجميع وإعطاء بنية للمعلومات الموجودة في مصفوفة البيانات. ويتكون الإجراء من توحيد هذه المصفوفة في مساحة نحاول العثور فيها على محاور أو أبعاد (تسمى أيضا المكونات أو العوامل) والتي باعتبارها مزيجا خطيا من المتغيرات التي تم ادخالها:

- لا تؤدي الى فقدان المعلومات الأصلية وبالتالي الحفاظ على التباين الكلي.
- لا يوجد علاقة ارتباط أي أن المتغيرات مستقلة خطيا مما يضمن هيكلة المتغيرات الأولية.
- لها أهمية تفاضلية ومعروفة في شرح التباين الكلي.

والهدف الأساسي هو تقليل عدد المتغيرات الاصلية لهذا يتم أخذ المحاور أو المركبات الموجودة كمتغيرات جديدة، وبالتالي تقوم بتبسيط وتقليل وهيكلة المعلومات الأولية. ومنه يمكن القول ان التحليل إلى مركبات أساسية يهدف الى تفسير الظواهر الاقتصادية والاجتماعية عن طريق معطيات مختصرة ومختزلة تمثل مجموعة علاقات بين عدد من المتغيرات مجمعة في مركبات أساسية.

2.1.3. تطبيق طريقة التحليل الى مركبات أساسية

ويمكن تقسيم عملية تحليل PCA إلى أربع (4) مراحل أساسية تتمثل في:

- **اولا:** اختيار مجموعة المتغيرات الامر يعد أمرا اساسيا، ويكون ذلك وفقا لنموذج تحليل دقيق. ويجب أن يكون هذا الاختيار متناسقا مع شروط تطبيق طريقة PCA ويجب استيفاء بعض الشروط كالارتباط بين بين المتغيرات التي يتم إنشاؤها من خلال فحص مصفوفة الارتباط.
- **ثانيا:** يتم بعد ذلك استخراج المحاور أو المركبات مع حساب القيم الذاتية أو الفروق المدرجة في كل من المحاور التي تحدد التباين الموضح من قبل كل منها ويتم تحديد عدد العوامل التي يجب الاحتفاظ بها في التحليل.
- **ثالثا:** يتم تفسير العوامل أو المكونات من حساب الارتباط بينها وبين المتغيرات الأصلية ، القواسم المشتركة,
- **رابعا:** بعد التأكد من صحة النتائج ، يمكننا حساب درجات أو قيم العوامل للأفراد في متغيرات العوامل للحصول على تحليلات إضافية مع إجراءات أخرى.

وسوف ندرج فيما يلي مثال نوضح فيه كيفية تطبيق طريقة PCA.

2.3. خطوات التحليل الى مركبات اساسية

يتم هذا التحليل انطلاقا من مصفوفة المعطيات والتي تمثل المتغيرات الظاهرة المدروسة وكذا عدد أفراد العينة وتتم خطوات هذا التحليل من خلال:

1.2.3. بناء مصفوفة البيانات وحساب المتوسطات والانحرافات

وهي مصفوفة البيانات التي تتكون منn من الاسطر والتي تمثل الأفراد وعدد m من الاعمدة و التي تمثل المتغيرات ومن أجل اجراء التحليل العاملي يتم تحويل هاته المتغيرات الى قيم معيارية :

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}$$

وتشكل المصفوفة X جدول البيانات أو الملاحظات.

من اجل ذلك نحتاج الى حساب المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية.

ويمكن الاعتماد على معطيات مثال التالي والذي يمثل علامات ســـتة طلاب في ثلاث مقاييس هي الاقتصــــاد، الرياضيات، والاحصاء.

الرقم	الاقتصاد	الرياضيات	الاحصاء
01	12	11	11
02	10	11	12
03	13	12	13
04	10	09	13
05	12	09	12
06	09	08	11

المتوسط الحسابي

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{ij}$$

الانحراف المعياري

$$\partial_j=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_{ij}-\bar{X}_J\right)^2}$$

نقوم بتطبيق الصيغ المبينة اعلاه لحساب قيم المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية، ونحصل على النتائج المبينة في الجدول التالي:

الجدول رقم 3-01: قيم المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية

الرقم	الاقتصاد X 1	الريضيات X2	الإحصاء X3	$(X_{ij}-\overline{X_J})^2$ الاقتصاد	$(X_{ij}-\overline{X_J})^2$ الرياضيات	$(X_{ij}-\overline{X_J})^2$ الاحصاء
01	12	11	11	1	1	1
02	10	11	12	1	1	0
03	13	12	13	4	4	1
04	10	09	13	1	1	1
05	12	09	12	1	1	0
06	09	08	11	4	4	1
المجموع	**66**	**60**	**72**	**12**	**12**	**4**
$\bar{x}$	11	10	12	2	2	0.667
∂	1.414	1.414	0.816	-	-	-

ملاحظة

الانحراف المعياري للمتغير الثالث هو الأقل وعليه فان السلسلة الإحصائية لهذا المتغير هي الأكثر استقرار أي متوسطها الحسابي يكون اكثر تعبيرا لهذه السلسلة.

2.2.3. حساب مصفوفة احداثيات الافراد ومصفوفة معاملات الارتباط

حتى نحصل على العلاقة الموجودة بين المتغيرات المدروسة نحتاج الى ترجمتها عن طريق مصفوفة التباين المشترك أو مصفوفة الارتباط قبل ذلك نقوم **بحساب المصفوفة والتي تمثل احداثيات الافراد** وهي المصفوفة ذات القيم المعيارية (ويتم تحويل مصفوفة المعطيات الى مصفوفة معيارية لجعل المعطيات متجانسة). ويعبر عنها بالصيغة التالية:

$$\widehat{X_{\iota J}}=\frac{x_{ij}-\bar{x}_j}{\partial_j}$$

بحيث تصبح المصفوفة X بالشكل التالي:

$$\widehat{X_{\iota J}}=\begin{pmatrix} \dfrac{x_{11}-\bar{x}_1}{\partial 1} & \cdots & \dfrac{x_{1m}-\bar{x}_m}{\partial m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{x_{n1}-\bar{x}_1}{\partial 1} & \cdots & \dfrac{x_{nm}-\bar{x}_m}{\partial m} \end{pmatrix}$$

ونحصل على المصفوفة $\widehat{X_{ij}}$ التالية:

$$\widehat{X_{ij}} = \begin{pmatrix} 0.707 & 0.707 & -1.22 \\ -0.707 & 0.707 & 0 \\ 1.414 & 1.414 & 1.22 \\ -0.707 & -0.707 & 1.22 \\ +0.707 & -0.707 & 0 \\ -1.414 & 1.414 & -1.22 \end{pmatrix}$$

- **حساب مصفوفة معاملات الارتباط C** كما يلي:

$$C=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

ملاحظة

تجدر الاشارة الى أن $r_{jj}=1$ هذا يعني ان: $r_{11}=r_{22}=r_{33}=1$ ، اذن عناصر القطر تساوي الواحد. بالإضافة الى ذلك فان: $r_{jk}=r_{kj}$ أي يمكننا القول مثلا $r_{12}=r_{21}$

نقوم بحساب قيم معاملات الارتباط r_{jk} بالطريقة التالية:

$$r_{jk}=\frac{1}{n}\frac{\sum(X_{ij}-\bar{X}_j)(X_{ik}-\bar{X}_k)}{\partial_j\partial_k}$$

من معطيات الجدول نجد:

1 تمثل الفرق بين العمود الأول لمختلف الصفوف و المتوسط الحسابي للعمود الأول (العمود يمثل المتغير)

2 تمثل الفرق بين العمود الثاني لمختلف الصفوف و المتوسط الحسابي للعمود الثاني

3 تمثل الفرق بين العمود الثالث لمختلف الصفوف و المتوسط الحساب

ي للعمود الثالث

نتحصل على النتائج في الجدول التالي:

1	2	3	1*1	1*2	1*3	2*2	2*3	3*3
1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1
-1	1	0	1	-1	0	1	0	0
2	2	1	4	4	2	4	2	1

−1	−1	1	1	1	−1	1	−1	1
1	−1	0	1	−1	0	1	0	0
−2	−2	−1	4	4	2	4	2	1
$\sum(X_{ij}-\bar{X}_j)(X_{ik}-\bar{X}_k)$			12	8	2	12	2	4

مثلا بحساب معاملات الارتباط r_{11} و r_{12} نجد:

$$r_{11}=\frac{1}{6}\frac{\sum(X_{11}-\overline{X1})(X_{11}-\overline{X1})}{\partial_1\partial_1}=\frac{1}{6}\frac{12}{1.414*1.414}=1$$

$$r_{12}=\frac{1}{6}\frac{\sum(Xi_1-\overline{X1})(Xi_2-\overline{X2})}{\partial_1\partial_2}=\frac{1}{6}\frac{8}{1.414*1.414}=0.667$$

$$r_{13}=\frac{1}{6}\frac{\sum(Xi_1-\overline{X1})(Xi_3-\overline{X3})}{\partial_1\partial_3}=\frac{1}{6}\frac{2}{1.414*0.816}=0.289$$

بنفس الطريقة نحسب باقي القيم لنتحصل على المصفوفة التالية:

$$C=\begin{pmatrix}1 & 0.667 & 0,289\\ 0.667 & 1 & 0.289\\ 0.289 & 0.289 & 1\end{pmatrix}$$

نلاحظ ان كل القيم محصورة بين 1 و 1−

3.2.3. تحديد القيم الذاتية والاشعة الذاتية

سنقوم أولا بالتذكير بخصائص القيم الذاتية للمصفوفة:

- نقول عن λ انها قيمة ذاتية للمصـــــفوفة C اذا وفقط اذا كان $|C-\lambda I_p|=0$، حيث I_p هو عنصر الوحدة بالنسبة لعملية الجداء
- نقوم بحساب القيم الذاتية لقيم المصفوفات المربعة فقط وترتيبها ترتيبا تنازليا
- مجموع القيم الذاتية = مجموع عناصر القطر للمصفوفة C ونكتب: $\sum_{i=1}^{n}\lambda i=trace\ C$

حساب $|C-\lambda I_p|=0$

$$\left|\begin{pmatrix}1 & 0.667 & 0.289\\ 0.667 & 1 & 0.289\\ 0.289 & 0.289 & 1\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right|=0$$

$$\left|\begin{pmatrix}1-\lambda & 0.667 & 0.289\\ 0.667 & 1-\lambda & 0.289\\ 0.289 & 0.289 & 1-\lambda\end{pmatrix}\right|=0$$

بعد الحساب نجد: $1.86=\lambda_1$ ؛ $0.81=\lambda_2$ ؛ $0.33=\lambda_3$

لحساب الاشعة الذاتية نقوم بتعويض كل قيمة من قيم الاشعة الذاتية التي تم حسابها ونجد:

ملاحظة

نقول عن الشـــعاع μ_n حيث $\mu_n=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\end{pmatrix}$ شـــعاع ذاتي لـــــ C المرفوقة بالقيم الذاتية λ_n ، اذا وفقط اذا كانت :

$$\left(C-\lambda_n I_p\right)\mu_n=0$$

عند $\lambda_1= 1.86$ فان $\left(C-\lambda_1 I_3\right)\mu_1=0$

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0.667 & 0.289\\ 0.667 & 1 & 0.289\\ 0.289 & 0.289 & 1\end{pmatrix}-1.86\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0.667 & 0.289\\ 0.667 & 1 & 0.289\\ 0.289 & 0.289 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1,86 & 0 & 0\\ 0 & 1,86 & 0\\ 0 & 0 & 1,86\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$-0.86\mu_1+0.667\mu_2+0.289\mu_3=0 \qquad (1)$$

$$0.667\mu_1-0.86\mu_2+0.289\mu_3=0 \qquad (2)$$

$$0.289\mu_1+0.289\mu_2-0.86\mu_3=0 \qquad (3)$$

لو نطرح العلاقة 1 من العلاقة 2 نجد : $-1.527\mu_1+1.527\mu_2=0$ معناه $\mu_1=\mu_2$

لو نضرب العلاقة 2 في 0,775 ثم نجمعها مع العلاقة 1 نحصل على : $-0.343\mu_1+0.513\mu_3=0$

معناه $\mu_3=0.67\mu_1$

في الأخير نجد:

$$\mu_1=\begin{pmatrix}0.639\\ 0.639\\ 0.429\end{pmatrix}$$

بنفس الطريقة عند كل من القيمتين الذاتيتين المتبقيتين: 081 و 0.33

نجد على التوالي: $\mu_2=\begin{pmatrix}-0.303\\ -0.303\\ 0.906\end{pmatrix}$ و $\mu_3=\begin{pmatrix}0.707\\ -0.707\\ 0\end{pmatrix}$

ان تحليل المصفوفة C يعطي لنا p قيمة ذاتية مرتبة ترتيبا تنازليا و p اشعة ذاتية متعامدة فيما بينها في الفضاء.

حيث ان المحور الأول F1 هو احســـن محور على الاطلاق حيث يحتوي على اكبر نســـبة من المعلومات ويعطي احسن تمثيل بياني وشعاع التوجيه لهذا المحور هو μ_1 (شعاع التوجيه للمحور F2 هو μ_2، الخ).

تجدر الاشارة هنا الى انه بعد الحصول على القيم الذاتية و الاشعة الذاتية لمصفوفة الارتباط يتم تحديد المركبات الاساسية. ويتم تحديد عدد المركبات الاساسية كأقصى عدد ممكن والذي يكون مساويا لعدد المتغيرات في مصفوفة الارتباط . كما انه يتم اجراء اختبارات صلاحية عينة المعطيات المدروسة من خلال وجود ارتباطات كافية ما بين المتغيرات للظاهرة المدروسة ومن بين هذه الاختبارات:

الجدول رقم 3-02: أهم اختبارات الصلاحية

الاختبار	الدور
اختبار بارتلت Bartlett	بفحص مصفوفة الارتباط و اختبار فرضية العدم
اختبار كيزر-ماير-أولكن KMO	يبين هذا الاختبار ان الارتباطات الجزئية بين المتغيرات ليست ضعيفة وتكون قيمة هذا المعيار محصورة بين 0.3 و 0.7

أما فيما يخص المعايير المستخدمة في تحديد عدد المركبات الاساسية يتم اختيار هذه المعايير طبقا لنسبة التباين المفسر من قبل العوامل والتي تبين مقدار المحافظة على المعلومات من العوامل الاساسية ويوجد ثلاث معايير أساسية:

- معيار القيم الذاتية (قاعدة guttman-kaiser): تمثل القيم الذاتية كمية المعلومات الملتقطة من طرف العامل بحيث يتم اختيار العوامل التي لها قيمة ذاتية أكبر.

- اختبار الانعطاف (coude de test) يتم اختيار العوامل التي تقع قبل مرحلة الانعطاف الذي يليه انخفاض مستمر من منحنى القيم الذاتية.

- معيار قيمة التباين المشروح: يتم ملاحظة قيمة التباين المشروح من قبل العوامل وهذا من اجل ضمان أن العوامل المستخلصة تشرح بأكبر معنوية ممكنة للتباين تكون محددة مسبقا.

ملاحظة

قبل اجراء تفسير النتائج للمركبات الاساسية عادة ما يتم اجراء **تدوير للمحاور** من أجل التعرف على الارتباطات القوية بين المتغيرات. ويهدف تدوير المحاور الى تقليل المسافة بين المتغيرات و المحاور بحيث أن كل عنصر يكون مرتبط فقط بمركبة أساسية واحدة. مع العلم أن التدوير لا يمكنه تغيير نسبة التباين المفسر بالمركبات الاساسية قبل التدوير ويكون التدوير اما متعامدا أو مائلا بحيث تكون العوامل في التدوير المتعامد غير مرتبطة وهذا ما يقود الى تفسير جيد للنتائج على عكس التدوير المائل و التي يكون فيه ارتباط العوامل مع المتغيرات مما يجعل التفسير أكثر صعوبة. ويكون التحليل الى مركبات أساسية المتعامد بأحد الاشكال التالية: varimax، quartimax

4.2.3. تمثيل الافراد والمتغيرات على المحاور

نسبة التمثيل على المحور تكون كالتالي حيث:

المحاور	القيم الذاتية	نسب التمثيل	النسب التجميعية
1	1.86	$\frac{1.86}{3}.100 = 62$	62
2	0.81	$\frac{0.81}{3}.100 = 27$	89
3	0.33	$\frac{0.33}{3}.100 = 11$	100
المجموع	**3**	**100**	-

من الجدول نقول ان 62% من البيانات ممثلة على المحور الأول كما ان 27% من البيانات ممثلة على المحور الثاني. ويمكننا القول أيضا ان 89% من البيانات (27+62) ممثلة على المستوى الأول وهي نسبة معتبرة يمكن الاعتماد عليها في التحليل والدراسة.

والان سنقوم بحساب احداثيات كل الافراد على المحور بالطريقة التالية:

$$F_n = \hat{X}^* \mu_n \qquad\qquad F_1 = \hat{X}\mu_1$$

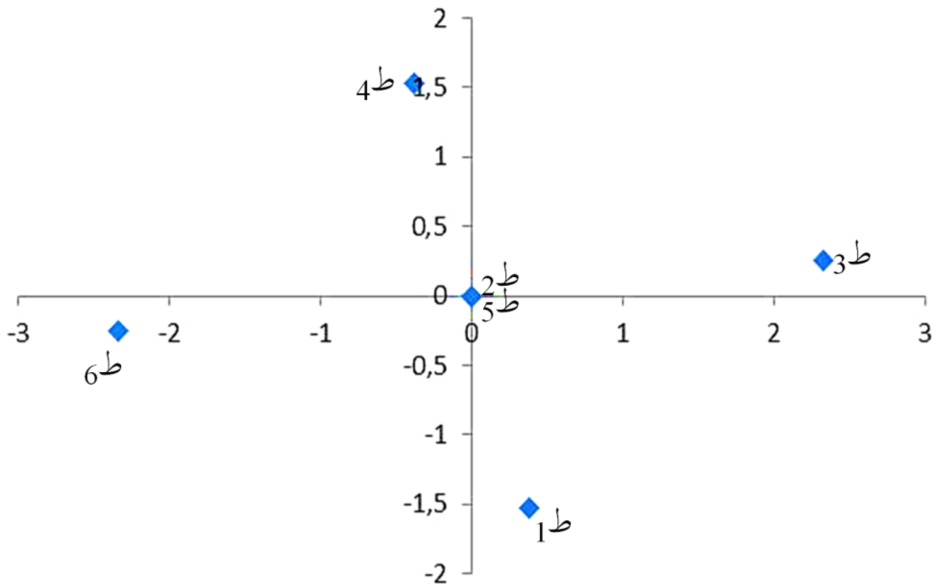
$$F_1 = \begin{pmatrix} 0.707 & 0.707 & -1.22 \\ -0.707 & 0.707 & 0 \\ 1.414 & 1.414 & 1.22 \\ -0.707 & -0.707 & 1.22 \\ +0.707 & -0.707 & 0 \\ -1.414 & 1.414 & -1.22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.639 \\ 0.639 \\ 0.429 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0.378 \\ 0 \\ 2.332 \\ -0.378 \\ 0 \\ -2.332 \end{pmatrix}$$

بنفس الطريقة نحسب F2 وF3 ونبوب النتائج في الجدول التالي :

الافراد	F_1	F_2	F_3
1	0.378	-1.535	0
2	0	0	-1
3	2.332	0.249	0
4	-0.378	1.535	0
5	0	0	1
6	-2.332	-0.249	0

ومن ثم نقوم بتمثيل الافراد على المستوى الاول: (F_1، F_2)



ملاحظة

كلما كانت النقاط بعيدة عن المركز تتزايد جودة تمثيلها على المحور والعكس. مثلا: نقول ان الفرد 3 و6 ممثلين احسن تمثيل على المحور الأول بينما الفردين 1 و4 ممثلين احسن تمثيل على المحور الثاني

بعد ذلك نقوم بحساب G والتي تعبر عن احداثيات كل المتغيرات على المحور حيث: $G_n = \sqrt{\lambda_n} * \mu_n$

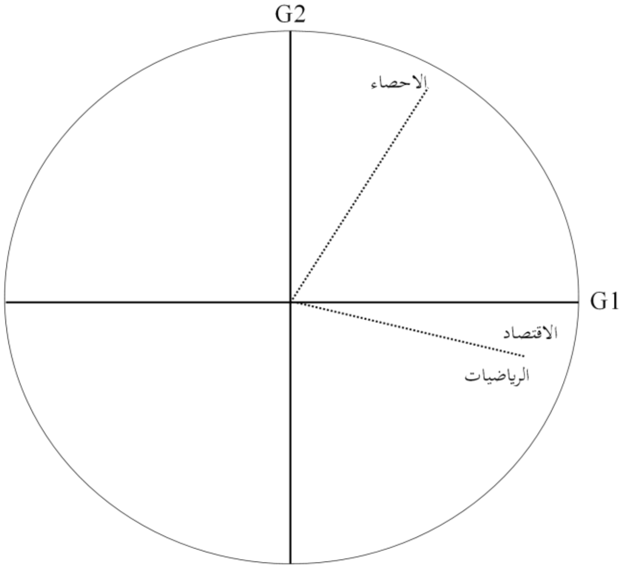
$$G_1 = \sqrt{\lambda_1} * \mu_1 = \sqrt{1.86} * \begin{pmatrix} 0.639 \\ 0.639 \\ 0.429 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0.871 \\ 0.871 \\ 0.584 \end{pmatrix}$$

بنفس الطريقة نحسب بقية القيم ونلخص النتائج في جدول:

المتغيرات	G_1	G_2	G_3
الاقتصاد	0.871	-0.272	0.407
الرياضيات	0.871	-0.272	-0.407
الاحصاء	0.584	0.815	0

ونمثل ذلك بيانيا كما يلي:



ملاحظة

-كل المتغيرات تقع على سطح دائرة مركزها g ونصف قطرها 1 و لا يمكن ان تخرج عن هذا السطح.

-كلما كانت المتغيرات بعيدة عن المركز تزداد جودة تمثيلها.

-بالنسبة لهذا المثال نلاحظ ان كل المتغيرات بعيدة عن المركز وبالتالي فهو ذا جدوة عالية ومقبولة في الدراسة