المــحور1: عمليات على جبر المصفوفة

أولا: التذكير بجبر المصفوفات

1. تعريف المصــفوفة: المصــفوفة عبارة عن تنظيم عددي (مجموعة من الأعداد الحقيقية) مؤلف من: n . m عنصرا، مرتبة في جدول مكون من m صف ، n عمودا، حيث m ، n عددان طبيعيان ومحصورة بين قوسين من الشكل [ ]. اذا كانت المصفوفة تحتوي صفوفا عددها m وأعمدة عددها n نقول عنها إنها مصفوفة من الرتبة m x n. والشكل العام للمصفوفة هو:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

2. انواع المصفوفات:

<u>مصفوفة مستطيلة:</u> (مصفوفة من النوع m × n حيث m ≠ n) مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>مصفوفة مربعة:</u> Square Matix هي المصفوفة من النوع n × n أي أن عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها، ونجد فيها:

- المصفوفة القطرية Diagonal Matrix : جميع عناصرها أصفار ما عدا العناصر الواقعة على القطر الاساسي فيكون أحدها على الأقل مغايرا للصفر. مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- مصفوفة الوحدة Unit Matrix: هي مصفوفة قطرية يكون فيها كل من العناصر الواقعة على القطر مساويا للواحد. مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>مصفوفة صفرية Null Matrix</u>: المصفوفة من الرتبة m × n وجميع عناصرها أصفار (امثلة مصفوفة صفرية مستطيلة، مصفوفة صفرية مربعة).مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

مبدلة المصــفوفة Transpose of a Matrix: أذا كان لدينا المصــفوفة A من الرتبة m × n فان مبدلة A تكون من الدرجة n× m ويرمز لها بالرمز A^t و يمكن الحصول عليها بإبدال الصفوف بالأعمدة.

مثال:

$$A= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{------}> \ A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ثانيا. العمليات على المصفوفات

جمع (طرح) مصــفوفتين: إذا كانت A و B مصــفوفتان فانه يمكننا حســاب A+B (أو A–B)، اذا تحقق ما يلي: لهما نفس الرتبة وهنا نجمع (او طرح) المدخلات المتناظرة.

مثال:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

جداء مصـفوفتين: قبل اجراء عملية ضـرب مصـفوفتين علينا التحقق من الشـرط التالي: عدد الاعمدة في المصـفوفة الاولى تساوي عدد الصفوف في المصفوفة الثانية. ونحصل على النتيجة اذا ضربنا عناصر صفوف المصفوفة A في عناصـر الاعمدة المناظرة لها من المصـفوفة B وجمعنا نواتج الضـرب. رتبة المصـفوفة A.B يتحدد تماماً من : عدد صفوف A وعدد أعمدة B.

مثال: جداء مصفوفة بـمبدلة مصفوفة: $A.A^t$

$$A \times A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}$$

ملاحظة:

- جداء مصفوفة بمبدلة مصفوفة تعطينا مصفوفة مربعة ومتناظرة و تكون قيمها دائما أكبر او تساوي 0
- تستخدم $A.A^t$ في تحليل بالمركبات الأساسية

جداء مصفوفة في ثابت: حاصل ضرب مصفوفة بعدد حقيقي هو مصفوفة من النوع نفسه، ولكن العناصر تغيرت حيث نضـرب كل منها بالعدد الثابت. ونشـير هنا الى ان قسـمة المصـفوفة على عدد حقيقي نفس مفهوم ضـربها بعدد حقيقي. مثال: لدينا مصـفوفة A حيث

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

و γ عدد ثابت حيث :

$$\gamma \times A = \gamma \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 3\gamma \\ -\gamma & 0 \\ 3\gamma & 2\gamma \end{pmatrix}$$

ثالثا: حساب المحدد

تعريف: يمكن تعريف المحدد على أنه تطبيق خطي معرف من الفضاء الشعاعي $\mathcal{M}_n(K)$ نحو K ، نرمز لمحدد المصفوفة بالرمز |A| أو det (A).

امثلة :

محدد من الدرجة:	الاولى	الثانية	الثالثة
	$\begin{vmatrix} 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

مثال: لتكن المصفوفة المربعة من الدرجة الثانية المعرفة بالشكل التالي: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

نحسب محدد المصفوفة كما يلي:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (1*5) - ((-1)*2) = 5-(-2)= 5+2 = 7$$

مثال :لتكن المصفوفة المربعة من الدرجة الثالثة المعرفة بالشكل التالي: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ نحسب محدد المصفوفة كما يلي:

$$\det(A) = 2 \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} -(-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -13$$