1- توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة

نوع السحب	
حالة السحب بإرجاع فإن عدد العينات الممكنة يساوي N^n	الوسط الحسابي لتوزيع المعاينة $E(\bar{X}) = \mu = \mu_{\bar{X}}$ **تباين توزيع المعاينة** $V(\bar{X}) = \sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n}$
حالة السحب بدون إرجاع وترتيب غير مهم . $C_N^n = \frac{N!}{(N-n)!n!}$	الوسط الحسابي لتوزيع المعاينة $E(\bar{X}) = \mu = \mu_{\bar{X}}$ **تباين توزيع المعاينة** $V(\bar{X}) = \sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1}$ و $\frac{n}{N} > 0.05$
	في حالة مجتمع طبيعي
عندما يكون التباين σ^2 معلوم	**نظرية**: إذا كان لدينا مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط حسابي μ وتباين σ^2، فإن متوسط العينة المسحوبة منه عشوائيا تتبع أيضا التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu_{\bar{X}}$ وتباين $\sigma^2_{\bar{x}}$، ونكتب: $x \longrightarrow N\ (\mu, \sigma^2)$ فإنه بالضرورة $\bar{X} \longrightarrow N\ (\mu_{\bar{X}}, \sigma^2_{\bar{x}})$ وستتوزع الإحصائية $\bar{X}$ توزيعا طبيعيا معياريا تبعا للإحصاءة Z كما يلي: $Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\delta \bar{X}} \longrightarrow N\ (0, 1)$
عندما يكون التباين σ^2 مجهول و $n \geq 30$	**نظرية**: إذا أخذنا عينات عشوائية حجمها ($n \geq 30$) من مجتمع يخضع للتوزيع الطبيعي وكانت σ^2 مجهولة، S^2 تمثل تباين العينة، فإن المتغير العشوائي $\bar{X}$ سيخضع لتوزيع قريب من التوزيع الطبيعي المعياري بمتوسط حسابي قدره $\mu_X = \mu_{\bar{X}}$ وتباين قدره $\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n} \approx \frac{S^2}{n-1}$. وتعطى العلاقة للإحصاءة Z كما يلي: $Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \longrightarrow N\ (0, 1)$ إذا كان المجتمع محدود والسحب مع عدم الإرجاع و $\frac{n}{N} > 0.05$ نضيف للعلاقة السابقة معامل الإرجاع وتصبح العلاقة كالآتي: $\sigma^2_{\bar{x}} \approx \frac{S^2}{n-1} \left(\frac{N-n}{n-1}\right)$

عندما يكون التباين σ^2 مجهول و$n< 30$	**نظرية**: إذا أخذنا عينات عشوائية حجمها($n<30$) من مجتمع يخضع للتوزيع الطبيعي وكانت σ^2 مجهولة،S^2 تمثل تباين العينة فإن المتغير العشوائي $\bar{X}$ لن يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري، وإنما سيخضع لتوزيع ستودنت(t) بدرجة حرية $n-1$ ، أما معلمتي توزيع المتغير العشوائي $\bar{X}$: متوسط الحسابي $\mu_{\bar{X}} = \mu_X$ ، وتباين قدره $\delta^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{S^2}{n-1}$. وتعطى العلاقة للإحصاءة T كما يلي: $$T = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{x}}} \approx \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}$$ -إذا كان المجتمع محدود والسحب مع عدم الإرجاع و$\frac{n}{N} > 0.05$ نضيف للعلاقة السابقة معامل الإرجاع وتصبح العلاقة كآلاتي: $\sigma^2_{\bar{x}} \approx \frac{S^2}{n-1}\left(\frac{N-n}{n-1}\right)$
مجتمع غير طبيعي	**نظرية النهاية المركزية**: إذا كان لدينا مجتمع ذا متوسط حسابي μ وتباينσ^2، لكن ليس بالضرورة أن يتبع المجتمع التوزيع الطبيعي، فإن متوسط العينة المسحوبة منه عشوائيا يؤول للتوزيع الطبيعي عندما يكون حجم العينة كبيرا أي $n> 30$.

3- توزيع المعاينة لنسبة

نظرية: لتكن X متغيرة عشوائية تمثل مجتمع ما غير محدود، تخضع لتوزيع ثنائي الحدين بمتوسط حسابي $\mu = np$ وتباين $\sigma^2 = npq$، فتوزيع المعاينة لنسبة العينة هو توزيع قريب من التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي $\mu_{\grave{p}} = p$ وانحراف معياري $\sigma_{\grave{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$.

لذا فإن قيمة الإحصاءة z للمتغير العشوائي $\grave{p}$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$Z = \frac{\grave{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

ملاحظة: عندما يكون المجتمع محدودا والمعاينة بدون إرجاع وتحقق $\frac{n}{N} > 0.05$ فإنه يمكن الأخذ بعين الاعتبار معامل الإرجاع عند حساب الانحراف المعياري وفق العلاقة التالية:

$$\sigma_{\grave{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

4- توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي مجتمعين

4-1 عندما يكون تبايني المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 معلومين

تتطلب بعض الدراسات الإحصائية مقارنة متوسطين حسابين لمجتمعين ومعرفة الفرق بينهما$(\mu_1 - \mu_2)$، فإذا كان المجتمع الأول يتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط μ_1 وتباين σ_1^2 معلوم، والمجتمع الثاني يتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط μ_2 وتباين σ_2^2 معلوم أيضا، قمنا بسحب عينة عشوائية من المجتمع الأول حجمها n_1 ومتوسطها الحسابي $\bar{X}_1$، ومن المجتمع الثاني عينة عشوائية حجمها n_2 ومتوسطها الحسابي $\bar{X}_2$ وكانت العينتان مستقلتين، إن توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطي العينتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ سيكون له توزيع قريب من التوزيع الطبيعي بمتوسط

$$\boldsymbol{\mu}_{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)} = \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2$$ وتباين $$\boldsymbol{\sigma}^2_{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)} = \frac{\boldsymbol{\sigma}^2{}_1}{\mathbf{n}_1} + \frac{\boldsymbol{\sigma}^2{}_2}{\mathbf{n}_2}$$

وبالتالي فإن المتغير Z يعطى بالعلاقة التالية:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\boldsymbol{\sigma}^2{}_1}{\mathbf{n}_1} + \frac{\boldsymbol{\sigma}^2{}_2}{\mathbf{n}_2}}}$$

4-2 عندما يكون تبايني المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين وحجم العينتين كبير

يتم تقدير الانحراف المعياري للفرق$(\bar{\boldsymbol{X}}_1 - \bar{\boldsymbol{X}}_2)$ في حالة تبايني المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين وحجم العينتين كبير باستخدام تباين العينتين $\boldsymbol{S}_1^2$، $\boldsymbol{S}_2^2$ ، حيث يخضع توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي في هذه الحالة إلى التوزيع الطبيعي، بمتوسط $\boldsymbol{\mu}_{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)} = \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2$ وتباين $\boldsymbol{\sigma}^2_{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)} = \frac{\boldsymbol{S}^2{}_1}{\mathbf{n}_1-\mathbf{1}} + \frac{\boldsymbol{S}^2{}_2}{\mathbf{n}_2-\mathbf{1}}$

وبالتالي فإن المتغير Z يعطى بالعلاقة التالية:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S^2{}_1}{\mathrm{n}_1-1} + \frac{S^2{}_2}{\mathrm{n}_2-1}}}$$

4-3 توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي مجتمعين مجهولين التباين وحجم العينتين صغير

هنا نميز حالتين:

الحالة الأولى: عندما يكون التباينان متساويين $\boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{\sigma}_1^2 = \boldsymbol{\sigma}_2^2$

يجب في هذه الحالة نقدر الانحراف المعياري للفرق$(\bar{\boldsymbol{X}}_1 - \bar{\boldsymbol{X}}_2)$ باستخدام تباين العينتين $\boldsymbol{S}_1^2$، $\boldsymbol{S}_2^2$. وبما أن تباين المجتمعين متساوين يتم تقدير التباينين بالتباين التجميعي أو التباين المشترك $S^2{}_P$ والذي يعرف بالعلاقة التالية:

$$S_P^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{(n_1-1)+(n_2-1)}$$

ويخضع توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي في هذه الحالة إلى توزيع ستودنت ، وتعطى إحصاءة ستودنت بدرجة حرية n_1+n_2-2 كالتالي:

$$T=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

الحالة الثانية: عندما يكون التباينان غير متساويين $\sigma_2^2 \neq \sigma_1^2$

في هذه الحالة نقدر الانحراف المعياري للفرق$(\bar{X}_1-\bar{X}_2)$ باستخدام تباين العينتين S_1^2، S_2^2 كما يلي:

$\sigma_{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)}=\sqrt{\frac{s^2{}_1}{n_1}+\frac{s^2{}_2}{n_2}}$، وعليه فإن المتغير $\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s^2{}_1}{n_1}+\frac{s^2{}_2}{n_2}}}$ يخضع لتوزيع قريب من توزيع ستودنت بدرجة حرية لها الصيغة المركبة التالية:

$$V=\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$$

ملاحظة: يعطى توزيع المعاينة لمجموع إحصائيتين **مثلا** $(\bar{X}_1+\bar{X}_2)$ فإن المتوسط الحسابي والتباين لهذا النوع من التوزيع يعطى بالعبارتين التاليتين:

$$\mu_{\bar{X}_1+\bar{X}_2}=\mu_{\bar{X}_1}+\mu_{\bar{X}_2}$$

$$\sigma^2{}_{\bar{X}_1\pm\bar{X}_2}=\sigma^2{}_{\bar{X}_1}+\sigma^2{}_{\bar{X}_2}$$

5– توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتين

سحبت عينتان عشوائيتان حجمهما n_1 و n_2 من مجتمعين مستقلين يخضع الأول لتوزيع ذو الحدين $B(n_1, p_1)$، والمجتمع الثاني أيضا يخضع للتوزيع ذو الحدين $B(n_2, p_2)$، وأن:

$$\sigma^2{}_1=n_1p_1\ q_1 \quad و \quad \mu_1=n_1\,p_1$$

$$\sigma^2{}_1 = n_2 p_2 \ q_2 \quad و \quad \mu_2 = n_2 \, p_2$$

فتوزيع المعاينة للفرق بين نسبيتي عينتين($\grave{p}_1 - \grave{p}_2$) والذي يخضع للتوزيع الطبيعي تقريبا بمتوسط حسابي:

$$\mu_{\grave{p}_1 - \grave{p}_2} = p_1 - p_2$$

وانحراف معياري:

$$\sigma_{\grave{p}_1 - \grave{p}_2} = \sqrt{\frac{p_1 \ q_1}{n_1} + \frac{p_2 \ q_2}{n_2}}$$

لذا فإن قيمة الإحصاءة z للمتغير العشوائي $\grave{p}$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$Z = \frac{\grave{p}_1 - \grave{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 \ q_1}{n_1} + \frac{p_2 \ q_2}{n_2}}}$$

ملاحظة: عندما يكون المجتمع محدودا والمعاينة بدون إرجاع وتحقق $0.05 < \frac{n_1}{N_1}$ و$0.05 < \frac{n_2}{N_2}$ فإنه يمكن الأخذ بعين الاعتبار معامل الإرجاع عند حساب الانحراف المعياري وفق العلاقة التالية:

$$\sigma_{\grave{p}} = \sqrt{\frac{p_1 \ q_1}{n_1}\left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1}\right) + \frac{p_2 \ q_2}{n_2}\left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1}\right)}$$

ملاحظة: بالنسبة لكسر المعاينة للمجتمع الأول والثاني ليس بالضرورة أن يتحققا معا، فقد يتحقق الأول ولا يتحقق الثاني أو العكس.

6- توزيع المعاينة لتباين العينات S^2

6-1- توزيع المعاينة للتباين: إذا كان X متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي μ وتباين σ^2 من مجتمع ما، و S^2 متغيرة عشوائية تمثل تباين عينة حجمها n مسحوبة من ذات المجتمع، لا بد أن نفرق بين تباين العينة S^2 وتباين العينة المعدل $\hat{S}^2$، حيث تعطى معادلتهما كالتالي:

إذا كان حجم العينة $n \geq 30$ فإن: $$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_I - \bar{X})^2}{n}$$

إذا كان حجم العينة $n < 30$ فإن: $$\hat{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_I - \bar{X})^2}{n-1}$$

فإن القيمة المتوقعة لتباين العينة تكتب كما يلي:

في حالة السحب بإرجاع: $E(S^2) = \boldsymbol{\sigma^2}\left(\frac{n-1}{n}\right)$

في حالة السحب بدون إرجاع: $E(S^2) = \boldsymbol{\partial^2}\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{N}{N-1}\right)$

عندما يكون N كبير جدا فإن $\left(\frac{N}{N-1}\right)$ تؤول إلى الواحد .

طبيعة توزيع المعاينة للتباين:

نظرية: لتكن لدينا عينة عشوائية حجم n سحبت من مجتمع يتوزع توزيع طبيعي بمعدل μ وتباين σ^2 فإن تباين العينة S^2 أو $\hat{S}^2$ سيتبع توزيع مربع كاي (χ^2) بدرجة حرية $n-1$ كتالي:

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2}$$

6-2- توزيع المعاينة لنسبة تبايني عينتين

ليكن لدينا مجتمعان طبيعيان تباينهما σ_1^2 و σ_1^2 ، نسحب من المجتمعين عينتين عشوائيتين حجمهما على التوالي n_1 و n_2، S_1^2 و S_2^2 تباين عينتين عشوائيتين، فإن النسبة $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ لتباين العينتين تتوزع فيشر بدرجة حرية v_1 و v_2 بحيث أن:

$$F= \frac{\left[\frac{S_1^2 n_1}{n_1-1}\right]\frac{1}{\sigma_1^2}}{\left[\frac{S_2^2 n_2}{n_2-1}\right]\frac{1}{\sigma_2^2}} = \frac{\frac{\hat{S}_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{\hat{S}_1^2}{\sigma_2^2}} \longrightarrow F_{n_1-1,n_2-1}$$

الشكل رقم (01) : توزيع فيشر