المـــحور2: القيم الذاتية والأشعة

1. القيم الذاتية للمصفوفة

نقول عن λ انها قيمة ذاتية للمصفوفة A اذا كان:

$$|A - \lambda I| = 0$$

وتسـمى هذه المعادلة بالمعادلة المميزة للمصـفوفة A. ولكي تكون λ قيمة ذاتية يجب ان يكون لهذه المعادلة حل غير صفري.

مثال: سوف نقوم بحساب القيم الذاتية للمصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \rightarrow \left|\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right|$$

$$= \left|\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix} 5-\lambda & -3-0 \\ -6-0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -6 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -6 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(2-\lambda) - (6)(3)$$

$$= 10 - 5\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 18$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda - 8$$

معادلة من الدرجة 2 حلها بحساب المميز

بحل المعادلة نجد: $\lambda = -1 \quad ; \quad \lambda = 8$

2. الاشعة الذاتية

اذا كانت A مصفوفة وكانت $\lambda \in R$ ، λ هي قيمة ذاتية للمصفوفة A .

اذا وجد $X \in R^n$ و $X \neq 0$ حيث $AX = \lambda X$ وفي هذه الحالة يسمى X بالشعاع الذاتي للقيمة الذاتية λ، ونكتب : $|A - \lambda I|x = 0$

ان الاشعة الذاتية للمصفوفة A المناظرة للقيمة الذاتية λ هي الاشعة الذاتية التي تحقق العلاقة $AX = \lambda X$ بطريقة متكافئة. الاشعة الذاتية المناظرة للقيمة الذاتية λ هي الاشعة الصفرية في فضاء الحلول للمعادلة :

$$|A - \lambda I|x = 0$$

والذي يسمى بفضاء الحلول للفضاء الذاتي للمصفوفة A المناظرة للقيمة الذاتية λ.

من المثال السابق سنحاول ايجاد الاشعة الذاتي:

لما: $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -6 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-(-1) & -3 \\ -6 & 2-(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-6x_1 + 3x_2 = 0$$

نقل $3x_2$ الى الطرف الثاني مع تغيير الاشارة

$$-6x_1 = -3x_2$$

نعوض في أحد المتغيرات x_1 بأي رقم ماعدا 0

$$x_1 = 1$$

$$(-6)(1) = -3x_2$$

بقسمة الطرفين على -3

$$\frac{-6}{-3} = \frac{-3x_2}{-3}$$

$$x_2 = 2$$

ومنه الشعاع الذاتي هو: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

بنفس الطريقة نحسب الشعاع الذاتي للقيمة الذاتية الاخرى $\lambda = 8$ ونجد:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$