الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة أمحمد بوقرة بومرداس
كلية العلوم الاقتصادية ، التجارية
و علوم التسيير

Ministère de l'enseignement supérieur
Et de la recherche scientifique

Université M'Hamed BOUGARA de Boumerdès
Faculté Des Sciences Economiques , Commerciales
Etdes Sciences De Gestion

مطبوعة بيداغوجية تحت عنوان:

تمارين محلولة
في الاقتصاد الجزئي 1

موجهة لطلبة: السنة الأولى **تخصص**: جذع مشترك

من اعداد الدكتورة: صالحي سلمى **قسم** : العلوم الاقتصادية

السنة الجامعية: 2022/2021

مقدمة

من خلال تدريسنا لمقياس الاقتصاد الجزئي وجدنا أن هناك نقص في المراجع المختصة في هذا المقياس، خاصة من جانب الكتب التي تحتوي على تمارين تطبيقية.

ولإثراء مكتبة الجامعة ومراجع الطلبة، تم اعداد هذه المطبوعة وهي مجموعة من التمارين وحلولها موجهة بصفة أساسية لطلبة السنة الأولى جذع مشترك، تساعد الطالب على دراسة مادة الاقتصاد الجزئي بأسلوب مبسط يمكنه من استيعاب مختلف النظريات والمفاهيم فضلا عن أهم الأدوات التحليلية المستخدمة فيه، ومعرفة محتوى ومضمون مادة الاقتصاد الجزئي التي تكون للطالب الأساس السليم الذي يعتمد عليه في دراساته المستقبلية، بالإضافة إلى مجموعة من التمارين للحل التي تهدف إلى مساعدة الطالب على الفهم أكثر.

وقد قسمنا هذه المطبوعة إلى ثلاث فصول، احتوى الفصل الأول على مجموعة من التمارين المتنوعة والبسيطة التي حاولنا من خلالها إيصال أهم المفاهيم في تحليل سلوك المستهلك، وجاء الفصل الثاني ليحلل لنا سلوك المنتج والتكاليف المرتبطة بالإنتاج، من خلال مجموعة من التمارين وحلولها، أما الفصل الثالث فقد احتوى على مجموعة من التمارين وحلولها حول توازن السوق وتطبيقاته من خلال التعرف على الطلب السوقي ومرونته وكذلك العرض السوقي ومرونته وختمناها بتوازن بينهما.

وقد احتوى كل فصل على مجموعة من التمارين للحل التي تساعد الطالب على تيسير فهم هذا المقياس.

الفهرس

المقدمة

الفصل الأول: نظرية سلوك المستهلك 01

المبحث الأول: المنفعة القياسية.....03

المطلب الاول: تمارين حول المنفعة القياسية.....03

المطلب الثاني: حلول للتمارين حول المنفعة القياسية.....06

المطلب الثالث: تمارين للحل حول المنفعة القياسية.....26

المبحث الثاني: المنفعة الترتيبية (منحنيات السواء).....30

المطلب الاول: تمارين حول المنفعة الترتيبية.....30

المطلب الثاني: حلول لتمارين حول المنفعة الترتيبية 38

المطلب الثالث: تمارين للحل حول المنفعة الترتيبية.....69

المبحث الثالث: الحل الرياضي لتوازن المنتج طريقة لاغرانج.....71

المطلب الاول: تمارين حول طريقة لاغرانج.....71

المطلب الثاني: حلول لتمارين حول طريقة لاغرانج.....77

المطلب الثالث: تمارين للحل حول طريقة لاغرانج.....117

الفصل الثاني: الانتاج والتكاليف.....121

المبحث الاول: تمارين حول الإنتاج.....123

المطلب الاول: تمارين حول نظرية الانتاج.....123

المطلب الثاني: حلول للتمارين حول نظرية الانتاج.....128

المطلب الثالث: تمارين للحل حول نظرية الانتاج 156

المبحث 02: تكاليف الإنتاج 161

المطلب الاول: تمارين حول تكاليف الانتاج.....161

المطلب الثاني: حلول للتمارين حول تكاليف الانتاج.....166

المطلب الثالث: تمارين للحل حول تكاليف الإنتاج.....191
الفصل الثالث: توازن السوق.....195
المبحث الأول: الطلب السوقي ومرونته.....197
المطلب الاول: تمارين حول الطلب السوقي ومرونته.....197
المطلب الثاني: حلول للتمارين حول الطلب السوقي ومرونته.....201
المطلب الثالث: تمارين للحل حول الطلب السوقي ومرونته.....213
المبحث الثاني: العرض السوقي ومرونته 215
المطلب الاول: تمارين حول العرض السوقي ومرونته.....215
المطلب الثاني: حلول لتمارين حول العرض السوقي ومرونته.....216
المطلب الثالث: تمارين للحل حول العرض السوقي ومرونته 220
المبحث الثالث: توازن السوق وتطبيقاته 221
المطلب الاول: تمارين حول توازن السوق وتطبيقاته.....221
المطلب الثاني: حلول لتمارين حول توازن السوق وتطبيقاته.....227
المطلب الثالث: تمارين للحل حول توازن السوق وتطبيقاته.....249
المراجع

الفصل الأول

تمهيد

يهدف هذا الفصل الى تعريف الطالب بالمبادئ الأساسية لنظرية سلوك المستهلك من خلال وضع مجموعة من التمارين بأسلوب مبسط يمكنه من الفهم واستيعاب النظريات المختلفة للمنفعة القياسية والتي تكون له الأساس الصحيح الذي يعتمد عليه فيما بعد في دراساته المستقبلية

والهدف الأساسي من دراسة سلوك المستهلك هو تتبع تصرفاته المختلفة في السوق وطريقة توزيعه لدخله عند اقتنائه للسلع والخدمات، من أجل تحديد مستوى الطلب الذي يعبر عنه بدالة الطلب، وهذا ما يسمح لأجهزة الدولة بالتخطيط والتنبؤ بهذه التصرفات عند توقع تغير الاسعار والمداخيل.

وعليه قسمنا هذا الفصل الى ثلاث مباحث:

- المبحث الأول: تمارين حول المنفعة القياسية.
- المبحث الثاني: تمارين حول المنفعة الترتيبية.
- المبحث الثالث: تمارين حول التحليل الرياضي لسلوك المستهلك.

المبحث الأول: المنفعة القياسية

ولفهم تصرفات المستهلك في السوق ارتأينا وضع مجموعة من التمارين المختلفة مع حلولها لتكون كمرجع للطلبة.

المطلب 01: تمارين محلولة حول المنفعة القياسية

تعتبر المنفعة الأساس الذي تبنى عليه نظرية سلوك المستهلك، فهي تفسر لنا تصرفات المستهلك عند اقتنائه لمختلف السلع والخدمات المتواجدة في السوق والمرتبط بمستوى دخله المخصص للإنفاق، وكذلك مستوى الأسعار في السوق ولاستيعاب مفهومها وانواعها وكيفية قياسها وضعنا مجموعة من التمارين مع حلولها.

تمرين01:

ليكن الجدول التالي والذي يبين تغيرات المنفعة الكلية لمستهلك ما يستهلك السلعة X :

Q_X	0	1	2	3	4	5	6	7
UT_X	0	8	28	40	40	52	52	48

1. انطلاقا من الجدول السابق اوجد المنفعة الحدية للسلعة X ؟
2. أعط التمثيل البياني للمنفعة الكلية والحدية على نفس المعلم
3. بين نقطة الاشباع مع إعطاء التعليل اللازم؟

تمرين 02:

ليكن الجدول التالي والذي يبين تغيرات المنفعة الكلية لمستهلك ما وفق تغيرات الكمية المستهلكة من الموز (X) خلال فترة زمنية معينة يستهلك:

Q_X	0	1	2	3	4	5	6	7
UT_X	0	20	34	46	54	59	59	54

1. احسب المنفعة الحدية للموز؟
2. هل قانون المنفعة الحدية محقق؟ علل ذلك؟
3. ارسم منحنى المنفعة الكلية والحدية على نفس المعلم ثم بين العلاقة بينهما؟

التمرين 03:

يعطي الجدول التالي تغيرات المنفعة الكلية لمستهلك يستهلك سلعتين X و Y :

$Q_{X,Y}$	1	2	3	4	5	6	7
UT_X	10	18	24	28	30	30	28
UT_Y	12	23	32	39	43	43	39

1. على نفس المعلم المتعامد المتجانس أرسم منحنى المنفعة الكلية والحدية لكل سلعة؟ ماذا تستنتج؟
2. إذا علمت أن سعر سلعتين X و Y هما 2 ون والدخل المخصص للإنفاق هو 18 ون. ما هي الكمية التوازنية
3. عند ارتفاع سعر السلعة Y إلى 3 ون مع بقاء السلعة X عند 2 ون ماهو الدخل الذي ينفقه المستهلك لتعظيم منفعته والذي يحقق شرط التوازن $R = 15$ أو $R = 9$

الشكل الموالي يبين لنا المنفعة الكلية والحدية لكل من السلعتين Y و X

التمرين 04:

ليكن الجدول التالي والذي يبين لنا المنافع الحدية لمستهلك يستهلك سلعة ما:

Q_X	1	2	3	4	5
P_X	18	18	18	18	18
Um_X	24	22	20	18	16

1. أوجد الوضع توازني لهذا المستهلك؟
2. حدد فائض أو خسارة المستهلك؟
3. حساب مقدار الفائض للمستهلك؟
4. تحديد مدى التأثير الذي يحدث على المستهلك، في حال قامت الحكومة بفرض ضريبة على المنتج قدرها 4 وحدات نقدية؟
5. تحديد مدى التأثير الذي يحدث على المستهلك، في حال قامت الحكومة بفرض ضريبة على المستهلك قدرها 4 وحدات نقدية؟

التمرين 05:

لتكن دالة المنفعة الكلية لمستهلك يستهلك السلعة X معطاة كما يلي: $UT_X = -X + 4X^2 + 2$

1. أوجد دالة المنفعة الحدية لهذا المستهلك؟
2. أوجد المنفعة الكلية و الحدية إذا كانت $X = 3$؟
3. أوجد الكمية من X التي تجعل دالة المنفعة الكلية أعظم ما يمكن؟

التمرين 06:

يستهلك خالد بسكوت والذي حدد سعره في السوق بـ 5 دنانير للقطعة الواحدة والمنفعة الحدية للوحدة النقدية الدينار تساوي 1 وحدة نقدية، والمنافع الكلية المحصلة من استهلاكه للبسكوت محددة في الجدول التالي:

قطع البسكوت X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
المنفعة الكلية UT_X	10	19	27	34	40	45	49	52	54	55

1. احسب المنفعة الحدية؟
2. المنفعة الحدية المكتسبة؟

التمرين 07:

ليكن الجدول التالي والذي يبين المنفعة الكلية لمستهلك يستهلك سلعتين X و Y :

$Q_{X,Y}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Um_X	20	19	18	16	14	11	8	4	2	1
Um_Y	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6

إذا علمت أن سعر سلعتين X و Y على التوالي هما: 1 و2 ون والدخل المخصص للإنفاق هو 10 ون.

1. ما هو شرط التوازن لهذا المستهلك؟
2. أوجد الكميات التوازنية التي تعظم منفعة المستهلك؟
3. أحسب المنفعة الكلية بطريقتين؟
4. إذا ارتفع سعر السلعة إلى 2 ون وانخفض دخل المستهلك إلى 8 ون، أوجد الكميات التوازنية الجديدة؟

التمرين 08:

ليكن الجدول التالي والذي يبين المنفعة الكلية لمستهلك يستهلك سلعتين X و Y :

$Q_{X,Y}$	1	2	3	4	5	6	7	8
UT_X	160	300	420	520	600	660	700	720
UT_Y	110	210	300	380	450	510	560	600

إذا علمت أن سعر سلعتين X و Y على التوالي هما: 20 و10 ون والدخل المخصص للإنفاق هو 120 ون.

1. أوجد الكميات التوازنية التي تعظم منفعة المستهلك؟
2. أحسب المنفعة الكلية لهذا المستهلك ؟
3. إذا انخفض سعر السلعة X إلى 10 ون، ماهي الوضعية التوازنية الجديدة؟
4. اشتق منحنى الطلب لهذا المستهلك؟

التمرين 09:

اذا كانت دالة المنفعة لاحد المستهلكين من الشكل: $UT = Y(X+1)$، وإذا كانت الاسعار السلعتين X و y على التوالي $Px = 10$ و $Py = 40$ و $R = 310$

أوجد

1. الكمية التوازنية المثلى لهذا المستهلك؟
2. اذا انخفض سعر السلعة Y الى $Py = 20$ مع بقاء سعر السلعة X و الدخل ثابتين، أوجد الكمية التوازنية الجديدة؟ اشتق منحنى الطلب عند ذلك؟

التمرين 10:

إذا كانت دالة المنفعة الكلية لاحد المستهلكين من الشكل: $UT = 2X^2Y$

اذا كان الدخل المخصص للإنفاق هو $R = 30$ و اسعار السلعتين X و Y هو 1 ون المطلوب:

1. اوجد الكميات التوازنية ؟
2. اذا ارتفع سعر السلعة Y الى 2 ون،
3. اوجد الكميات التوازنية الجديدة، واشتق منحنى الطلب على السلعة؟

التمرين 11:

لتكن دالة المنفعة لاحد المستهلكين من الشكل $UT = 4XYZ$ حيث P_X و P_Y و P_Z اسعار السلعتين X و Y و Z على التوالي و R الدخل المخصص للانفاق

– حدد الكميات التوازنية المثلى بطريقة شرط التوازن إذا كان $P_X = 4$ و $P_Y = 2$ و $P_Z = 4$ و $R = 600$ ؟

التمرين12:

إذا كانت دالة المنفعة لأحد المستهلكين من الشكل: $UT = X^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}}$ ، وكان الدخل المخصص للانفاق هو $R = 400$، وكان سعر السلعة Xهو 4 وسعر السلعة Y يقدر بـ 10 وحدات نقدية

1. اوجد الكمية التوازنية بطريقة لاغرانج؟
2. قدر حجم المنافع الحدية والكلية؟

التمرين 13:

اذا كانت دالة المنفعة الكلية لاحد المســـتهلكين من الشـــكل: $UT = (X+2)(Y+1)$، بحيث $\mathrm{Px} = 2$,$\mathrm{Py} = 2$ و $\mathrm{R} = 30$

المطلوب:

1. أوجد المنافع الحدية لهذا المستهلك؟
2. اوجد الكمية المثلى لهذا المستهلك والتي تعظم منفعته الكلية بطريقة شرط التوازن؟
3. قدر حجم المنافع الحدية والمنفعة الكلية؟
4. اذا ارتفع P_X الى 4 ون اوجد الثنائية التوازنية الجديدة ؟
5. ماهي المنفعة الضائعة لهذا المستهلك؟
6. اشتق منحنى الطلب على السلعة؟
7. عند ارتفاع دخل المستهلك إلى 42 مع بقاء الأسعار ثابتة عند $\mathrm{Px} = \mathrm{Py} = 2$، أوجد الكمية التوازنية لهذا المستهلك

التمرين 14:

اذا كان الدخل المخصص للإنفاق هو $R = 12$ وأسعار السلعتين X و Y على التوالي هي$P_X = 2$ $P_Y = 1$، والجدول التالي يوضح تفضيلات المستهلك يستهلك السلعتين X و Y

$Q_{X,Y}$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbf{UT_X}$	16	30	42	52	60	66	70	72
$\mathbf{UT_Y}$	11	22	31	39	46	52	57	61

المطلب الثاني: حلول تمارين المنفعة القياسية

من خلال هذا المطلب سنتطرق لحلول تمارين حول المنفعة القياسية

التمرين 01:

تحسب المنفعة الحدية للسلعة X كما يلي:

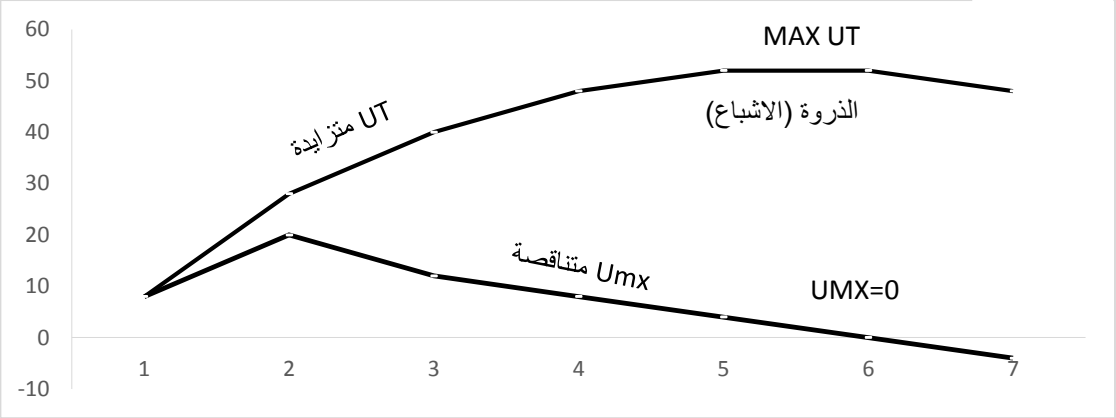
$$\mathrm{Um_X} = \frac{\Delta \mathrm{UT}}{\Delta \mathrm{X}} = \frac{\mathrm{UT_2} - \mathrm{UT_1}}{\mathrm{X_2} - \mathrm{X_1}}$$

وهي معينة في الجدول التالي:

Q_X	0	1	2	3	4	5	6	7
UT_X	0	8	28	40	48	52	52	48
Um_X	0	8	20	12	8	4	0	−4

التمثيل البياني للمنفعة الحدية والكلية للسلعة X

.



من خلال الشكل السابق يتبين لنا أن المستهلك يصل إلى مرحلة الاشباع باستهلاكه لـ 6 وحدات من السلعة X فالمنفعة الكلية تستمر في التزايد إلى أن تصل إلى 6 وحدات بعدها تشرع في التناقص وهذا ما تفسره المنفعة الحدية التي تكون في البداية متزايدة ثم متناقصة ابتداءا من استهلاكه للقطعة الأولى (بداية قانون تناقص المنفعة) وتستمر المنفعة الحدية في التناقص على ان تنعدم $Um_X = 0$ بوصول المستهلك لمرحلة الاشباع عند $X = 6$ أين تصل المنفعة الكلية لأقصى درجة ممكنة عند الذروة (الاشباع) $\boldsymbol{Max}\ \mathbf{UT_X}$.

التمرين 02:

تحسب المنفعة الحدية للسلعة X كما يلي:

$$Um_X = \frac{\Delta UT}{\Delta X} = \frac{UT_2 - UT_1}{X_2 - X_1} = \frac{20 - 0}{1 - 0} = 20$$

وهكذا تحسب جميع المنافع الحدية انطلاقا من منفعة الكلية وهي معينة في الجدول التالي:

Q_X	0	1	2	3	4	5	6	7
UT_X	0	20	34	46	54	59	59	54
Um_X	0	20	14	12	8	4	0	−4

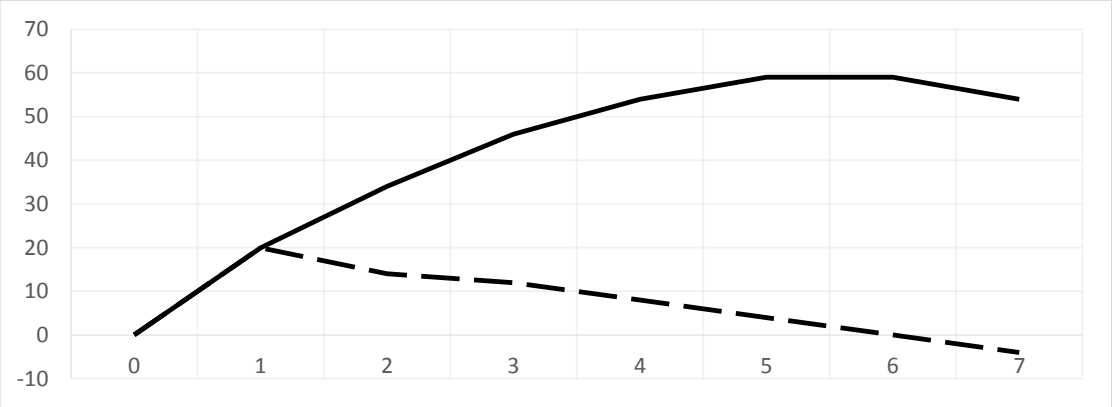
2- نعم قانون تناقص المنفعة الحدية محقق، والذي ينص على أن المنفعة الحدية تتناقص بزيادة الكميات المستهلكة بوحدة واحدة وهذا راجع لشعور المستهلك بالإشباع كلما استهلك وحدة إضافية من الموز بحيث:

$$\mathrm{Um_X} = 20 > \mathrm{Um_X} = 14 > \mathrm{Um_X} = 12 \dots\dots\dots > \ \mathrm{Um_X} = -4$$

إلى أن يصل إلى الاشباع التام عند تناوله لـ 6 وحدات من الموز وبعدها فغن تناوله لكمية إضافية من الموز سيصاب بالضرر، وهذا ما ينعكس على المنفعة الحدية التي تصبح سالبة

$$X = 7 \implies \mathrm{Um_X} = 4$$

3- التمثيل البياني للمنفعة الحدية والكلية :



أن منحنى المنفعة الحدية يكون متزايد في البداية إلى أن يصل إلى نقطة الاشباع (الذروة) $\mathrm{MAX\ UT_X}$ بعدها يشرع في التناقص ففي البداية تزيد المنفعة الكلية بمعدل متزايد أين تكون المنفعة الحدية متزايدة ثم تزيد بمعدل متناقص أين تكون المنفعة الحدية موجبة ومتناقصة $(\mathrm{Um_X} > \mathbf{0})$ والنقطة الفاصلة بين الزيادة بمعدل متزايد ومعدل متناقص هي بداية قانون تناقص المنفعة عند $X = 1 \implies \mathrm{MAX\ Um_X}$ **إلى أن تصل** المنفعة الكلية إلى أقصى نقطة لها $\mathrm{MAX\ UT_X}$ عند تناول المستهلك لـ 6 وحدات من الموز أين تنعدم المنفعة الحدية $X = 6 \implies \mathrm{Um_X} = \mathbf{0}$ وبعدها تتناقص المنفعة الكلية أين تكون المنفعة الحدية سالبة $\mathrm{Um_X} < \mathbf{0}$

والمنفعة الكلية هي عبارة عن مجموع المنافع الحدية فبتناول المستهلك وحدات متتالية من الموز فإن المنفعة الكلية للمستهلك عبارة عن مجموع المنافع الحدية فمثلا عند تناول المستهلك أربع وحدات من الموز فإن المنفعة الكلية هي:

$$UT_X = UT_4 = \sum_{X=1}^{4} Um_X = 20 + 14 + 12 + 8 = 54$$

وبالتالي فإن المنفعة الحدية تعبر عن منفعة كل وحدة مستهلكة على حدا والتي تعبر عن الوحدة الأخيرة المستهلكة منه:

$$UT_X = \sum_{X=1}^{n} Um_X$$

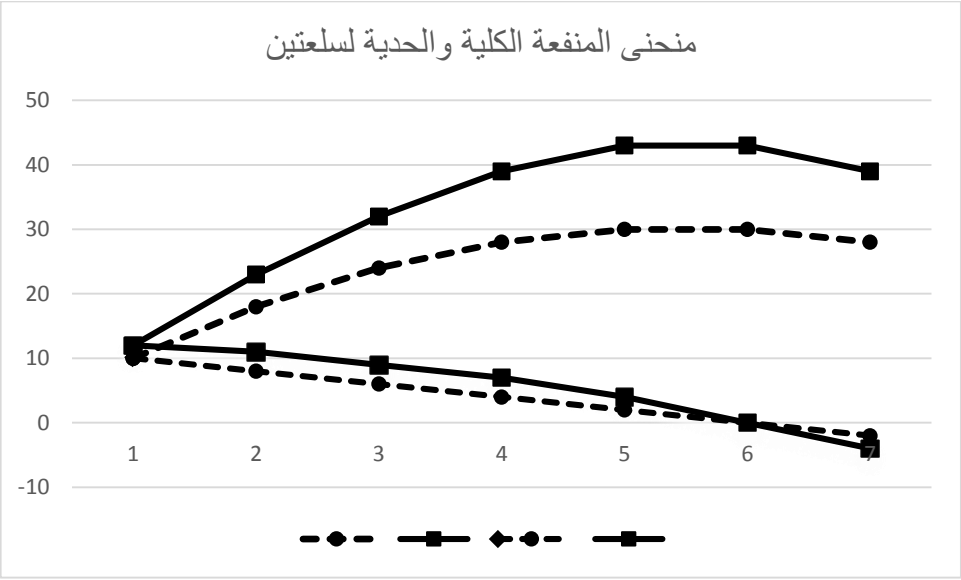
فبحصول المستهلك على الوحدة الأولى تحصل على منفعة قدرها 20 وحدات وبحصوله على الوحدة الثانية نقصت منفعته من 20 إلى 14 وحدات؛ أي أن استهلاكه الوحدة الثانية تضيف له منفعة أقل من المنفعة الأولى وهكذا فإن استهلاكه للوحدة الثالثة ستضيف له منفعة أقل من الوحدة الثانية بحيث انتقلت المنفعة من 14 وحدة إلى 12 وحدة، إلى أن يصل إلى الاشباع مع تناول الوحدة السادسة (06) أين تنعدم المنفعة الحدية وبعدها تصبح سالبة.

تتحدد العلاقة بين المنفعة الحدية والكلية كما يلي:

- عندما تزداد المنفعة الكلية بمعدل متناقص معناه أن المنفعة الحدية تكون متناقصة، وهذا ما يفسر أن المستهلك يبدأ يشعر بالشبع كلما زاد في استهلاكه لوحدات متتالية من الموز؛
- عندما تصل المنفعة الكلية إلى أقصى قيمة لها تصل المنفعة الحدية إلى الصفر، أي أنه عند، فإن عند $\mathrm{X} = 6 \implies \mathrm{Um}_X = 0 \implies \mathrm{UT} = 59$؛
- عندما تكون المنفعة الكلية UT متناقصة فإن، المنفعة الحدية $\mathrm{Um_X}$ تكون سالبة تماما $\mathrm{Um_X} < 0$، بحيث عند $\mathrm{X} = 7$ تكون $\mathrm{Um_X} = -4$.

التمرين 03:

الشكل الموالي يبين لنا المنفعة الكلية والحدية لكل من السلعتين Y و X



يمثل المنحنى المتقطع السلعة X اما المنحنى الممثل بخط متواصل فيمثل السلعة Y

من الرسم البياني السابق نلاحظ أن المستهلك يصل إلى الاشباع عند استهلاكه 6 وحدات من Y و X أين تصل منفعة المستهلك لذروتها بحيث يتحصل المستهلك على 30 وحدة منفعة من استهلاكه للسلعة X و 43 وحدات من استهلاكه للسلعة Y

حساب الكمية التوازنية لما $R = 18$:

يتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن التالي:

$$\begin{cases} \frac{Um_X}{P_X} = \frac{Um_Y}{P_Y} \\ R = XP_X + YP_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{Um_X}{1} = \frac{Um_Y}{2} \\ 18 = 2X + 2Y \end{cases}$$

وعليه يمكن تعيين التوفيقات التوازنية لها المستهلك من الجدول التالي:

7	6	5	4	3	2	1	$Q_{X,Y}$
−2	0	2	4	6	8	10	Um_X
−4	0	4	7	9	11	12	Um_y
−1	[0]	1	[2]	3	4	5	$\frac{Um_X}{P_X} = \frac{Um_X}{2}$
−2	[0]	[2]	3.5	4.5	5 .5	6	$\frac{Um_Y}{P_Y} = \frac{Um_Y}{2}$

وينتج من الشرط 1 التوفيقات التوازنية التالية: (4,5) ، (6,6).

ويتحقق الشرط 2 بالتعويض التوفيقات السابقة في قيد الميزانية :

- $18 = 2X + 2Y \Rightarrow 18 = 2(4) + 2(5)$:(4,5) محققة.
- $18 = 2X + 2Y \Rightarrow 10 \neq 2(6) + 2(6)$:(6,6) غير محققة.

وعليه فإن التوفيقة المثلى لهذا المستهلك والتي تعظم له منفعته في حدود دخله المتاح هي: (4,5)

يمكن حساب المنفعة الكلية على النحو التالي:

$$\mathrm{UT} = UT_X + UT_Y = UT_4 + UT_5 = \sum_{X=1}^{4} Um_X + \sum_{Y=1}^{5} Um_Y =$$

$$(10 + 18 + 24 + 28) + (12 + 23 + 32 + 39 + 43) = 80 + 149 = 229$$

عند ارتفاع P_Y إلى3 ون فيتحقق شرط التوازن حسب الجدول التالي:

7	6	5	4	3	2	1	$Q_{X,Y}$
−1	[0]	1	2	[3]	[4]	5	$\frac{Um_X}{P_X} = \frac{Um_X}{2}$
−1.33	[0]	1.33	2.33	[3]	3.66	[4]	$\frac{Um_Y}{P_Y} = \frac{Um_Y}{3}$

وينتج من الشرط 1 التوفيقات التوازنية التالية: (2,1) ، (3,3)، (6,6).

والدخل الموافق لهذه التوفيقات هو

- $\mathrm{R} = 2X + 3Y \Rightarrow\ 7 = 2(2) + 3(1)$: (1,2) غير محققة.
- $\mathrm{R} = X + Y \Rightarrow\ 18 = 2(3) + 3(3)$:(3,3) محققة.

وعليه فإن الدخل الذي يعظم منفعة المستهلك هو $\mathrm{R} = 18$

التمرين 04:

حساب الكمية التوازنية لما $R = 18$:

يتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن التالي:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{P_X} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{P_Y} \\ R = XP_X + YP_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{\mathbf{2}} \\ 18 = 2\mathrm{X} + 2Y \end{cases}$$

وعليه يمكن تعيين التوفيقات التوازنية لها المستهلك من الجدول التالي:

$Q_{X,Y}$	1	2	3	4	5	6	7
Um_X	10	8	6	4	2	0	−2
Um_y	12	11	9	7	4	0	−4
$\frac{\mathbf{Um_X}}{P_X} = \frac{\mathbf{Um_X}}{\mathbf{2}}$	5	4	3	**2**	1	**0**	−1
$\frac{\mathbf{Um_Y}}{P_Y} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{\mathbf{2}}$	6	5 .5	4.5	3.5	**2**	**0**	−2

وينتج من الشرط 1 التوفيقات التوازنية التالية: (4,5) ، (6,6).

ويتحقق الشرط 2 بالتعويض التوفيقات السابقة في قيد الميزانية :

- $18 = 2X + 2Y \Rightarrow\ 18 = 2(4) + 2(5)$: (4,5) محققة.
- $18 = 2X + 2Y \Rightarrow\ 10 \neq 2(6) + 2(6)$: (6,6) غير محققة.

وعليه فإن التوفيقة المثلى لهذا المستهلك والتي تعظم له منفعته في حدود دخله المتاح هي: (4,5)

يمكن حساب المنفعة الكلية على النحو التالي:

$$\mathrm{UT} = UT_X + UT_Y = UT_4 + UT_5 = \sum_{X=1}^{4} Um_X + \sum_{Y=1}^{5} Um_Y =$$

$$(10 + 18 + 24 + 28) + (12 + 23 + 32 + 39 + 43) = 80 + 149 = 229$$

عند ارتفاع P_Y إلى3 ون فيتحقق شرط التوازن حسب الجدول التالي:

$Q_{X,Y}$	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{Um_X}{P_X} = \frac{Um_X}{2}$	5	4	3	2	1	0	−1
$\frac{Um_Y}{P_Y} = \frac{Um_Y}{3}$	4	3.66	3	2.33	1.33	0	−1.33

وينتج من الشرط 1 التوفيقات التوازنية التالية: (2,1) ، (3,3)، (6,6).

والدخل الموافق لهذه التوفيقات هو

- $R = 2X + 3Y \Rightarrow 7 = 2(2) + 3(1)$: (1,2) غير محققة.
- $R = X + Y \Rightarrow 18 = 2(3) + 3(3)$:(3,3) محققة.

وعليه فإن الدخل الذي يعظم منفعة المستهلك هو $R = 18$

التمرين 04:

1. يتحدد توازن المستهلك لما تتساوى المنفعة الحدية المكتسبة مع المنفعة الحدية المضحى بها (المنفعة الحدية المكتسبة= المنفعة الحدية المضحى بها) أي عند 4 وحدات حيث يمثل سعر السلعة في السوق المنفعة المضحى بها وهي 18 والمنفعة الحدية تمثل المنفعة المكتسبة عند كل وحدة وبالتالي يتحدد توازن المستهلك عندما تكون المنفعة المكتسبة تساوي 18 والمنفعة المضحى بها تساوي كذلك 18 عند 4 وحدات من هذه السلعة.
2. بما ان فائض المستهلك هو المفرق بين المنفعة الحدية المكتسبة والمنفعة الحدية المضحى بها فإن المستهلك يحقق فائضا لما تكون المنفعة الحدية المكتسبة أكبر من المنفعة الحدية المضحى بها (المنفعة الحدية المكتسبة > من المنفعة الحدية المضحى بها) وعليه المستهلك يحقق فائضا عند الوحدة الأولى (1) حيث يساوي فائض المستهلك 6 وحدات نقدية (24- 18= 6) وعند الوحدة الثانية (2) حيث يساوي 4 وحدات نقدية (22- 18= 4) وعند الوحدة الثالثة (3) حيث يساوي 2 وحدات نقدية (20- 18= 2). ويحقق **خسارة**، لما تكون المنفعة الحدية المكتسبة أقل من المنفعة الحدية المضحى بها (المنفعة الحدية المكتسبة < من المنفعة الحدية المضحى بها) وعليه المستهلك يحقق خسارة عند الوحدة الخامسة (5) حيث يخسر المستهلك وحدتين (2-) وتحسب (22- 18= 4). والجدول التالي يوضع خسارة وفائض المستهلك

Q_X	1	2	3	4	5
P_X	18	18	18	18	18
Um_X	24	22	20	18	16
فائض المستهلك	6	4	2	0	-2

3. يمكن حساب فائض المستهلك عن طريق العلاقة التالية:

فائض المستهلك = (المنفعة الحدية المكتسبة (1) – المنفعة الحدية المضحى بها) + (المنفعة الحدية المكتسبة (2) – المنفعة الحدية المضحى بها) + (المنفعة الحدية المكتسبة (3) – المنفعة الحدية المضحى بها)

فائض المستهلك = (18−24) + (18−22) + (18−20)

= 6 + 4 + 2

= 12 وحدات نقدية

4. عند فرض الحكومة ضريبة على المنتج قدرها 4 وحدات نقدية، فإن سعر السلعة سيرتفع إلى 22 وحدة نقدية ، ومن ثم ينخفض الوضع التوازني للمستهلك الذي يتحقق عند شراء وحدتين (2) من السلعة، ويتحدد توازن المستهلك لما تتساوى المنفعة الحدية المكتسبة مع المنفعة الحدية المضحى بها (المنفعة الحدية المكتسبة= المنفعة الحدية المضحى بها) أي عند وحدتين (2 وحدات)، حيث يمثل سعر السلعة في السوق المنفعة المضحى بها وهي 22 بعد فرض ضريبة على المنتج والمنفعة الحدية تمثل المنفعة المكتسبة وبالتالي يتحدد توازن المستهلك عندما تكون المنفعة المكتسبة تساوي 22 والمنفعة المضحى بها تساوي كذلك 22 عند شراء وحدتين (2 وحدات) من هذه السلعة. عندها يخسر المستهلك حيث يصبح حجم فائض المستهلك 2 وحدات نقدية وبالتالي يخسر المستهلك 12 وحدة نقدية . والجدول التالي يوضح ذلك:

فائض المستهلك= (المنفعة الحدية المكتسبة (1) – المنفعة الحدية المضحى بها)

Q_X	1	2	3	4	5
P_X	22	22	22	22	22
Um_X	24	22	20	18	16
فائض المستهلك	2	0	-2	- 4	- 6

5. عند فرض الحكومة ضريبة مباشرة على المستهلك قدرها 4 وحدات نقدية، فإن السعر يبقى كما هو عند 18 وحدة نقدية، كما يبقى توازن المستهلك كما هو عند (4) وحدات، ويكون الفائض 12 وحدة نقدية، وبعد سداد قيمة الضريبة 4 وحدات نقدية، فإن الفائض يصبح = 8 وحدات نقدية.

التمرين 05:

1. دالة المنفعة الحدية:

$$\mathrm{Um_X} = \frac{\partial \mathrm{UT}}{\partial \mathrm{X}} = -1 + 8\mathrm{X}$$

2. حجم المنفعة الكلية والحدية عند$\mathrm{X} = 3$:

$$\mathrm{Um_X} = -1 + 8(3)$$
$$\mathrm{Um_X} = 23$$
$$\mathrm{UT_X} = -3 + 4(3)^2 + 2$$
$$\mathrm{UT_X} = 35$$

3. الكمية التي تجعل دالة المنفعة الكلية أعظم ما يمكن:

$$\mathrm{MAX(UT_X)} \Rightarrow \mathrm{Um_X} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\partial \mathrm{UT}}{\partial \mathrm{X}} = 0$$
$$\Rightarrow -1 + 8\mathrm{X} = 0$$
$$\Rightarrow 8\mathrm{X} = 1$$
$$\Rightarrow \mathrm{X} = \frac{1}{8}$$

ومنه فإن أعظم حجم للمنفعة الكلية

$$\mathrm{UT_X} = -\frac{1}{8} + 4\left(\frac{1}{8}\right)^2 + 2$$
$$\mathrm{UT_X} = \frac{31}{16}$$

التمرين 06:

يستهلك خالد بسكوت والذي حدد سعره في السوق بـ 5 دنانير للقطعة الواحدة والمنفعة الحدية للوحدة النقدية الدينار تساوي 1 وحدة نقدية، والمنافع الكلية المحصلة من استهلاكه للبسكوت محددة في الجدول التالي:

قطع البسكوت X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
المنفعة الكلية $\mathrm{UT_X}$	10	19	27	34	40	45	49	52	54	55
المنفعة الحدية المكتسبة $\mathrm{U_X}$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
المنفعة الحدية المضحى بها $P_X\lambda$	1×5	1×5	1×5	1×5	1×5	1×5	1×5	1×5	1×5	1×5

المنفعة الحدية المكتسبة هي $\mathrm{Um_X}$ حيث:

$$\mathrm{Um_X} = \frac{\Delta \mathrm{UT_X}}{\Delta X} = \frac{UT_2 - UT_1}{X_2 - X_1}$$

λ هي المنفعة الحدية للوحدة النقدية حيث: $\lambda = 1$

المنفعة الحدية المكتسبة= المنفعة الحدية المضحى بها

= المنفعة الحدية للوحدة النقدية × سعر السلعة X

$P_X\lambda =$ $\mathrm{Um_X}$

$1\times5 =$

وبالتالي فإن المستهلك حقق توازن عند استهلاكه لـ 6 وحدات من قطع البسكوت حيث تساوي المنفعة الحدية المكتسبة والمساوية لـ 5 وحدات منفعة مع المنفعة الحدية المضحى بها والمساوية لـ 5 وحدات منفعة، وهنا نقول أن المستهلك قد حقق أقصى مستوى من الاشباع.

التمرين07:

يتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن التالي:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{P_X} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{P_Y} \\ R = XP_X + YP_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{\mathbf{2}} \\ 10 = X + 2Y \end{cases}$$

بحيث تساوي المنفعة الحدية

$$\mathrm{Um_X} = \frac{\Delta \mathrm{UT_X}}{\Delta X} = \frac{UT_2 - UT_1}{X_2 - X_1}$$

وعليه يمكن تعيين التوفيقات التوازنية لها المستهلك من الجدول التالي:

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	$\boldsymbol{Q_{X,Y}}$
1	2	4	8	11	14	16	18	19	20	$\mathbf{Um_X}$
6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	$\mathbf{Um_Y}$
1	2	4	8	11	14	16	18	19	20	$\frac{\mathbf{Um_X}}{\boldsymbol{P_X}} = \frac{\mathbf{Um_X}}{\mathbf{1}}$
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\frac{\mathbf{Um_Y}}{\boldsymbol{P_Y}} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{\mathbf{2}}$

ينتج من الشرط 1 التوفيقات التوازنية التالية: (6,2) ، (7,5)، (8,9).

ويتحقق الشرط 2 بالتعويض التوفيقات السابقة في قيد الميزانية :

- $10 = X + 2Y \Rightarrow\ 10 = (6) + 2(2)$:(6,2) محققة.
- $10 = X + 2Y \Rightarrow\ 10 \neq (7) + 2(5)$:(7,5) غير محققة.
- $10 = X + 2Y \Rightarrow\ 10 \neq (8) + 2(9)$:(8,9) غير محققة.

وعليه فإن التوفيقة المثلى لهذا المستهلك والتي تعظم له منفعته في حدود دخله المتاح هي: (6,2)

- $10 = X + 2Y \Rightarrow\ 10 \neq (8) + 2(9)$:(8,9) غير محققة.

يمكن حساب المنفعة الكلية بطريقتين على النحو التالي:

الطريقة الأولى:

$$\mathrm{UT} = UT_X + UT_Y = UT_6 + UT_2 = 88 + 46 = 137$$

الطريقة الثانية:

$$\text{UT} = UT_X + UT_Y = \sum Um_X + \sum Um_Y$$
$$= (20 + 19 + 18 + 16 + 14 + 11) + (24 + 22)$$
$$= 88 + 46 = 137$$

تحديد الكميات التوازنية عند ارتفاع سعر السلعة X إلى 2 ون وانخفاض الدخل إلى 8 ون:

يمكن تعيين التوفيقات التوازنية لها المستهلك من الجدول التالي:

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	$Q_{X,Y}$
0,5	1	2	4	5,5	7	8	9	9,5	10	$\frac{\mathbf{Um_X}}{P_X} = \frac{\mathbf{Um_X}}{\mathbf{2}}$
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\frac{\mathbf{Um_Y}}{P_Y} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{\mathbf{2}}$

ينتج من الشرط 1 التوفيقات التوازنية التالية: (1,3) ، (3,4)، (4,5)، (5,6)،(7,9)

ويتحقق الشرط 2 بالتعويض التوفيقات السابقة في قيد الميزانية :

- $8 = 2(1) + 2(3) \Rightarrow 8 = 2X + 2Y$:(1,3) محققة.
- $8 \neq 2(3) + 2(4) \Rightarrow 8 = 2X + 2Y$:(3,4) غير محققة.
- $8 \neq 2(4) + 2(5) \Rightarrow 8 = 2X + 2Y$:(4,5) غير محققة.
- $8 \neq 2(5) + 2(6) \Rightarrow 8 = 2X + 2Y$:(5,6) غير محققة.
- $8 \neq 2(7) + 2(9) \Rightarrow 8 = 2X + 2Y$:(7,9) غير محققة.

وعليه فإن التوفيقة المثلى لهذا المستهلك والتي تعظم له منفعته في حدود دخله المتاح هي: (1,3).

التمرين 08:

يتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن التالي:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{P_X} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{P_Y} \\ R = XP_X + YP_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{\mathbf{20}} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{\mathbf{10}} \\ 120 = 20X + 10Y \end{cases}$$

وعليه يمكن تعيين التوفيقات التوازنية لها المستهلك من الجدول التالي:

7	6	5	4	3	2	1	$Q_{X,Y}$
700	660	600	520	420	300	160	$\mathbf{UT_X}$
560	510	450	380	300	210	110	$\mathbf{UT_Y}$
40	60	80	100	120	140	160	$\mathbf{Um_X}$
50	60	70	80	90	100	110	$\mathbf{Um_Y}$
1	3	4	5	6	7	8	$\frac{\mathbf{Um_X}}{P_X} = \frac{\mathbf{Um_X}}{\mathbf{20}}$
5	6	7	8	9	10	11	$\frac{\mathbf{Um_Y}}{P_Y} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{\mathbf{10}}$

وينتج من الشرط 1 التوفيقات التوازنية التالية: (1,4) ، (2,5)، (3,6)، (4,7).

ويتحقق الشرط 2 بالتعويض التوفيقات السابقة في قيد الميزانية :

- $120 = 20X + 10Y \Rightarrow 120 \neq 20(1) + 10(4)$:(1,4) غير محققة.
- $120 = 20X + 10Y \Rightarrow 120 \neq 20(2) + 10(5)$:(2,5) غير محققة.
- $120 = 20X + 10Y \Rightarrow 120 = 20(3) + 10(6)$:(3,6) محققة.
- $120 = 20X + 10Y \Rightarrow 120 \neq 20(4) + 10(7)$:(4,7) غير محققة.

وعليه فإن التوفيقة المثلى لهذا المستهلك والتي تعظم له منفعته في حدود دخله المتاح هي: (3,6)

يمكن حساب المنفعة الكلية على النحو التالي:

$$\mathrm{UT} = UT_X + UT_Y = UT_3 + UT_6 = \sum Um_X + \sum Um_Y =$$
$$(120 + 140 + 160) + (110 + 100 + 90 + 80 + 70 + 60) = 432 + 510 = 942$$

عند انخفاض سعر السلعة X إلى 10 ون يمكن تعيين التوفيقات التوازنية لها المستهلك من الجدول التالي:

7	6	5	4	3	2	1	$Q_{X,Y}$
4	6	8	10	12	14	16	$\frac{\mathbf{Um_X}}{P_X} = \frac{\mathbf{Um_X}}{\mathbf{10}}$
5	6	7	8	9	10	11	$\frac{\mathbf{Um_Y}}{P_Y} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{\mathbf{10}}$

وينتج من الشرط 1 التوفيقات التوازنية التالية: (4,2) ، (5,4)، (6,6).

ويتحقق الشرط 2 بالتعويض التوفيقات السابقة في قيد الميزانية :

- $120 = 10X + 10Y \Rightarrow 120 \neq 10(2) + 10(4)$:(4,2) غير محققة.
- $120 = 10X + 10Y \Rightarrow 120 \neq 10(5) + 10(4)$:(5,4) غير محققة.
- $120 = 10X + 10Y \Rightarrow 120 = 10(6) + 10(6)$:(6,6) محققة.

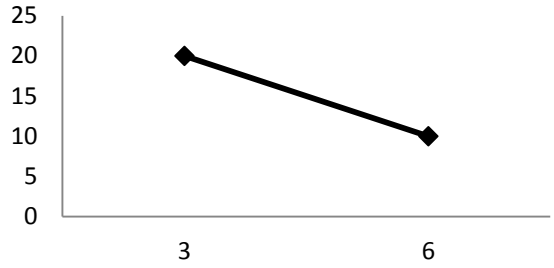
وعليه فإن التوفيقة المثلى لهذا المستهلك والتي تعظم له منفعته في حدود دخله المتاح هي: (6,6)

ومن النقطتين التوازنيتين قبل وبعد تغير السعر نحصل على الجدول التالي:

X	P_X
3	20
6	10

وبتمثيل النقطتين التوازنيتين على معلم متعامد متجانس نحصل على منحنى الطلب:

منحنى الطلب على السلعة X



التمرين09:

دوال المنفعة الحدية لكل سلعة:

$$Um_Y = \frac{\partial UT}{\partial Y} = X + 1 ، Um_X = \frac{\partial UT}{\partial X} = Y$$

يتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن التالي:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{\boldsymbol{P_X}} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{\boldsymbol{P_Y}} \\ R = XP_X + YP_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{Y}{\mathbf{10}} = \frac{X+1}{\mathbf{40}} \\ 310 = 10X + 40Y \end{cases}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين نجد:

$$\begin{cases} 40Y = 10X + 10 \\ 310 = 10X + 40Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4Y = X + 1 \\ 310 = 10X + 40Y \end{cases}$$

وبالاختزال نجد:

$$\begin{cases} X = 4Y - 1 \\ 310 = 10(4Y - 1) + 40Y \end{cases}$$

وبتعويض Y في قيد الميزانية نجد:

$$\begin{cases} X = 4Y - 1 \\ 310 = 40Y + 40Y - 10 \\ 320 = 80X \end{cases}$$

ومنه

$$Y = \frac{320}{80} = 4 \text{ وبتعويض } Y \text{ في } X \text{ نجد } X = 4(4) - 1 = 15$$

وعليه فإن التوفيقة المثلى لهذا المستهلك والتي تعظم له منفعته في حدود دخله المتاح هي: (15,4)

انخفاض سعر السلعة Y الى $\mathbf{Py = 20}$ الثنائية التوازنية الجديدة:

يتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن التالي:

يتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن التالي: $\begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{\boldsymbol{P_X}} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{\boldsymbol{P_Y}} \\ R = XP_X + YP_Y \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{\boldsymbol{P_X}} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{\boldsymbol{P_Y}} \\ R = XP_X + YP_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{Y}{\mathbf{10}} = \frac{X+1}{\mathbf{20}} \\ 310 = 10X + 40Y \end{cases}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين نجد:

$$\begin{cases} 20Y = 10X + 10 \\ 310 = 10X + 20Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2Y = X + 1 \\ 310 = 10X + 20Y \end{cases}$$

وبالاختزال نجد:

$$\begin{cases} X = 2Y - 1 \\ 310 = 10(2Y - 1) + 20Y \end{cases}$$

وبتعويض Y في قيد الميزانية نجد:

$$\begin{cases} X = 2Y - 1 \\ 310 = 20Y + 20Y - 10 \\ 320 = 40X \end{cases}$$

ومنه

$Y = \frac{320}{40} = 8$ وبتعويض Y في X نجد $X = 2(8) - 1 = 15$

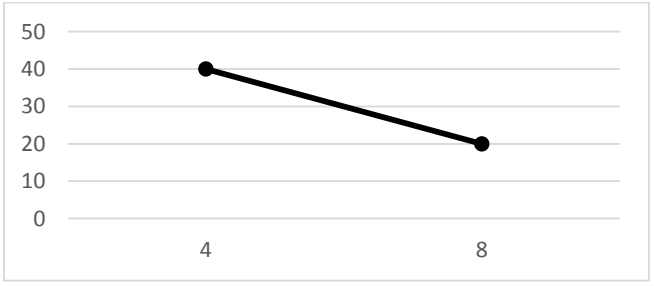
وعليه فإن التوفيقة المثلى لهذا المستهلك والتي تعظم له منفعته في حدود دخله المتاح هي: (15,8)

اشتقاق منحنى الطلب:

من النقطتين التوازنيتين قبل وبعد تغير السعر نحصل على الجدول التالي:

Y	P_Y
8	20
4	40

وبتمثيل النقطتين التوازنيتين على معلم متعامد متجانس نحصل على منحنى الطلب:



التمرين 10:

دوال المنفعة الحدية لكل سلعة:

$$Um_Y = \frac{\partial UT}{\partial Y} = 2X^2 ، Um_X = \frac{\partial UT}{\partial X} = 4XY$$

يتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن التالي:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{P_X} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{P_Y} \\ R = XP_X + YP_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4XY}{\mathbf{1}} = \frac{2X^2}{\mathbf{1}} \\ 30 = X + Y \end{cases}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين نجد:

$$\begin{cases} 4XY = 2X^2 \\ 30 = X + Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4XY}{2X^2} = 1 \\ 30 = X + Y \end{cases}$$

وبالاختزال نجد:

$$\begin{cases} X = 2Y \\ 30 = X + Y \end{cases}$$

وبتعويض Y في قيد الميزانية نجد:

$$\begin{cases} X = 2Y \\ 30 = 2Y + Y \\ 30 = 3Y \end{cases}$$

ومنه

$Y = \frac{30}{3} = 10$ وبتعويض Y في X نجد $X = 2(10) = 20$

وعليه فإن التوفيقة المثلى لهذا المستهلك والتي تعظم له منفعته في حدود دخله المتاح هي: $(20,10)$

عند ارتفاع P_Y الى 2 ون الثنائية التوازنية الجديدة:

يتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن التالي:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{P_X} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{P_Y} \\ R = XP_X + YP_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4XY}{\mathbf{1}} = \frac{2X^2}{\mathbf{2}} \\ 30 = X + 2Y \end{cases}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين نجد:

$$\begin{cases} 4XY = X^2 \\ 30 = X + Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4XY}{X^2} = 1 \\ 30 = X + Y \end{cases}$$

وبالاختزال نجد:

$$\begin{cases} X = 4Y \\ 30 = X + Y \end{cases}$$

وبتعويض Y في قيد الميزانية نجد:

$$\begin{cases} X = 4Y \\ 30 = 4Y + Y \\ 30 = 5Y \end{cases}$$

ومنه

$Y = \frac{30}{5} = 6$ وبتعويض Y في X نجد $X = 4(6) = 24$

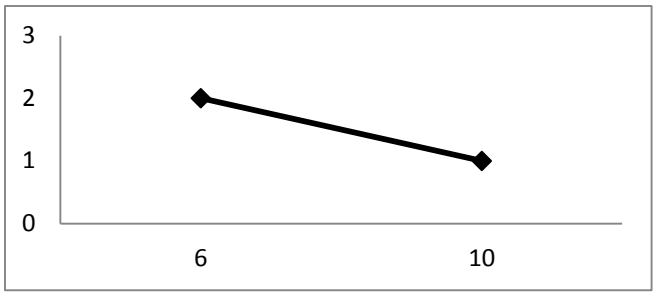
وعليه فإن التوفيقة المثلى لهذا المستهلك والتي تعظم له منفعته في حدود دخله المتاح هي: $(24,6)$

اشتقاق منحنى الطلب:

من النقطتين التوازنيتين قبل وبعد تغير السعر نحصل على الجدول التالي:

Y	P_Y
10	1
6	2

وبتمثيل النقطتين التوازنيتين على معلم متعامد متجانس نحصل على منحنى الطلب:



التمرين 11:

دوال المنفعة الحدية لكل سلعة:

$$Um_X = \frac{\partial UT}{\partial X} = 4YZ \text{ ،} Um_Y = \frac{\partial UT}{\partial Y} = 4XZ \text{ ،} Um_Z = \frac{\partial UT}{\partial Z} = 4XY$$

يتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن التالي:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{\boldsymbol{P_X}} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{\boldsymbol{P_Y}} = \frac{\mathbf{Um_Z}}{\boldsymbol{P_Z}} \\ R = XP_X + YP_Y + ZP_Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4YZ}{\mathbf{4}} = \frac{4XZ}{\mathbf{2}} = \frac{4XY}{\mathbf{4}} \\ 600 = 4X + 2Y + 4Z \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{\mathbf{2}} \\ \frac{\mathbf{Um_X}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{Um_Z}}{\mathbf{4}} \\ 600 = 4X + 2Y + 4Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4YZ}{\mathbf{4}} = \frac{4XZ}{\mathbf{2}} \\ \frac{4YZ}{\mathbf{4}} = \frac{4XY}{\mathbf{4}} \\ 600 = 4X + 2Y + 4Z \end{cases}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين لكل معادلة نجد:

$$\begin{cases} Y = 2X \\ Z = X \\ 600 = 4X + 2Y + 4Z \end{cases}$$

وبتعويض Y و Z في قيد الميزانية نجد:

$$\text{ومنه} \begin{cases} Y = 2X \\ Z = X \\ 600 = 4X + 2(2X) + 4X \\ 600 = 12X \end{cases}$$

$X = \frac{600}{12} = 50$ وبتعويض X فيY نجد $Y = 2(50) = 100$ وبتعويض X فيZ نجد $Z = 50$

وعليه فإن التوفيقة المثلى لهذا المستهلك والتي تعظم له منفعته في حدود دخله المتاح هي: $(50,100,50)$

التمرين 12:

1. دوال المنفعة الحدية لكل سلعة:

$$Um_X = \frac{\partial UT}{\partial X} = \frac{1}{2}X^{-\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}} \text{،} Um_Y = \frac{\partial UT}{\partial Y} = \frac{1}{2}X^{\frac{1}{2}}Y^{-\frac{1}{2}}$$

يتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن التالي:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{\boldsymbol{P_X}} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{\boldsymbol{P_Y}} \\ R = XP_X + YP_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\frac{1}{2}X^{-\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}}}{\mathbf{4}} = \frac{\frac{1}{2}X^{\frac{1}{2}}Y^{-\frac{1}{2}}}{\mathbf{10}} \\ 400 = 4X + 10Y \end{cases}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين نجد:

$$\begin{cases}\frac{10}{2}X^{-\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}}=\frac{4}{2}X^{\frac{1}{2}}Y^{-\frac{1}{2}}\\400=4X+10Y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{X^{-\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}}}{X^{\frac{1}{2}}Y^{-\frac{1}{2}}}=\frac{2}{5}\\400=4X+10Y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{Y^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}}}{X^{\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{5}\\400=4X+10Y\end{cases}$$

وبالاختزال نجد:

$$\begin{cases}\frac{Y}{X}=\frac{2}{5}\\400=4X+10Y\end{cases}$$

وبتعويض Y في قيد الميزانية نجد:

$$\begin{cases}2X=5Y\Longrightarrow\boldsymbol{Y=\frac{2X}{5}}\\400=4X+10\left(\boldsymbol{\frac{2X}{5}}\right)\\400=4X+4X\\400=8X\end{cases}$$

ومنه

$X=\frac{400}{8}=50$ وبتعويض X في Y نجد $Y=\frac{\mathbf{2(50)}}{\mathbf{5}}=20$

وعليه فإن التوفيقة المثلى لهذا المستهلك والتي تعظم له منفعته في حدود دخله المتاح هي: (50,20)

2. قدر حجم المنافع الحدية والكلية

$$Um_X=\frac{\partial UT}{\partial X}=\frac{1}{2}(50)^{-\frac{1}{2}}(20)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}=0.32$$
$$Um_Y=\frac{\partial UT}{\partial Y}=\frac{1}{2}(50)^{\frac{1}{2}}(20)^{-\frac{1}{2}}=3.16$$
$$UT=(50)X^{\frac{1}{2}}(20)^{\frac{1}{2}}=31.62$$

التمرين 13:

1. دوال المنفعة الحدية لكل سلعة:

$$Um_Y=\frac{\partial UT}{\partial Y}=X+2\text{،}Um_X=\frac{\partial UT}{\partial X}=Y+1$$

2. يتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن التالي:

$$\begin{cases}\frac{\mathbf{Um_X}}{\boldsymbol{P_X}}=\frac{\mathbf{Um_Y}}{\boldsymbol{P_Y}}\\R=XP_X+YP_Y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{Y+1}{\mathbf{2}}=\frac{X+2}{\mathbf{2}}\\30=2X+2Y\end{cases}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين نجد:

$$\begin{cases}2(Y+1)=2(X+2)\\30=2X+2Y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}Y+1=\frac{2(X+2)}{2}\\30=2X+2Y\end{cases}$$

وبالاختزال نجد:

$$\begin{cases}Y+1=X+2\\30=2X+2Y\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}Y=X+1\\30=2X+2Y\end{cases}$$

وبتعويض Y في قيد الميزانية نجد:

$$\begin{cases} Y = X + 1 \\ 30 = 2X + 2(X+1) \\ 30 = 4X + 2 \\ 28 = 4X \end{cases}$$

ومنه

$X = \frac{28}{4} = 7$ وبتعويض X في Y نجد $Y = 7 + 1 = 8$

وعليه فإن التوفيقة المثلى لهذا المستهلك والتي تعظم له منفعته في حدود دخله المتاح هي: (7,8)

3. قدر حجم المنافع الحدية والكلية

$$Um_X = \frac{\partial UT}{\partial X} = Y + 1 = 8 + 1 = 9 \text{، }$$
$$Um_Y = \frac{\partial UT}{\partial Y} = X + 2 = 7 + 2 = 9$$
$$UT = (X+2)(Y+1) = 9 * 9 = 81$$

4. عتد ارتفع P_X الى 4 ون ايجاد الثنائية التوازنية الجديدة

يتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن التالي:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{\boldsymbol{P_X}} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{\boldsymbol{P_Y}} \\ R = XP_X + YP_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{Y+1}{\mathbf{4}} = \frac{X+2}{\mathbf{2}} \\ 30 = 4X + 2Y \end{cases}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين نجد:

$$\begin{cases} 2(Y+1) = 4(X+2) \\ 30 = 4X + 2Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y + 1 = \frac{4(X+2)}{2} \\ 30 = 2X + 2Y \end{cases}$$

وبالاختزال نجد:

$$\begin{cases} Y + 1 = 2(X+2) \\ 30 = 4X + 2Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = 2X + 3 \\ 30 = 4X + 2Y \end{cases}$$

وبتعويض Y في قيد الميزانية نجد:

$$\begin{cases} Y = 2X + 3 \\ 30 = 4X + 2(2X+3) \\ 30 = 8X + 6 \\ 24 = 8X \end{cases}$$

ومنه

$X = \frac{24}{8} = 3$ وبتعويض X في Y نجد $Y = 3 + 1 = 4$

وعليه فإن التوفيقة المثلى لهذا المستهلك والتي تعظم له منفعته في حدود دخله المتاح هي: (3,4)

المنفعة الضائعة

حساب المنفعة الكلية الجديدة:

$$UT = (X+2)(Y+1) = 5 * 5 = 25$$

المنفعة الضائعة = المنفعة الجديدة – المنفعة القديمة

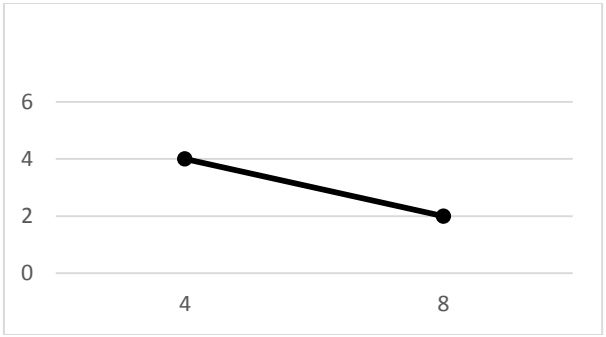
$$\Delta \boldsymbol{UT = UT_2 - UT_1 = 25 - 81 = -56}$$

اشتقاق منحنى الطلب:

من النقطتين التوازنيتين قبل وبعد تغير السعر نحصل على الجدول التالي:

X	P_X
8	2
4	4

وبتمثيل النقطتين التوازنيتين على معلم متعامد متجانس نحصل على منحنى الطلب:



عند ارتفاع دخل المستهلك إلى 42 مع بقاء الأسعار ثابتة عند $Px = Py = 2$، أوجد الكمية التوازنية لهذا المستهلك

1. يتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن التالي:

$$\begin{cases} \frac{Um_X}{P_X} = \frac{Um_Y}{P_Y} \\ R = XP_X + YP_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{Y+1}{2} = \frac{X+2}{2} \\ 42 = 2X + 2Y \end{cases}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين نجد:

$$\begin{cases} 2(Y+1) = 2(X+2) \\ 42 = 2X + 2Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y + 1 = \frac{2(X+2)}{2} \\ 42 = 2X + 2Y \end{cases}$$

وبالاختزال نجد:

$$\begin{cases} Y + 1 = X + 2 \\ 42 = 2X + 2Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = X + 1 \\ 42 = 2X + 2Y \end{cases}$$

وبتعويض Y في قيد الميزانية نجد:

$$\begin{cases} Y = X + 1 \\ 42 = 2X + 2(X+1) \\ 42 = 4X + 2 \\ 40 = 4X \end{cases}$$

ومنه

$X = \frac{40}{4} = 10$ وبتعويض X في Y نجد $Y = 10 + 1 = 11$

وعليه فإن التوفيقة المثلى لهذا المستهلك والتي تعظم له منفعته في حدود دخله المتاح هي: $(10,11)$

التمرين 14:

إيجاد الكمية التوازنة

8	7	6	5	4	3	2	1	$Q_{X,Y}$
72	70	66	60	52	42	30	16	$\mathbf{UT_X}$
61	57	52	46	39	31	22	11	$\mathbf{UT_Y}$
2	4	6	8	10	12	14	16	$\mathbf{Um_X}$
4	5	6	7	8	9	10	11	$\mathbf{Um_Y}$
1	2	3	4	5	6	7	8	$\frac{\mathbf{Um_X}}{P_X} = \frac{\mathbf{Um_X}}{\mathbf{2}}$
4	5	6	7	8	9	10	11	$\frac{\mathbf{Um_Y}}{P_Y} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{\mathbf{1}}$

بحيث يتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن التالي:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{P_X} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{P_Y} \\ R = XP_X + YP_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{\mathbf{1}} \\ 12 = 2X + Y \end{cases}$$

وينتج من الشرط 1 التوفيقات التوازنية التالية:

$\begin{cases} \frac{\mathrm{Um_X}}{P_X} = \frac{16}{2} = 8 \\ \frac{\mathrm{Um_Y}}{P_Y} = \frac{8}{1} = 8 \end{cases}$ وبالإسقاط نحصل على التوليفة (1,4) وعليه فالمستهلك يستهلك وحدة من السلعة X و 4 وحدات من السلعة Y.

$\begin{cases} \frac{\mathrm{Um_X}}{P_X} = \frac{14}{2} = 7 \\ \frac{\mathrm{Um_Y}}{P_Y} = \frac{7}{1} = 7 \end{cases}$ وبالإسقاط نحصل على التوليفة (2,5) وعليه فالمستهلك يستهلك وحدتين من السلعة X و 5 وحدات من السلعة Y.

$\begin{cases} \frac{\mathrm{Um_X}}{P_X} = \frac{12}{2} = 6 \\ \frac{\mathrm{Um_Y}}{P_Y} = \frac{6}{1} = 6 \end{cases}$ وبالإسقاط نحصل على التوليفة (3,6) وعليه فالمستهلك يستهلك 3 وحدات من السلعة X و 6 وحدات من السلعة Y.

$\begin{cases} \frac{\mathrm{Um_X}}{P_X} = \frac{10}{2} = 5 \\ \frac{\mathrm{Um_Y}}{P_Y} = \frac{5}{1} = 5 \end{cases}$ وبالإسقاط نحصل على التوليفة (4,7) وعليه فالمستهلك يستهلك 4 وحدات من السلعة X و 7 وحدات من السلعة Y.

$\begin{cases}\frac{Um_X}{P_X}=\frac{8}{2}=4\\ \frac{Um_Y}{P_Y}=\frac{4}{1}=4\end{cases}$ وبالإسقاط نحصل على التوليفة (5,8) وعليه فالمستهلك يستهلك 5 وحدات من السلعة X و 8 وحدات من السلعة Y.

ومن خلال الشرط الثاني، فإن المستهلك سينفق جميع دخله على السلعتين X و Y ، وبالتالي نعوض كل توفيقة من التوفيقات السابقة في قيد الميزانية لنستنتج التوفيقة الوحيدة التي تمثل الكمية التوازنية للمستهلك والتي تعظم منفعته الكلية وتحقق له أقصى اشباع ممكن وعليه فإن:

- وحدة من X و4 وحدات من Y تحقق $2(1)+(4)=6$ ، $12=$ وهنا المستهلك ينفق أقل من دخله المتاح وبالتالي لا تعتبر هذه التوفيقة توازنية.
- وحدتين من X و5 وحدات من Y تحقق $2(2)+(5)=9$ ، $12=$ وهنا المستهلك ينفق أقل من دخله المتاح وبالتالي لا تعتبر هذه التوفيقة توازنية.
- 3 وحدات من X و6 وحدات من Y تحقق $2(3)+(6)=12$ $12=$ هذه التوفيقة تساوي تماما دخل المستهلك، وبالتالي فإن التوفيقة (3,6) هي التوفيقة التوازنية والتي تحقق له أقصى إشباع ممكن.

المطلب الثالث: تمارين للحل حول المنفعة القياسية

ولتطبيق ما جاء في التمارين السابقة وضعنا مجموعة من التمارين لحلها.

التمرين01:

يبين الجدول التالي المنافع الحدية لمستهلك ما بحيث $Px=2$,$Py=2$ و $R=22$

الكميات Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Um_X	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6
Um_y	20	17	15	12	10	9	8	6	2	1

اوجد: 1. الكمية التوازنية التي تحقق اقصى اشباع للمستهلك، وماهي المنفعة الكلية المحققة؟

2. اذا انخفض سعر السلعة X الى $Py=1$ اوجد الكمية التوازنية الجديدة، واشتق منحنى الطلب؟

التمرين 02:

يبين الجدول التالي المنافع الكلية لمستهلك ما بحيث $Px=2$,$Py=1$ و $R=16$

الكميات Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ut_X	18	34	48	60	70	78	84	88	90	90
Ut_y	16	31	45	58	70	81	91	100	108	115

المطلوب:

1. عرف المنفعة الكلية والحدية؟

2. واحسب المنفعة الحدية لكل سلعة؟
3. الكمية التوازنية التي تحقق اقصى اشباع للمستهلك؟
4. وماهي المنفعة الكلية المحققة بطريقتين مختلفتين؟

التمرين 03:

يبين الجدول التالي المنافع الكلية لمستهلك ما بحيث $Px = 2$,$Py = 2$ و $R = 18$

الكميات Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ut_X	18	34	48	60	70	78	84	88	90	90
Ut_y	16	31	45	58	70	81	91	100	108	115

المطلوب:

1. مثل المنفعة الكلية والحدية لهذا المستهلك بالنسبة للسلعتين X و Y كل على حدا؟
2. أوجد الكمية المثلى التي تعظم منفعة هذا المستهلك؟
3. أحسب حجم المنفعة الكلية بطريقتين مختلفتين؟
4. أوجد الكمية التوازنية الجديدة إذا ارتفع سعر السلعة Y إلى 3 ون والدخل يتغير إلى 9 ون و15 ون؟

التمرين 04:

يبين الجدول التالي المنافع الحدية لمستهلك ما بحيث $Px = 2$,$Py = 1$ و $R = 12$

الكميات Q	1	2	3	4	5	6	7	8
Um_X	16	14	12	10	8	6	4	2
Um_y	11	10	9	8	7	6	5	4

1. اوجد الكمية التوازنية التي تحقق اقصى اشباع للمستهلك، وماهي المنفعة الكلية المحققة؟
2. اكتب قيد الميزانية واوجد ميله ومثله بيانيا؟
3. اذا كانت دالة المنفعة الكلية لاحد المستهلكين : $UT = Y(X + 1)$ اوجد المنافع الحدية لكل سلعة؟

التمرين 05:

يبين الجدول التالي المنافع الحدية لمستهلك ما بحيث $Px = 2$,$Py = 2$ و $R = 20$

الكميات Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
UT_X	16	30	41	51	60	68	75	81	86	89	90
UT_y	15	28	40	48	54	59	63	66	68	69	69

اوجد: 1. المنافع الحدية لكل سلعة؟

2. الكمية التوازنية التي تحقق اقصى اشباع للمستهلك، وماهي المنفعة الكلية المحققة؟

3. أحسب المنفعة الكلية عند التوازن بطريقتين؟

التمرين 06:

نفترض أن مستهلك ما أمام مستويات مختلفة للمنفعة الحدية والكلية لكميات مختلفة من سلعتين (X) و (Y) التي يقوم بإستهلاكها.

Um_y	UT_y	Um_X	UT_X	Q
13	104	17	109	4
12	116	16	125	5
12	128	15	140	6
11	139	15	155	7
11	150	14	169	8
10	160	14	183	9
9	169	13	196	10
8	177	11	207	11

1. إذا كان سعر الوحدة من السلعتين X و Y على التوالي 3 و 2 دينار وإذا كان المبلغ المخصص للإنفاق الاستهلاكي يبلغ 36 دينار. ما هي الكميات التي يشتريها هذا المستهلك من السلعتين X و Y لتعظيم منفعته الكلية ؟ –وما هو حجم هذه المنفعة الكلية التي سيحصل عليها ؟
2. إذا انخفض سعر السلعة X إلى دينارين مع بقاء الأشياء الأخرى ثابتة ، ما هي وضعية التوازن الجديدة؟ وما هي المنفعة الكلية التي يحصل عليها؟
3. إذا إنخفض دخل المستهلك ليصبح 28 دينار وسعر كل من السلعتين X و Y إلى دينارين للوحدة. فما هي الوضعية التوازنية الجديدة لهذا المستهلك؟

التمرين07:

اذا كانت دالة المنفعة الكلية لاحد المستهلكين من الشكل:

$UT = X\sqrt{Y}$، وكان قيد الميزانية من الشكل: $24 = 4X + 2Y$

المطلوب:

1. اوجد الكميات المثلى بطريقة شرط التوازن؟
2. قدر حجم المنافع الحدية والمنفعة الكلية؟
3. اذا انخفض P_X الى 2ون اوجد الثنائية التوازنية الجديدة ؟
4. اشتق منحنى الطلب على السلعة؟

التمرين08:

اذا كانت دالة المنفعة الكلية لاحد المستهلكين من الشكل:

$UT = Y(X - 1)$

اذا كان الدخل المخصص للانفاق هو $R = 20$ و اسعار السلعتين X و Y هو 2ون

المطلوب:

4. اوجد الكميات التوازنية وقدر حجم المنفعة الكلية؟
5. اذا انخفض سعر السلعة X الى 1ون، اوجد الكميات التوازنية الجديدة، واشتق منحنى الطلب على السلعة؟
6. اذا ارتفع دخل المستهلك بنسبة 30% ، فباي نسبة يمكن ان يتغير مستوى المنفعة المحصلة؟

المبحث الثاني: نظرية المنفعة الترتيبية (منحنيات السواء)

تعتمد نظرية المنفعة الترتيبية على ترتيب تفضيلات المستهلك في مجموعات تعطي كل واحدة نفس المستوى من الاشباع، وتقوم هذه النظرية على مبدأ عدم امكانية قياس المنفعة، وترتيب تفضيلات المستهلك في مجموعات مختلفة والمقارنة بينهما، واستخدام منحنيات السواء كأداة لتوضيح هذه التفضيلات. ولفهم هذه النظرية وضعنا في متناول الطالب مجموعة من التمارين مع حلولها.

المطلب الأول: تمارين حول المنفعة الترتيبية

لفهم نظرية المنفعة الترتيبية وضعنا مجموعة متنوعة من تمارين ليستوعب الطالب اكثر.

التمرين01:

اختر الاجابة الصحيحة مما يلي:

1. النقاط التي تقع على نفس منحنى السواء لها:

أ. نفس المنفعة. ب. مختلفة المنفعة ج. معدومة المنفعة د. لا شيء مما سبق.

2. عند التوازن المستهلك في نظرية المنفعة الترتيبية فإن:

أ. ميل خط الميزانية = ميل منحنى الطلب ب. ميل خط الميزانية = ميل منحنى السواء

ج. ميل منحنى السواء = ميل منحنى الطلب د. لا شيء من الحالات السابقة.

3. المنحنى الذي يربط بين نقاط التوازن عندما يكون أحد الأسعار متغير وباقي العناصر ثابتة هو:

أ. منحنى أنجل ب. منحنى الاستهلاك–الدخل ج. منحنى الطلب د. منحنى الاستهلاك–السعر.

4. ميل خط الميزانية هو:

أ. $\frac{-X}{Y}$ ب. $\frac{-P_X}{P_Y}$ ج. $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ د. $\frac{\Delta X}{\Delta Y}$

5. منحنى أنجل هو المنحنى الذي يربط بين:

أ. النقاط التوازنية وتغيرات السعر ب. النقاط التوازنية وتغيرات الدخل ج. النقاط التوازنية وتغيرات الدخل والسعر معا. د. كل الحالات السابقة.

6. منحنى السواء دائما:

أ. موجب الميل ب. سالب الميل ج. يساوي الصفر د. كل ماسبق.

7. عند وضع التوازن يكون ميل منحنى السواء:

أ. مساوي لميل خط الميزانية. ب. أكبر من ميل خط الميزانية. ج. أصغر من ميل خط الميزانية.

8. تعبر خريطة (شبكة) منحنيات السواء عن:

أ. مستويات اشباع مختلفة. ب. نفس مستوى الاشباع. ج. مستويات اشباع متقاطعة.

9. الانتقال من أعلى منحنى السواء إلى الاسفل معناه:

أ. التخلي عن كمية من Y مقابل الحصول على وحدة واحدة من X

ب. التخلي عن كمية من Y مقابل الحصول على نفس الكمية من X

ج. التخلي عن كمية أقل من Y مقابل الحصول على كمية أقل من X

10. منحنى استهلاك الدخل هو:

أ. هو الربط بين النقاط التوازنية عندما يكون الدخل هو المتغير الوحيد.

ب. هو الربط بين النقاط التوازنية عندما يكون السعر هو المتغير الوحيد.

ج. هو الربط بين النقاط التوازنية عندما يكون الدخل والسعر متغيرين معا.

11. عند التوازن يكون:

أ. ميل خط الميزانية = ميل منحنى السواء

ب. ميل خط الميزانية = ميل منحنى السواء

ج. ميل منحنى السواء = ميل منحنى الطلب

12. **المنفعة الحدية هي:**

أ. منفعة الوحدة الأخيرة المضافة. ب. منفعة الوحدة الأولى المضافة. ج. منفعة الوحدة ما قبل الأخيرة المضافة.

13. عندما تزيد المنفعة الكلية بمعدل متناقص فإن المنفعة الحدية تكون:

أ. سالبة ومتزايدة ب. سالبة ومتناقصة. ج. موجبة ومتناقصة. د. لا شيء مما سبق.

14. منحنى أنجل هو المنحنى الذي يربط بين:

أ. النقاط التوازنية وتغيرات السعر ب. النقاط التوازنية وتغيرات الدخل ج. النقاط التوازنية وتغيرات الدخل والسعر معا. د. كل الحالات السابقة.

15. عندما يتخلى المستهلك على ثلاث وحدات من Y مقابل حصوله على وحدة واحدة من X للبقاء على نفس منحنى السواء فإن، المعدل الحدي للإحلال يساوي:

أ. $-\frac{1}{3}$ ب. $-\frac{1}{4}$ ج. -3 د. -1

التمرين 02:

يبين الجدول التالي توفيقات مختلفة لاستهلاك السلعتين X و Y لمنحني سواء مختلفة:

U1	X	1	2	3	4	5	6	7
	Y	14	10	6	4.5	3.5	3	2.5
U2	X	4	5	6	7	8	9	10
	Y	14	10	8.5	7.5	6.3	5.5	5

- أرسم منحنيات السواء المبينة في الجدول؟
- احسب المعدل الحدي للإحلال TMS عند كل نقطة من هذا الجدول؟
- اعطي التفسير الاقتصادي لـ TMS بالنسبة لـ
  - U1 بين (1,14) و(2,10)
  - U2 بين (4,14) و(5,10)
- اذا كان الدخل المخصص للانفاق هو $R = 12$، وأسعار السلعتين X و Y على التوالي هي

  $P_X = 2$ و $P_Y = 1$:
  - حدد النقطة التوازنية لهذا المستهلك؟
- إذا ارتفع دخل المستهلك إلى 20 ون:
  - أرسم قيد الميزانية المستهلك
  - حدد النقاط التوازنية الجديدة؟
  - ما هو المنحنى الذي يربط بين النقاط التوازنية، أرسمه؟
  - اشتق منحنى أنجل لكل سلعة؟

التمرين03:

يبين الجدول التالي توفيقات مختلفة من السلعتين X و Y لمستهلك ما كما يلي:

U1	X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Y	10	5	3	2,3	1,7	1,2	0,8	0,5	0,3	0 ,2
U2	X	3	4	5	6	7	8	9	10		
	Y	10	7	5	4,2	3,5	3,2	3	2,9		
U3	X	5	6	7	8	9	10	11	12		
	Y	12	9	7	6,2	5,5	5,2	5	4,9		

1. ارسم منحنيات السواء U1 وU2 و U3 على نفس المعلم؟ ماذا تمثل؟

2. عرف المعدل الحدي للإحلال TMS لإحلال X محل Y
3. احسب TMS بالنسبة لـ
   - U1 بين (2,5) و (3,3)
   - U2 بين (6,4.2) و (7,3.5)
4. اعطي التفسير الاقتصادي لكل نتيجة؟
5. لنفرض أن دخل المستهلك هو $R = 10$، وأسعار السلعتين X و Y على التوالي هي: $P_X = P_Y = 1$
6. أكتب معادلة قيد الميزانية واوجد ميله؟ ومثله بيانيا؟
7. حدد نقطة توازن المستهلك؟
8. لنفرض أن سعر السلعة X انخفض إلى $P_X = 0,5$ مع بقاء العوامل الأخرى ثابتة
   - اكتب معادلة وقيد الميزانية الجديد ومثله بيانيا؟
   - ماذا يمثل المنحنى الذي يربط بين النقاط التوازنية؟ عرفه، ثم ارسمه؟
   - اشتق منحنى الطلب على هذه السلعة؟
9. عند انخفاض الدخل إلى $R = 6$ وأسعار السلعتين X و Y على التوالي هي: $P_X = P_Y = 1$
10. أكتب معادلة قيد الميزانية ومثله بيانيا؟
    - اكتب معادلة وقيد الميزانية الجديد ومثله بيانيا؟
    - ماذا يمثل المنحنى الذي يربط بين النقاط التوازنية؟ عرفه، ثم ارسمه؟
    - اشتق منحنى انجل للسلعة X ؟

التمرين 04:

يبين الجدول التالي توفيقات مختلفة من السلعتين X و Y لمستهلك ما كما يلي:

U1	X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	Y	10	5	3	2,3	1,7	1,2	0,8	0,5	0,3	0 ,2
U2	X	4	5	6	7	8	9	10	11		
	Y	10	7	5	4,2	3,5	3,2	3	2,9		
U3	X	6	7	8	9	10	11	12	13		
	Y	12	9	7	6,2	5,5	5,2	5	4,9		

1. ارسم منحنيات السواء U1 وU2 و U3 على نفس المعلم؟
2. أوجد المعدل الحدي للإحلال TMS عند كل نقطة من هذا الجدول؟

3. لنفرض أن دخل المستهلك هو $R = 22$ وأسعار السلعتين X و Y هي: $P_X = P_Y = 2$
4. أكتب معادلة قيد الميزانية واوجد ميله؟ ومثله بيانيا؟
5. حدد نقطة توازن المستهلك؟
6. عند انخفاض سعر السلعة X إلى $P_X = 1$
   - حدد نقطة التوازن الجديدة؟
   - حدد منحنى الاستهلاك – السعر؟
7. عند انخفاض الدخل إلى 14 ون مع بقاء السعرين X و Y عند $P_X = P_Y = 2$:
   - حدد نقطة التوازن الجديدة؟
   - حدد منحنى الاستهلاك – الدخل؟

التمرين 05:

يبين الجدول التالي توفيقات مختلفة لاستهلاك السلعتين X و Y لمنحني سواء مختلفة:

U1	X	1	2	3	4	5	
	Y	12	7	5	4.3	4.1	
U2	X	1	2	3	4	5	6
	Y	15	10	6	4.5	3.7	3.2
U3	X	4	5	6	7	8	
	Y	11	8	6	5.5	5.2	

- أرسم منحنيات السواء المبينة في الجدول على نفس المعلم؟
- ماذا تبين منحنيات السواء؟
- احسب المعدل الحدي للإحلال TMS عند النقطتين التاليتين اعطي التفسير الاقتصادي لها:
  - U1 بين (7,2) و (3.5)
  - U2 بين (4,4.5) و (5,3.7)
  - U3 بين (7,5.5) و (8,5.2)
- اذا كان الدخل المخصص للإنفاق هو $R = 12$، وأسعار السلعتين X و Y على التوالي هي

  $P_X = 1$ و $P_Y = 1$:
  - اكتب قيد الميزانية وأوجد ميله؟
  - عين النقطة التوازنية لهذا المستهلك والتكن A؟
- اذا ارتفع سعر السلعة X إلى 2 ون:

- حدد النقطة التوازنية الجديدة B؟
- ماذا تمثل القطعة AB

– إذا انخفض دخل المستهلك إلى 8 ون مع بقاء الأسعار عند $P_X = 1$ و $P_Y = 1$:

- حدد النقطة التوازنية الجديدة C؟

– ماذا تمثل القطعة AC؟

– اشتق منحنى الطلب للسلعة X؟

التمرين 06:

يخصص عمر ميزانية معينة لشراء الكتب وأقراص المضغوطة الخاصة بالتعلم والدراسة، وخلال زيارته الأسبوعية لمتجر بيع الكتب أنفق ميزانيته بالكامل على شراء 3 كتب بسعر 20 دينار للكتاب الواحد وقرصين مضغوطين بسعر 10 دنانير للقرص الواحد.

عمر مستعد للتضحية بكتاب واحد في مقابل حصوله على قرصين مضغوطين، إذا رمزنا للكتب بـ Y والاقراص بـ X

1. أعط التمثيل الرياضي لمعادلة قيد ميزانية عمر؟
2. هل اختيار عمر أمثلي؟ اشرح ذلك بمنحنى بياني

عند عودته مرة أخرى إلى المتجر وجد ان المتجر قام بتنزيلات على الكتب حيث أصبح سعرها 10 دنانير للكتاب الواحد في هذه الحالة عمر مستعد لشراء 5 كتب و3 أقراص بما أن الكتب لها نفس ثمن الأقراص

1. أوجد قيد الميزانية الجديد لعمر؟
2. عين النقطة التوازنية لعمر على نفس المعلم السابق؟
3. ماذا يمثل المنحنى الذي يربط بين النقطتين التوازنيتين؟ عرفه؟

خالد أخ عمر يخصص هو الآخر ميزانية سنوية لشراء الكتب والاقراص المضغوطة حيث تقدر ميزانيته السنوية بـ 800 دينار/ للسنة بسعر 10 دينار للقرص الواحد و 20 دينار للكتاب الواحد بحيث تأخذ دالة منفعته الشكل التالي: $UT = 10\,XY^2$

1. هل يأخذ المعدل الحدي للإحلال TMS لخالد نفس المعدل الحدي للإحلال لعمر؟
2. أوجد الكميات المثلى التي يشتريها خالد عندا ينفق جميع ميزانيته؟

التمرين 07:

لدينا مستهلك ينفق جميع دخله لشراء سلعتين X و Y بحيث يستهلك 5 وحدات من السلعة X و التي يقدر سعرها بـ 30 ون و 9 وحدات من السلعة Y التي يقدر سعرها بـ 10 ون

1. احسب المعدل الحدي للإحلال TMS عند التوازن؟ فسر النتيجة اقتصاديا؟

2. احسب قيمة ميزانية هذا المستهلك واكتب قيد الميزانية؟

نظرا للمجهودات التي قام بها المستهلك في العمل قرر صاحب العمل زيادة راتبه الشهري 30 دينارا، ومع هذه الزيادة التي مازال ينفقها بالكامل على السلعتين X و Y قرر استهلاك 7 وحدات من X و 6 وحدات من Y ومع هذا القرار الجديد فهو على استعداد للتخلي على وحدتين من Y مقابل حصوله على وحدة واحدة من X حتى تبقى منفعته الكلية دون تغيير.

1. هل تمثل الثنائية $(7،6)$ الخيار الأمثل له؟
2. بأي طريقة يمكنه تغيير استهلاكه لكي يصبح هذا الخيار امثلي؟

يستهلك صديقه السلعتين X و Y عند نفس قيد الميزانية الأول قبل الزيادة وفق المعادلة التالية:

$$UT = X^3Y$$

1. اوجد الكميات التوازنية لهذا المستهلك؟

التمرين 08:

ليكن مستهلك يستهلك سلعتين X و Y حيث تأخذ دالة المنفعة الشكل التالي: $UT = XY$ بحيث سعر السلعة X هو 2 ون وسعر السلعة Y هو 5 ون والدخل المخصص للانفاق على السلعتين X و Y هو 100 ون

1. عين قيد ميزانية المستهلك؟
2. برهن رياضيا على ميل قيد الميزانية ؟
3. أوجد الكميات المثلى لهذا المستهلك؟
4. احسب TMS عند التوازن؟
5. اذا ارتفع سعر السلعة Y إلى 7 ون اوجد الكميات التوزنية الجديدة؟
6. مثل بيانيا النقاط التوازنية لهذا المستهلك؟
7. ما هو المنحنى الذي يربط بينهما؟

التمرين 09:

لتكن دالة المنفعة لأحد المستهلكين من الشكل: $UT = XY$ وكانت أسعار السلعتين X و Y هي $P_X = 2$ و $P_Y = 5$ والدخل المخصص للانفاق على السلعتين X و Y هو 80 ون.

1. أوجد النقطة التوازنية لهذا المستهلك بيانيا وحسابيا، علما أن منفعة المستهلك هي $UT = 100$

التمرين 10:

لتكن دالة المنفعة الكلية لأحد المستهلكين من الشكل: $UT = Y(X + 1)$ وكانت أسعار السلعتين X و Y هي $P_X = 10$ و $P_Y = 40$

2. أوجد الكميات التوازنية للسلعتين X و Y علما أن منفعة المستهلك هي $UT = 64$
3. ماهي قيمة الميزانية الاسمية (الدخل النقدي)؟
4. تأكد من الحل بيانيا؟

التمرين 11:

لتكن دالة المنفعة الكلية لأحد المستهلكين من الشكل: $UT = X\,Y$ وكانت أسعار السلعتين X و Y هي $P_X = 1$ و $P_Y = 2$ والدخل المخصص للانفاق على السلعتين X و Y هو $R = 20$

1. أوجد القيم التوازنية، وحدد حجم المنفعة الكلية؟
2. إذا ارتفع سعر السلعة Y بـ وحدتين، اوجد القيم التوازنية الجديدة ثم حدد مستوى المنفعة المحصلة؟
3. أحدد أثر الإحلال والدخل وفسر النتائج؟

التمرين 12:

لتكن دالة المنقعة لأحد المستهلكين من الشكل: $UT = 5X\,Y^2$ وكانت أسعار السلعتين X و Y هي $P_X = 2$ و $P_Y = 4$ والدخل المخصص للانفاق على السلعتين X و Y هو $R = 120$

1. أوجد القيم التوازنية، وحدد حجم المنفعة الكلية؟
2. أرسم منحنى السواء لهذه الدالة وعين النقطة التوازنية عليها؟
3. أذا انخفض سعر السلعة Y إلى النصف مع بقاء العناصر الأخرى ثابتة، أوجد الكمية التوازنية الجديدة وأحسب المنفعة الكلية؟
4. أرسم منحنى السواء الجديد وعين النقطة التوازنية الجديدة؟
5. ارسم المنحى الذي يربط بين النقاط التوازنية وعرفه؟
6. أحسب أثر الاحلال والدخل وعين نوع السلعتين X و Y؟
7. عند ارتفاع سعر السلعة X إلى 6 ون اوجد الكمية التوازنية الجديدة؟

التمرين 13:

لتكن دالة المنفعة لأحد المستهلكين من الشكل: $UT = Y(X + 1)$ وكان الدخل المخصص للإنفاق هو 310، إذا كانت أسعار السلعتين X و Y هما $P_X = 10$ و $P_Y = 40$

1. أوجد الكمية التوازنية لهذا المستهلك ثم أحسب منفعة هذا المستهلك؟
2. إذا انخفض سعر السلعة X إلى $P_X = 5$، احسب أثر الاحلال والدخل والأثر الكلي؟

المطلب الثاني: حلول تمارين حول المنفعة الترتيبية

فيما يلي حلول لتمارين حول المنفعة الترتيبية

التمرين01:

اختيار الاجابة الصحيحة مما يلي:

1. النقاط التي تقع على نفس منحنى السواء لها :

أ. نفس المنفعة.

2. عند التوازن المستهلك في نظرية المنفعة الترتيبية فإن:

ب. ميل خط الميزانية = ميل منحنى السواء

3. المنحنى الذي يربط بين نقاط التوازن عندما يكون أحد الأسعار متغير وباقي العناصر ثابتة هو:

د. منحنى الاستهلاك–السعر.

4. ميل خط الميزانية هو:

ب. $\frac{-P_X}{P_Y}$

5. منحنى أنجل هو المنحنى الذي يربط بين:

ب. النقاط التوازنية وتغيرات الدخل

6. منحنى السواء دائما:

ب. سالب الميل

7. عند وضع التوازن يكون ميل منحنى السواء:

أ. مساوي لميل خط الميزانية.

8. تعبر خريطة (شبكة) منحنيات السواء عن:

أ. مستويات اشباع مختلفة.

9. الانتقال من أعلى منحنى السواء إلى الاسفل معناه:

أ. التخلي عن كمية من Y مقابل الحصول على وحدة واحدة من X

10. منحنى الاستهلاك– الدخل هو:

أ. هو الربط بين النقاط التوازنية عندما يكون الدخل هو المتغير الوحيد.

11. عند التوازن يكون:

أ. ميل خط الميزانية = ميل منحنى السواء

12. **المنفعة الحدية هي:**

أ. منفعة الوحدة الأخيرة المضافة.

13. عندما تزيد المنفعة الكلية بمعدل متناقص فإن المنفعة الحدية تكون:

ج. موجبة ومتناقصة.

14. منحنى أنجل هو المنحنى الذي يربط بين:

ب. النقاط التوازنية وتغيرات الدخل

15. عندما يتخلى المستهلك على ثلاث وحدات من Y مقابل حصوله على وحدة واحدة من X للبقاء على نفس منحنى السواء فإن، المعدل الحدي للإحلال يساوي:

ج. -3

التمرين 02:

حساب المعدل الحدي عند كل نقطة من هذا الجدول:

$$TMS = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

TMS_1	-	-4	-4	-1.5	-1	-0.5	-0.5
TMS_2	-	-4	-1.5	-1	-1.2	-0.8	-0.5

- التفسير الاقتصادي لـ TMS بالنسبة لـ
  - U1 بين $(1,14)$ و $(2,10)$

$TMS = -4$ المستهلك يتخلى عن 4 وحدات من Y مقابل حصوله على وحدة واحدة من X للبقاء على نفس المنفعة الكلية.

  - U2 بين $(4,14)$ و $(5,10)$

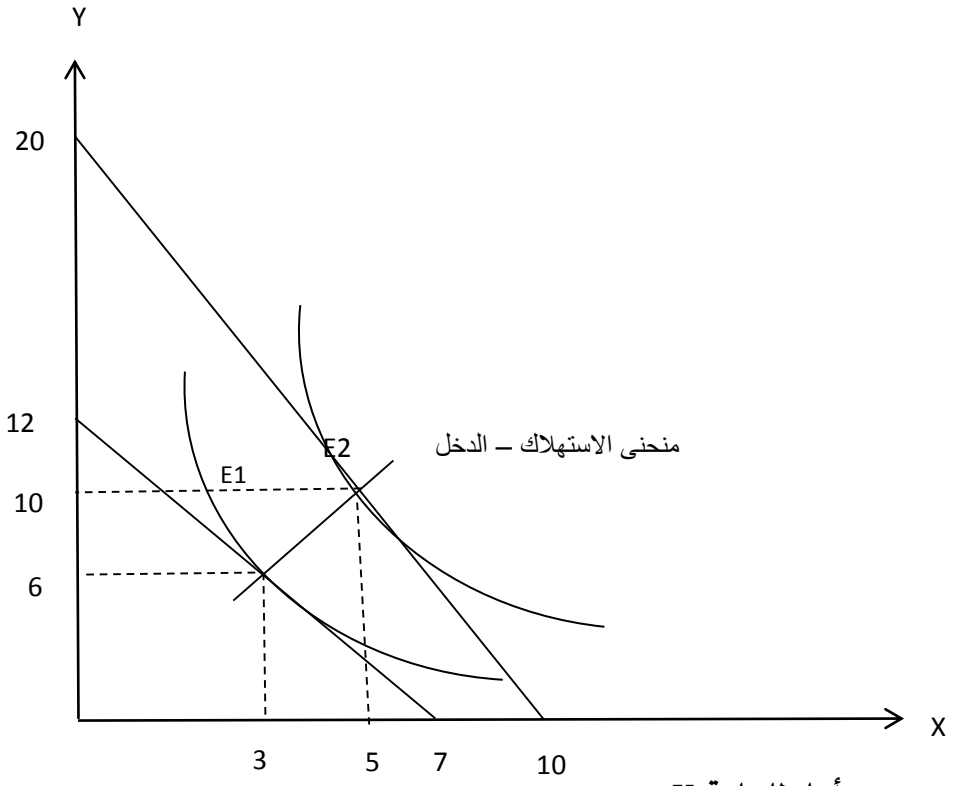
$TMS = -4$ المستهلك يتخلى عن 4 وحدات من Y مقابل حصوله على وحدة واحدة من X للبقاء على نفس المنفعة الكلية.

-اذا كان الدخل المخصص للانفاق هو $R = 12$، وأسعار السلعتين X و Y على التوالي هي $P_X = 2$ و $P_Y = 1$ ، فقيد الميزانية يكتب على الشكل: $2X + Y = 12$ ويمكن تمثيلها بفرض أن $X = 0$ فنجد $Y = \frac{12}{1} = 12$، كما نفرض أن $Y = 0$ فنجد $X = \frac{12}{2} = 6$ والنقطة التوازنية لهذا المستهلك هي $(3,6)$.

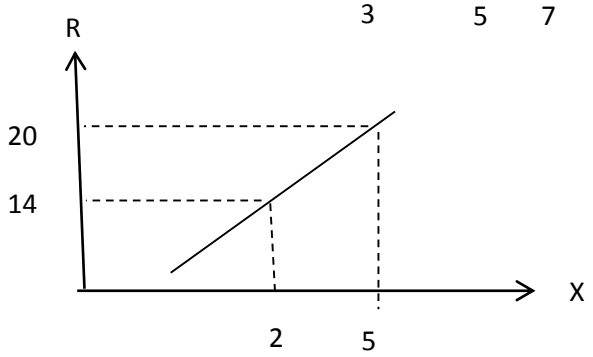
- إذا ارتفع دخل المستهلك إلى 20 ون وأسعار السلعتين X و Y على التوالي هي $P_X = 2$ و $P_Y = 1$ ، فقيد الميزانية يكتب على الشكل: $2X + Y = 20$ ويمكن تمثيلها بفرض أن $X = 0$ فنجد $Y = \frac{20}{1} = 20$، كما نفرض أن $Y = 0$ فنجد $X = \frac{20}{2} = 10$ والنقطة التوازنية لهذا المستهلك هي $(5,10)$.

المنحنى الذي يربط بين النقاط التوازنية هو منحنى الاستهلاك – الدخل والرسم البياني يوضح ذلك

التمثيل البياني لمنحنى الاستهلاك – الدخل:



منحنى أجل للسلعة X:



R	X
14	2
20	5

التمرين03:

تعريف المعدل الحدي للإحلال TMS:

هو عدد الوحدات من السلعة Y التي يتخلى عليها المستهلك للحصول على وحدة واحدة من السلعة X للبقاؤ على نفس مستوى الاشباع أو بتعبير آخر هو عدد الوحدات من السلعة X التي تحل محل وحدة واحدة من السلعة Y للبقاء على نفس مستوى الاشباع ويمكن حسابه كما يلي $TMS = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$ وهو دائما سالب.

حساب TMS بين (2,5) و(3,3):

$$TMS = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{3-5}{3-1} = -2$$

معناه أن المستهلك يتخلى على وحدتين من السلعة Y للحصول على وحدة واحدة من السلعة X للبقاء على منحنى السواء U1.

حساب TMS بين (6,4.2) و(7,3.5):

$$TMS = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{3.5 - 4.2}{7 - 6} = -0.7$$

معناه أن المستهلك يتخلى على 0.7 من السلعة Y للحصول على وحدة واحدة من السلعة X للبقاء على منحنى السواء U2.

إذا كان دخل المستهلك هو $R = 10$، وأسعار السلعتين X و Y على التوالي هي: $P_X = P_Y =$ 1 فإن قيد الميزانية هو: $10 = X + Y$ والميل هو $-\frac{P_X}{P_Y} = -1$

التمثيل البياني لقيد الميزانية: نفرض أن $X = 0$ فنجد $Y = \frac{10}{1} = 10$ كما نفرض أن $Y = 0$ فنجد $X = \frac{10}{1} = 10$

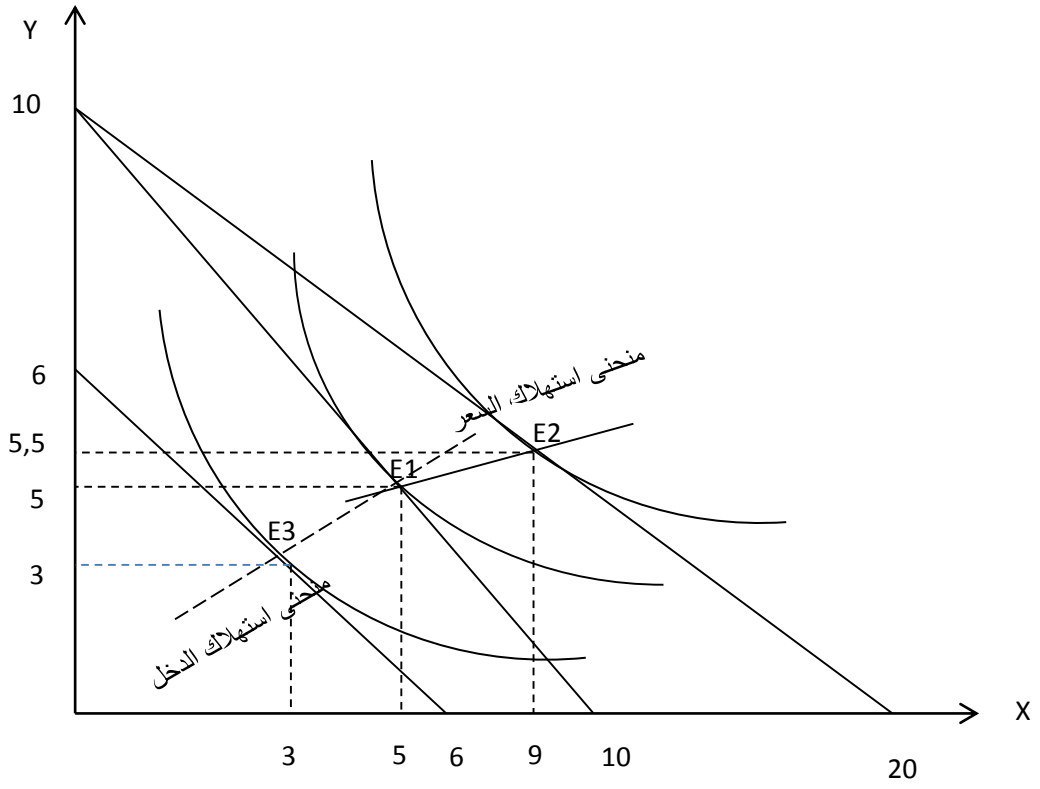
ومنه الكمية التوازنية هي: $E_1(5,5)$

عند انخفاض سعر P_X إلى $P_X = 0,5$ يصبح قيد الميزانية الجديد كما يلي: $10 = 0,5X +$ Y

التمثيل البياني لقيد الميزانية: نفرض أن $X = 0$ فنجد $Y = \frac{10}{1} = 10$ كما نفرض أن $Y =$ 0 فنجد $X = \frac{10}{0,5} = 20$

ومنه الكمية التوازنية هي: $E_2(9,5.5)$

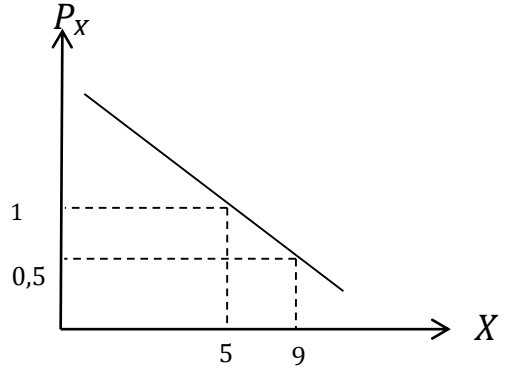
المنحنى الذي يربط بين النقاط التوازنية هو منحنى الاستهلاك–السعر: وهو عبارة عن المنحنى الذي يربط بين النقاط التوازنية عندما يكون سعر أحد السلعتين هو المتغير الوحيد مع بقاء العوامل الأخرى ثابتة.



اشتقاق منحنى الطلب:

P_X	X
1	5
0,5	9

ومن خلال هذا الجدول يمكن رسم منحنى الطلب كما هو مبين في الشكل التالي:



إذا كان دخل المستهلك هو $R = 6$، وأسعار السلعتين X و Y على التوالي هي: $P_X = P_Y = 1$ فإن قيد الميزانية هو: $6 = X + Y$ والميل هو $-\frac{P_X}{P_Y} = -1$

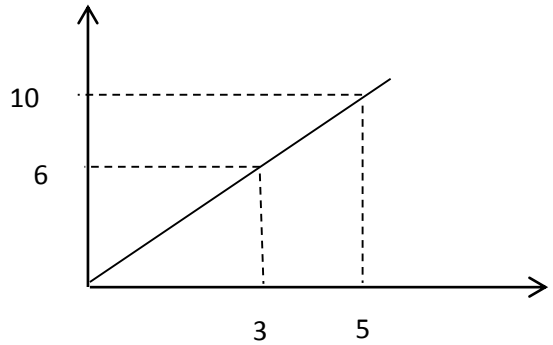
التمثيل البياني لقيد الميزانية: نفرض أن $X = 0$ فنجد $Y = \frac{6}{1} = 6$ كما نفرض أن $Y = 0$ فنجد $X = \frac{6}{1} = 6$

ومنه الكمية التوازنية هي: $E_3(3,3)$ وهي موضحة في الشكل البياني السابق.

المنحنى الذي يربط بين النقاط التوازنية هو منحنى الاستهلاك– الدخل: وهو عبارة عن المنحنى الذي يربط بين النقاط التوازنية عندما يكون الدخل هو المتغير الوحيد مع بقاء العوامل الأخرى ثابتة.

منحنى أجل للسلعة X:

R	X
10	5
6	3



التمرين 04:

حساب المعدل الحدي عند كل نقطة من هذا الجدول:

$$TMS = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

TMS_1	TMS_2	TMS_3
–	–	–
−5	−3	−3
−2	−2	−2
−0.7	−0.8	−0.8
−0.6	−0.7	−0.7
−0.5	−0.3	−0.3
−0.4	−0.2	−0.2
−0.3	−0.1	−0.1
−0.2		
−0.1		

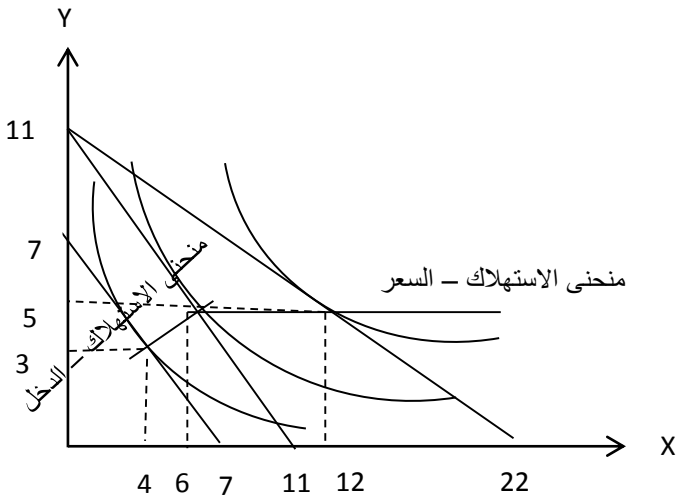
عند $R = 22$ وأسعار السلعتينX و Y على التوالي هي: $P_X = P_Y = 2$، فإن قيد الميزانية يكتب كما يلي: $22 = 2X + 2Y$

التمثيل البياني لخط الميزانية: : نفرض أن $X = 0$ فنجد $Y = \frac{22}{2} = 11$ كما نفرض أن $Y = 0$ فنجد $X = \frac{22}{2} = 11$

ومنه الكمية التوازنية هي: (6,5)

عند انخفاض سعر السلعة X إلى $P_X = 1$ فإن قيد الميزانية يكتب من الشكل: $22 = X + 2Y$ ويمثل كما يلي: نفرض أن $X = 0$ فنجد $Y = \frac{22}{2} = 11$ كما نفرض أن $Y = 0$ فنجد $X = \frac{22}{1} = 22$

ومنه الكمية التوازنية هي: (12,5) والتمثيل البياني لمنحنى الاستهلاك – السعر مبين في الشكل الوالي:



عند انخفاض الدخل إلى 14 من فإن قيد الميزانية يصبح $14 = 2X + 2Y$ ويمثل كما يلي:

نفرض أن $X = 0$ فنجد $Y = \frac{14}{2} = 7$ كما نفرض أن $Y = 0$ فنجد $X = \frac{14}{1} = 7$

ومنه الكمية التوازنية هي: (4,3) والتمثيل البياني لمنحنى الاستهلاك – الدخل مبين في الشكل السابق

التمرين 04:

- تمثل منحنيات السواء مجتمعة مع بعظها شبكة منحنيات السواء والتي تعطي مستويات مختلفة من الاشباع او المنفعة الكلية؟

حساب TMS بين (4,4.5) و(5,3.7):

$$TMS = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{3.7 - 4.5}{5 - 4} = -0.8$$

معناه أن المستهلك تخلى على 0.8 من السلعة Y للحصول على وحدة واحدة من السلعة X للبقاء على منحنى السواء U2.

حساب TMS بين (2,7) و(3,5):

$$TMS = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{5 - 7}{3 - 2} = -2$$

معناه أن المستهلك تخلى على وحدتين (2) من السلعة Y للحصول على وحدة واحدة من السلعة X للبقاء على منحنى السواء U1.

حساب TMS بين (7,5.5) و(8,5.2):

$$TMS = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{5.5 - 5.2}{7 - 8} = -0.3$$

معناه أن المستهلك يتخلى على 0.3 من السلعة Y للحصول على وحدة واحدة من السلعة X للبقاء على منحنى السواء U3.

- إذا كان دخل المستهلك هو $R = 12$، فإن قيد الميزانية هو: $X + Y = 12$ والتمثيل البياني لقيد الميزانية: نفرض أن $X = 0$ فنجد $Y = 12$ كما نفرض أن $Y = 0$ فنجد $X = 12$، والميل هو $-\frac{P_X}{P_Y} = -\frac{1}{1} = -1$

ومنه النقطة التوازنية هي: A(6,6) على منحنى السواء الثالث.

- اذا ارتفع سعر السلعة X إلى $P_X = 2$ وسعر السلعة Y هو $P_Y = 1$ فإن قيد الميزانية هو: $2X + Y = 12$ والميل هو $-\frac{P_X}{P_Y} = -\frac{2}{1} = -2$ ، التمثيل البياني لقيد الميزانية: نفرض أن $X = 0$ فنجد $Y = 12$، كما نفرض أن $Y = 0$ فنجد $X = \frac{12}{2} = 6$

ومنه النقطة التوازنية هي : B(3,6) على منحنى السواء الثاني.

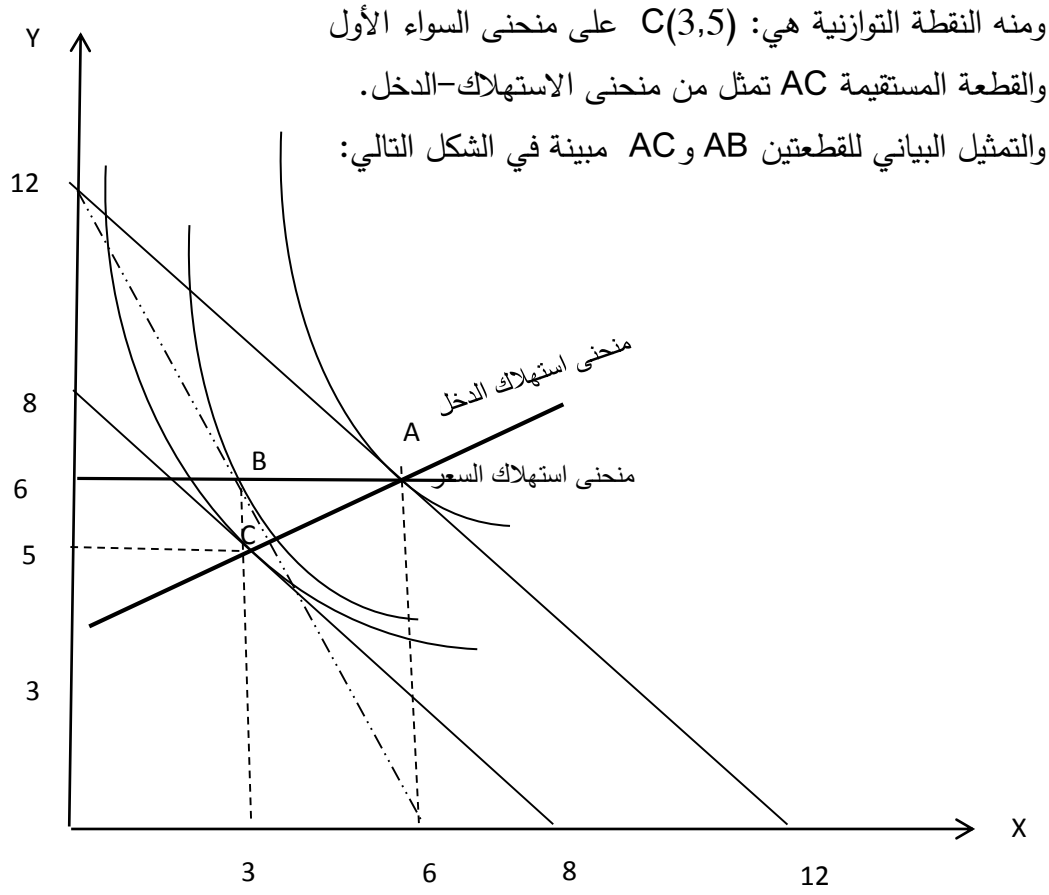
والقطعة المستقيمة AB تمثل منحنى الاستهلاك–السعر.

- إذا انخفض دخل المستهلك إلى 8 ون مع أسعار السلعتين X و Y على التوالي هي: $P_X = 1$، P_Y، التمثيل البياني لقيد الميزانية: نفرض أن $X = 0$ فنجد $Y = 8$ كما نفرض أن $Y = 0$ فنجد $X = 8$

ومنه النقطة التوازنية هي: C(3,5) على منحنى السواء الأول

والقطعة المستقيمة AC تمثل من منحنى الاستهلاك–الدخل.

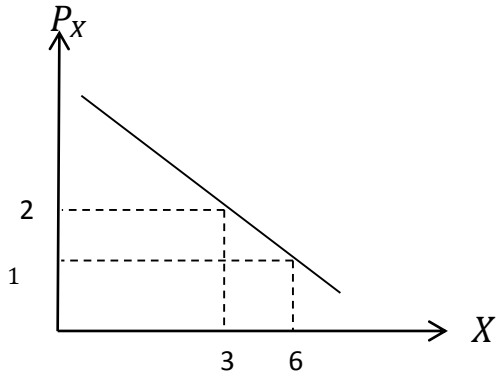
والتمثيل البياني للقطعتين AB و AC مبينة في الشكل التالي:



اشتقاق منحنى الطلب:

P_X	X
1	6
2	3

ومن خلال هذا الجدول يمكن رسم منحنى الطلب كما هو مبين في الشكل التالي:



التمرين 06:

ميزانية عمر تحسب كما يلي:

- 3 كتب بـ 20 دينار للكتاب الواحد ثمنها 60 دينار: $3 \times 20 = 60$
- قرصين 10 دنانير للقرص الواحد ثمنها 20 دينار: $2 \times 10 = 20$
- وبالتالي ثمن المشتريات هي ميزانية عمر التي ينفقها بالكامل على الكتب والاقراص المضغوطة:

$$\mathrm{R} = \mathrm{X}P_X + YP_Y = 20(3) + 10(2) = 80$$

- وعليه فإن قيد ميزانية عمر هو:

$$80 = 20\mathrm{X} + 10Y$$

- بمأن عمر على استعداد لتخلى على كتاب $\Delta Y = 1$ مقابل حصوله على قرصين مضغوطين $\Delta \mathrm{X} = 2$ فإن المعدل الحدي للإحلال يساوي:

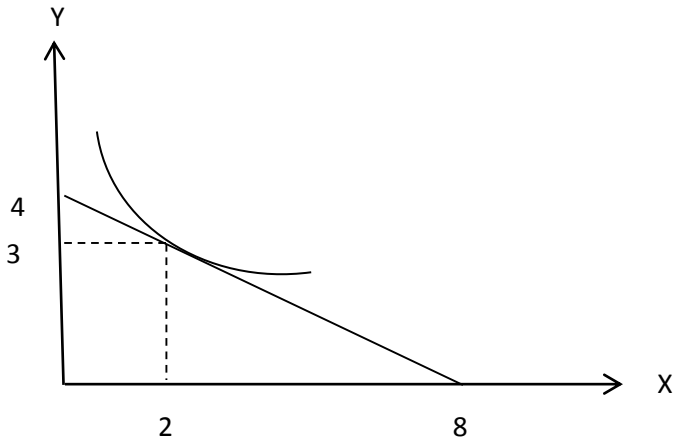
$$TMS = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = -\frac{1}{2}$$

كما أن TMS عند التوازن هو:

$$TMS = -\frac{P_X}{P_Y} = -\frac{1}{2}$$

وعليه فإن اختيار عمر هو اختيار أمثلي لأن:

$$TMS = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = -\frac{P_X}{P_Y} = -\frac{1}{2}$$



ميزانية عمر تحسب كما يلي:

- 5 كتب بـ 10 دينار للكتاب الواحد ثمنها 50 دينار: $5 \times 10 = 50$
- 3 أقراص بـ 10 دنانير للقرص الواحد ثمنها 30 دينار: $3 \times 10 = 30$
- وبالتالي ثمن المشتريات هي ميزانية عمر التي ينفقها بالكامل على الكتب والاقراص المضغوطة:

$$\mathrm{R} = \mathrm{X}P_X + YP_Y = 10(5) + 10(3) = 80$$

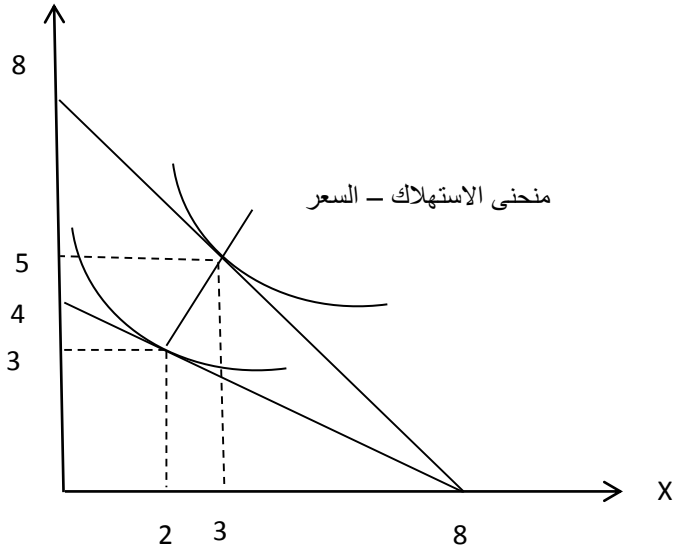
وعليه فإن ميزانية عمر لم تتغير بقيت 80 دينار بل تغير فقط سعر السلعة X ومنه قيد الميزانية الجديد هو:

$$80 = 10\mathrm{X} + 10Y$$

وبمأن ميل قيد الميزانية تغير فإن المعدل الحدي للإحلال عند التوازن تغير وأصبح:

$$TMS = -\frac{P_X}{P_Y} = -\frac{1}{1} = -1$$

والنقاط التوازنية لعمر موضحة في الشكل التالي:



والمنحنى الذي يربط بين النقاط التوازنية هو منحنى الاستهلاك – السعر وهو المنحنى الذي يربط بين النقاط التوازنية عندما يكون أحد الأسعار هو المتغير الوحيد وباقي العناصر ثابتة.

بمأن الأسعار عند التوازن ثابتة لم تتغير فإن TMS يأخذ نفس القيمة عند كل التفضيلات حتى لو تغيرت التفضيلات فعند النقطة التوازنية الأولى فإن المعدل الحدي للإحلال لعمر وخالد متساوي عند التوازن:

$$TMS = -\frac{P_X}{P_Y} = -\frac{1}{2}$$

أما قيد ميزانية خالد يأخذ الشكل التالي:

$$800 = 20X + 10Y$$

والكميات التوازنية لخالد تحسب كما يلي:

دوال المنفعة الحدية لكل سلعة

$$Um_Y = \frac{\partial UT}{\partial Y} = 20XY \text{،} Um_X = \frac{\partial UT}{\partial X} = 10Y^2$$

يتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن التالي:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{\boldsymbol{P_X}} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{\boldsymbol{P_Y}} \\ R = XP_X + YP_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{10Y^2}{\mathbf{10}} = \frac{20XY}{\mathbf{20}} \\ 800 = 10X + 20Y \end{cases}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين نجد:

$$\begin{cases} \frac{10Y^2}{20XY} = \frac{1}{2} \\ 800 = 10X + 20Y \end{cases}$$

وبالاختزال نجد:

$$\begin{cases} X = Y \\ 800 = 10X + 20Y \end{cases}$$

وبتعويض Y في قيد الميزانية نجد:

$$\begin{cases} X = Y \\ 800 = 10Y + 20Y \\ 800 = 30Y \end{cases}$$

ومنه

$Y = \frac{800}{30} = 26.66$ وبتعويض Y في X نجد $X = 26.66$

وعليه فإن التوفيقة المثلى لخالد والتي تعظم منفعته هي: (26.66,26.66)

التمرين 07:

حساب المعدل الحدي للإحلال عند التوازن:

$$TMS = -\frac{P_X}{P_Y} = -\frac{30}{10} = -3$$

التفسير الاقتصادي: المستهلك يتخلى على 3 وحدات من Y من أجل الحصول على وحدة واحدة من X للبقاء على نفس المنفعة (نفس منحنى السواء).

حساب قيمة ميزانية المستهلك:

$$\mathrm{R} = \mathrm{X}P_X + YP_Y = 30(5) + 10(9) = 240$$

من قيد ميزانيته:

$$240 = 30\mathrm{X} + 10Y$$

قيد الميزانية الجديد بعد زيادة دخله

$$270 = 30\mathrm{X} + 10Y$$

بمأن المستهلك على استعدادا لتخلي على وحدتين من Y مقابل حصوله على وحدة واحدة من X فالمعدل الحدي للإحلال

$$TMS = TMS = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = -\frac{2}{1} = -2$$

وبمان الأسعار لم تتغير المتغير الوحيد هو الدخل فإن المعدل الحدي للإحلال عند التوازن هو

$$TMS = -\frac{P_X}{P_Y} = -\frac{30}{10} = -3$$

وعليه فإن

$$TMS = |-2| < |-3|$$

وبالتالي فإن $TMS = 2$ هي أصغر من $TMS = 3$، وعليه حتى تتساوى القيمتين ويصبح خياره أمثلي يجب على المستهلك التقليل من X في المقابل زيادة في استهلاك Y

عند قيد الميزانية قبل الزيادة نجد الكميات التوازنية كما يلي:

دوال المنفعة الحدية لكل سلعة

$$Um_Y = \frac{\partial UT}{\partial Y} = X^3 ، Um_X = \frac{\partial UT}{\partial X} = 3X^2Y$$

يتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن التالي:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{\boldsymbol{P_X}} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{\boldsymbol{P_Y}} \\ R = XP_X + YP_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3X^2Y}{\mathbf{30}} = \frac{X^3}{\mathbf{10}} \\ 240 = 30X + 10Y \end{cases}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين نجد:

$$\begin{cases} \frac{X^2Y}{10} = \frac{X^3}{10} \\ 240 = 30X + 10Y \end{cases}$$

وبالاختزال نجد:

$$\begin{cases} X = Y \\ 240 = 30X + 10Y \end{cases}$$

وبتعويض Y في قيد الميزانية نجد:

$$\begin{cases} X = Y \\ 240 = 30Y + 10Y \\ 240 = 40Y \end{cases}$$

ومنه

$Y = \frac{240}{40} = 6$ ومنه $X = 6$

وعليه فإن التوفيقة المثلى لخالد والتي تعظم منفعته هي: (6,6)

التمرين 08:

البرهان الرياضي لميل الميزانية:

$$R = XP_X + YP_Y \Rightarrow 100 = 2X + 5Y \Rightarrow 5Y = 100 - 2X$$

$$Y = 20 - \frac{2}{5}X$$

ومنه ميل قيد الميزانية هو: $-\frac{2}{5}$

حساب TMS

$$TMS = -\frac{P_X}{P_Y} = -\frac{2}{5}$$

حساب الكميات التوازنية:

دوال المنفعة الحدية لكل سلعة

$$Um_Y = \frac{\partial UT}{\partial Y} = X، Um_X = \frac{\partial UT}{\partial X} = Y$$

يتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن التالي:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{\boldsymbol{P_X}} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{\boldsymbol{P_Y}} \\ R = XP_X + YP_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{Y}{\mathbf{2}} = \frac{X}{\mathbf{5}} \\ 100 = 2X + 5Y \end{cases}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين نجد:

$$\begin{cases} \frac{Y}{X} = \frac{2}{5} \\ 100 = 2X + 5Y \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases} \frac{2X}{5} = Y \\ 100 = 2X + 5Y \end{cases}$$

وبتعويض Y في قيد الميزانية نجد:

$$\begin{cases} X = Y \\ 100 = 2X + 5\left(\frac{2X}{5}\right) \\ 100 = 4X \end{cases}$$

ومنه

$X = \frac{100}{4} = 25$ وبتعويض X في Y نجد $Y = \frac{2(25)}{5}$ ومنه $Y = 10$

وعليه فإن التوفيقة المثلى لهذا المستهلك والتي تعظم منفعته هي: (25,10)

عند ارتفاع السعر إلى 7 دنانير :

يتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن التالي:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{P_X} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{P_Y} \\ R = XP_X + YP_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{Y}{2} = \frac{X}{7} \\ 100 = 2X + 7Y \end{cases}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين نجد:

$$\begin{cases} \frac{Y}{X} = \frac{2}{7} \\ 100 = 2X + 7Y \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases} Y = \frac{2X}{7} \\ 100 = 2X + 5Y \end{cases}$$

وبتعويض Y في قيد الميزانية نجد:

$$\begin{cases} X = Y \\ 100 = 2X + 7\left(\frac{2X}{7}\right) \\ 100 = 4X \end{cases}$$

ومنه

$X = \frac{100}{4} = 25$ وبتعويض X في Y نجد $Y = \frac{2(25)}{7}$ ومنه $Y = 7.14$

وعليه فإن التوفيقة المثلى لهذا المستهلك والتي تعظم منفعته هي: $(25,10)$

التمرين 09:

إيجاد الكمية التوازنية بيانيا:

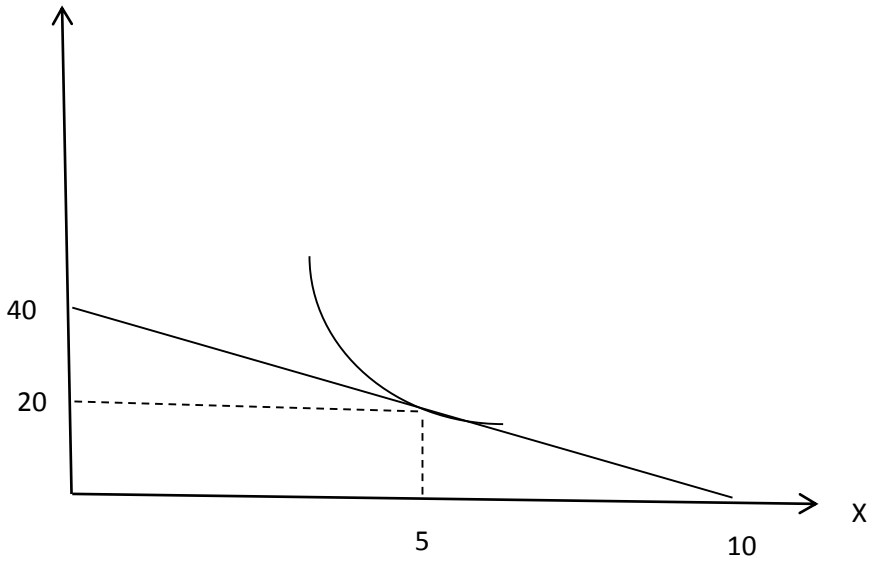
بمأن دالة المنفعة من الشكل: $UT = XY$ و $UT = 100$ فإن $Y = \frac{100}{X}$

لإيجاد الكمية التوازنية بيانيا نقوم بفرض قيمة على X كل مرة وتعويضها في Y نحصل على الجدول التالي:

X	1	2	3	4	5	6
Y	100	50	33.33	25	20	16.66

وقيد الميزانية : $80 = 8X + 2Y$

وعليه نقوم بتمثيل كل من قيد الميزانية ومنحنى السواء في نفس المعلم نحصل على النقطة التوازنية لتمثيل قيد الميزانية: نفرض أن $X = 0$ فنجد $Y = \frac{80}{2} = 40$ كما نفرض أن $Y = 0$ فنجد $X = \frac{80}{8} = 10$، والميل هو $-\frac{P_X}{P_Y} = -\frac{8}{2} = -4$



ولنتأكد من النتيجة نقوم بإيجاد الكمية التوازنية حسابيا كما يلي: $Y = \frac{100}{X}$

عند التوازن يتساوى ميل منحنى السواء مع ميل خط الميزانية:

$$TMS = \frac{\partial Y}{\partial X} = -\frac{P_X}{P_Y}$$

وعليه

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{(100)'(X) - (100)(X)'}{X^2} = -\frac{100}{X^2}$$

ولدينا ميل قيد الميزانية

$$-\frac{P_X}{P_Y} = -\frac{8}{4} = -4$$

ومنه

$$TMS = \frac{\partial Y}{\partial X} = -\frac{P_X}{P_Y} \Longrightarrow -\frac{100}{X^2} = -4$$
$$X^2 = \frac{100}{4} = 25 \Longrightarrow X = \sqrt{25} = 5$$

وبتعويض قيمة X في Y نجد $Y = \frac{100}{5} = 20$ إذن الكمية التوازنية هي: $(5,20)$

التمرين 10:

إيجاد الكمية التوازنية حسابيا:

بمأن دالة المنفعة من الشكل: $UT = Y(X+1)$ و $UT = 64$ فإن $Y = \frac{100}{X+1}$

عند التوازن يتساوى ميل منحنى السواء مع ميل خط الميزانية:

$$TMS = \frac{\partial Y}{\partial X} = -\frac{P_X}{P_Y}$$

وعليه

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{(64)'(X+1) - (100)(X+1)'}{(X+1)^2} = -\frac{64}{(X+1)^2}$$

ولدينا ميل قيد الميزانية

$$-\frac{P_X}{P_Y} = -\frac{10}{40} = -\frac{1}{4}$$

ومنه

$$TMS = \frac{\partial Y}{\partial X} = -\frac{P_X}{P_Y} \Longrightarrow -\frac{64}{(X+1)^2} = -\frac{1}{4}$$

بضرب الطرفين في الوسطين نجد

$$(X+1)^2 = 256 \Longrightarrow X+1 = \sqrt{256} = 16 \Longrightarrow X = 16-1 = 15$$

وبتعويض قيمة X في Y نجد $Y = \frac{64}{16} = 4$ إذن الكمية التوازنية هي: $(15,4)$

ومنه دخل المستهلك يحسب كما يلي:

$$R = XP_X + YP_Y \Longrightarrow 10(15) + 40(4) = 310$$

وعليه قيد الميزانية:

$$310 = 10X + 40Y$$

ولإيجاد الكمية التوازنية بيانيا نقوم بفرض قيمة على X كل مرة وتعويضها في Y نحصل على الجدول التالي:

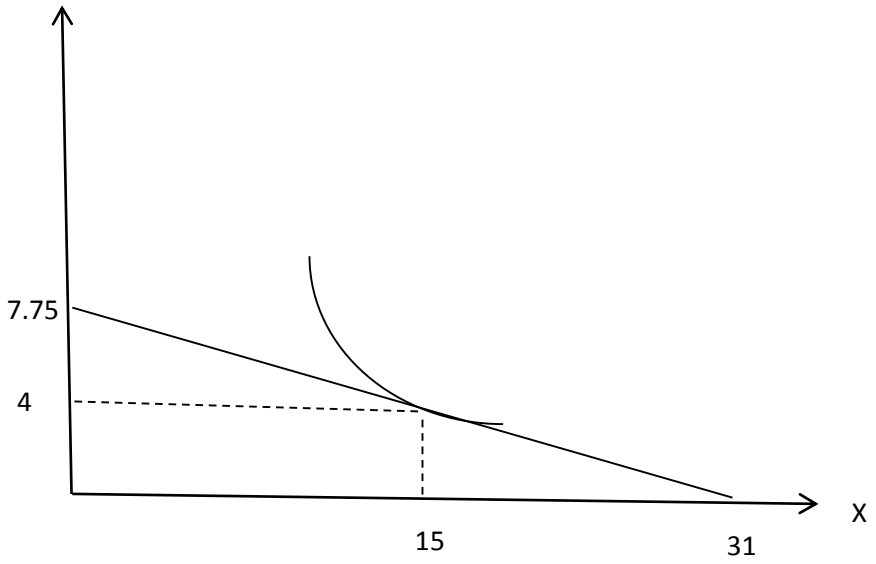
X	12	13	14	15	16	17
Y	4.9	4.57	4.26	4	3.55	3.36

وقيد الميزانية : $310 = 10X + 40Y$

وعليه نقوم بتمثيل كل من قيد الميزانية ومنحنى السواء في نفس المعلم نحصل على النقطة التوازنية

لتمثيل قيد الميزانية: نفرض أن $X = 0$ فنجد $Y = \frac{310}{40} = 7.75$ كما نفرض أن $Y = 0$ فنجد $X = \frac{310}{10} = 31$، والميل هو $-\frac{P_X}{P_Y} = -\frac{10}{40} = -\frac{1}{4}$

Y



التمرين 11:

إيجاد الكمية التوازنية:

دوال المنفعة الحدية لكل سلعة

$$Um_Y = \frac{\partial UT}{\partial Y} = X، Um_X = \frac{\partial UT}{\partial X} = Y$$

يتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن التالي:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{\boldsymbol{P_X}} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{\boldsymbol{P_Y}} \\ R = XP_X + YP_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{Y}{\mathbf{1}} = \frac{X}{\mathbf{2}} \\ 20 = X + 2Y \end{cases}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين نجد:

$$\begin{cases} Y = \frac{X}{2} \\ 20 = X + 2Y \end{cases}$$

وبتعويض Y في قيد الميزانية نجد:

$$\begin{cases} Y = \frac{X}{2} \\ 20 = X + 2\frac{X}{2} \\ 20 = 2X \end{cases}$$

ومنه

$$X = 10 \text{ و } Y = \frac{X}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

وعليه فإن التوفيقة المثلى للمستهلك والتي تعظم منفعته هي: $E_0\ (10{,}5)$

حجم المنفعة الكلية: $\mathrm{UT} = (10)(5) = 50$

عند ارتفاع سعر السلعة Y بوحدتين:

أي سعر السلعة Y أصبح $P_Y = 2 + 2 = 4$ وعليه فإن الكميات التوازنية الجديدة هي: $E_1\ (X_1, Y_1)$

يتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن التالي:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{P_X} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{P_Y} \\ R = XP_X + YP_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{Y}{1} = \frac{X}{4} \\ 20 = X + 4Y \end{cases}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين نجد:

$$\begin{cases} Y = \frac{X}{4} \\ 20 = X + 4Y \end{cases}$$

وبتعويض Y في قيد الميزانية نجد:

$$\begin{cases} Y = \frac{X}{4} \\ 20 = X + 4\frac{X}{4} \\ 20 = 2X \end{cases}$$

ومنه

$X = 10$ و $Y = \frac{X}{4} = \frac{10}{4} = 2.5$

وعليه فإن التوفيقة المثلى للمستهلك والتي تعظم منفعته هي: $E_1\ (10{,}2.5)$

حجم المنفعة الكلية: $\mathrm{UT} = (10)(2.5) = 25$

تحديد أثر الاحلال والدخل:

حسب هيكس

حسب هيكس فالمستهلك يبقى على نفس منحنى السواء الأصلي للحفاظ على نفس المنفعة الكلية فينتقل من النقطة الاصلية إلى نقطة وهمية جديدة لها نفس منفعة النقطة الاصلية أي $\mathrm{UT} = 50 = XY$

ولدينا مما سبق من شرط التوازن العلاقة بين X و Y لما ارتفع سعر السلعة Y بحيث $Y = \frac{X}{4}$ نعوضه في دالة المنفعة الكلية نجد

$$\mathrm{UT} = 50 = XY = X\frac{X}{4}$$

$$X^2 = (50)(4) = 200 \Longrightarrow X = \sqrt{200} \Longrightarrow X = 14.14$$

ومنه

$$Y = \frac{X}{4} = \frac{14.14}{4} \Longrightarrow Y = 3.53$$

ومن النقطة التوازنية الوهمية: $E_2\ (14.14{,}3.53)$

وعليه نبحث عن الدخل الحقيقي للمستهلك بعدما ارتفع سعر السلعة Y

$$R = XP_X + YP_Y \Longrightarrow R = X + 4Y \Longrightarrow R = 14.14 + 4(3.53)$$

ومنه

$$R = 28.28$$

أثر الإحلال ES:

$$ES_X = X_2 - X_0 = 14.14 - 10 = 4.14$$
$$ES_Y = Y_2 - Y_0 = 3.53 - 5 = -1.47$$

أي أن المستهلك قام بإحلال كمية من X محل كمية من Y بسبب ارتفاع سعرها؛ أي زاد من استهلاك X بـ 4.14 وحدات وانقاص 1.47 من Y لارتفاع سعرها للبقاء على نفس المنفعة.

أثر الدخل ER:

$$ER_X = X_1 - X_2 = 10 - 14.14 = -4.14$$
$$ER_Y = Y_1 - Y_2 = 2.5 - 3.53 = -1.03$$

من خلال أثر الدخل نستنتج أن ارتفاع سعر السلعة Y انعكس سلبا على المستهلك حيث انخفضت قدرته الشرائية (الدخل الحقيقي).

الأثر الكلي:

$$ET_X = ES_X + ER_X = 4.14 + -4.14 = 0$$
$$ET_Y = ES_Y + ER_Y = (-1.47) + (-1.03) = -2.5$$

حسب سلتسكي:

عند تغير السعر حسب سلتسكي فإن المستهلك لايبقى عند النقطة التوازنية الجديدة بل يبحث عن نقطة وهمية بسحب قيد ميزانية الجديد الذي ارتفع سعره إلى النقطة الاصلية. إلا أن هذه النقطة لاتعتبر نقطة توازن للمستهلك لأنها لا تشكل مماسا لخط الميزانية لهذا نبحث عن النقطة الوهمية التي تكون مماسا لخط الميزانية المسحوب. وعليه يمكن حساب قيمة الدخل الحقيقي من خلال النقطة الاصلية للمستهلك E_0 (10,5)

$$R = XP_X + YP_Y \Longrightarrow R = X + 4Y \Longrightarrow R = 10 + 4(5)$$

ومنه

$$R = 30$$

إيجاد القيم التوازنية للنقطة الوهمية E_2 (X_2, Y_2) بالدخل الحقيقي بحيث يتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن التالي:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{\boldsymbol{P_X}} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{\boldsymbol{P_Y}} \\ R = XP_X + YP_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{Y}{\mathbf{1}} = \frac{X}{\mathbf{4}} \\ 30 = X + 4Y \end{cases}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين نجد:

$$\begin{cases} Y = \frac{X}{4} \\ 30 = X + 4Y \end{cases}$$

وبتعويض Y في قيد الميزانية نجد:

$$\begin{cases} Y = \frac{X}{4} \\ 30 = X + 4\frac{X}{4} \\ 30 = 2X \end{cases}$$

ومنه

$X = 15$ و $Y = \frac{X}{4} = \frac{15}{4} = 3.75$

وعليه فإن التوفيقة الوهمية المثلى للمستهلك هي: E_2 (15,3.75)

أثر الإحلال ES:

$$ES_X = X_2 - X_0 = 15 - 10 = 5$$
$$ES_Y = Y_2 - Y_0 = 3.75 - 5 = -1.25$$

أي أن المستهلك قام بإحلال كمية من X محل كمية من Y بسبب ارتفاع سعرها؛ أي زاد من استهلاك X بـ 5 وحدات وانقاص 1.25 من Y لارتفاع سعرها.

أثر الدخل ER:

$$ER_X = X_1 - X_2 = 10 - 15 = -5$$
$$ER_Y = Y_1 - Y_2 = 2.5 - 3.75 = -1.25$$

من خلال أثر الدخل نستنتج أن ارتفاع سعر السلعة Y انعكس سلبا على المستهلك حيث انخفضت قدرته الشرائية (الدخل الحقيقي).

الأثر الكلي:

$$ET_X = ES_X + ER_X = 5 + -5 = 0$$
$$ET_Y = ES_Y + ER_Y = (-1.25) + (-1.25) = -2.5$$

التمرين 12:

إيجاد الكمية التوازنية:

دوال المنفعة الحدية لكل سلعة

$$Um_X = \frac{\partial UT}{\partial X} = 5Y^2 ، Um_Y = \frac{\partial UT}{\partial Y} = 10XY$$

يتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن التالي:

$$\begin{cases} \frac{Um_X}{P_X} = \frac{Um_Y}{P_Y} \\ R = XP_X + YP_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5Y^2}{2} = \frac{10XY}{4} \\ 120 = 2X + 4Y \end{cases}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين نجد:

$$\begin{cases} Y = \frac{20X}{20} \\ 120 = 2X + 4Y \end{cases}$$

وبتعويض Y في قيد الميزانية نجد:

$$\begin{cases} Y = X \\ 120 = 2X + 4X \\ 120 = 6X \end{cases}$$

ومنه

$X = 20$ و $Y = X = 20$

وعليه فإن التوفيقة المثلى للمستهلك والتي تعظم منفعته هي: $E_0\ (20{,}20)$

حجم المنفعة الكلية: $\mathrm{UT} = 5(20)(20)^2 = 40000$

التمثيل البياني للنقطة التوازنية $E_0\ (20{,}20)$

لدينا

$$\mathrm{UT} = 5XY^2 = 40000 \Longrightarrow Y^2 = \frac{40000}{5X} = \frac{8000}{X} \Longrightarrow Y = \sqrt{\frac{8000}{X}} \Longrightarrow Y = \frac{89.44}{\sqrt{X}}$$

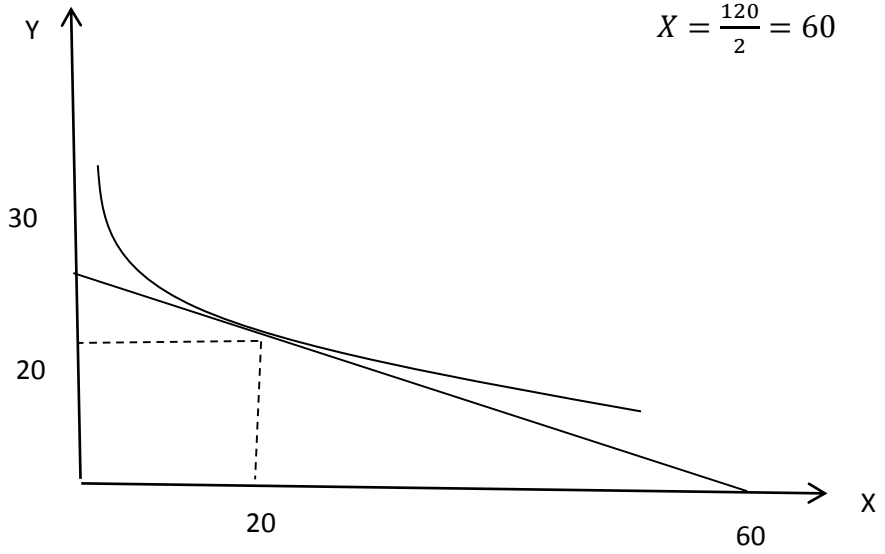
ولإيجاد الكمية التوازنية بيانيا نقوم بفرض قيمة على X كل مرة وتعويضها في Y نحصل على الجدول التالي:

X	10	20	30	40	50
Y	28 .28	20	16.32	14.14	12.64

وقيد الميزانية : $120 = 2X + 4Y$

وعليه نقوم بتمثيل كل من قيد الميزانية ومنحنى السواء في نفس المعلم نحصل على النقطة التوازنية

لتمثيل قيد الميزانية: نفرض أن $X = 0$ فنجد $Y = \frac{120}{4} = 30$ كما نفرض أن $Y = 0$ فنجد $X = \frac{120}{2} = 60$



عند انخفاض سعر السلعة Y فإن الكميات التوازنية الجديدة هي: $E_1\ (X_1, Y_1)$ ويتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن التالي:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{\boldsymbol{P_X}} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{\boldsymbol{P_Y}} \\ R = XP_X + YP_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5Y^2}{\mathbf{2}} = \frac{10XY}{\mathbf{2}} \\ 120 = 2X + 2Y \end{cases}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين نجد:

$$\begin{cases} Y = 2X \\ 120 = 2X + 4X \end{cases}$$

وبتعويض Y في قيد الميزانية نجد:

$$\begin{cases} Y = 2X \\ 120 = 6X \end{cases}$$

ومنه

$X = 20$ و $Y = 2X = 2(20) = 40$

وعليه فإن التوفيقة المثلى للمستهلك والتي تعظم منفعته هي: $E_1\ (20{,}40)$

حجم المنفعة الكلية: $\mathrm{UT} = 5(20)(40)^2 = 160000$

التمثيل البياني للنقطة التوزنية $E_1\ (X_1, Y_1)$

لدينا

$$\mathrm{UT} = 5XY^2 = 160000 \Longrightarrow Y^2 = \frac{160000}{5X} = \frac{32000}{X} \Longrightarrow Y = \sqrt{\frac{32000}{X}}$$

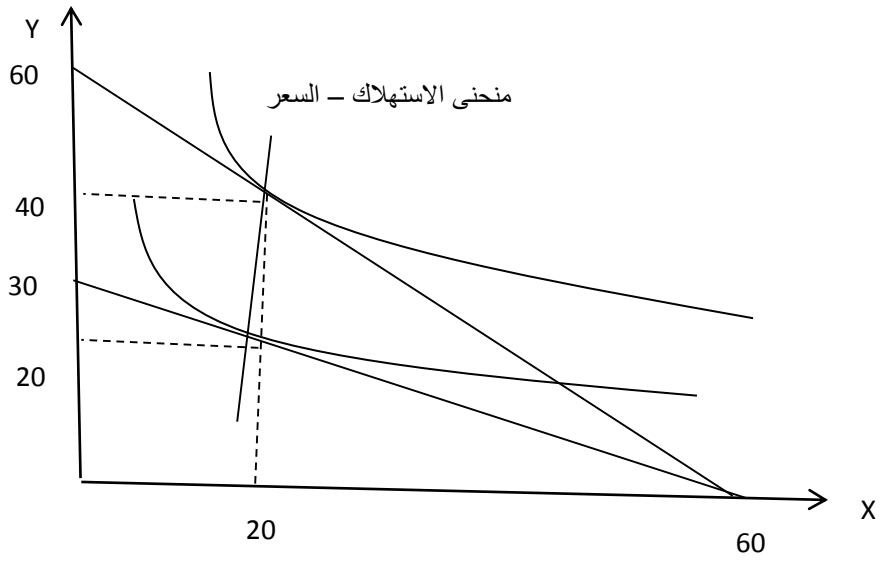
ولإيجاد الكمية التوازنية بيانيا نقوم بفرض قيمة على X كل مرة وتعويضها في Y نحصل على الجدول التالي:

X	10	20	30	40	50
Y	56.56	40	32.65	28.28	25.3

وقيد الميزانية : $120 = 2X + 2Y$

وعليه نقوم بتمثيل كل من قيد الميزانية ومنحنى السواء في نفس المعلم نحصل على النقطة التوازنية

لتمثيل قيد الميزانية: نفرض أن $X = 0$ فنجد $Y = \frac{120}{2} = 60$ كما نفرض أن $Y = 0$ فنجد $X = \frac{120}{2} = 60$



المنحنى الذي يربط بين النقاط التوزنية هو منحنى الاستهلاك–السعر وهو المنحنى الذي يربط بين النقاط التوازنية عندما يكون أحد الأسعار هو المتغير الوحيد وباقي العناصر ثابتة.

تحديد أثر الاحلال والدخل:

حسب هيكس

حسب هيكس فالمستهلك يبقى على نفس منحنى السواء الأصلي للحفاظ على نفس المنفعة الكلية فينتقل من النقطة الاصلية إلى نقطة وهمية جديدة لها نفس منفعة النقطة الاصلية أي

$$\mathrm{UT} = 5XY^2 = 40000$$

ولدينا مما سبق من شرط التوازن العلاقة بين X و Y لما انخفاض سعر السلعة Y بحيث $Y = 2X$ نعوضه في دالة المنفعة الكلية نجد

$$\mathrm{UT} = 5XY^2 = 40000 \Longrightarrow 5X(2X)^2 = 20X^3 = 40000$$

$$X^3 = \frac{40000}{20} = 2000 \Longrightarrow X = \sqrt[3]{2000} \Longrightarrow X = 12.6$$

ومنه

$$Y = 2X = 2(12.6) \Longrightarrow Y = 25.2$$

ومن النقطة التوازنية الوهمية: E_2 (12.6,25.2)

وعليه نبحث عن الدخل الحقيقي للمستهلك بعدما انخفاض سعر السلعة Y

$$R = XP_X + YP_Y \Longrightarrow R = 2X + 2Y \Longrightarrow R = 2(12.6) + 2(25.2) =$$

ومنه

$$R = 75.6$$

أثر الإحلال ES:

$$ES_X = X_2 - X_0 = 12.6 - 20 = -7.4$$
$$ES_Y = Y_2 - Y_0 = 25.2 - 20 = 5.2$$

عند انخفاض السعر أدى ذلك إلى زيادة استهلاك المستهلك لسلعة Y وانقاصه من السلعة X أي 5.2 من السلعة X حلت محل 7.4 من السلعة Y.

أثر الدخل ER:

$$ER_X = X_1 - X_2 = 20 - 12.6 = 7.4$$
$$ER_Y = Y_1 - Y_2 = 40 - 25.2 = 14.8$$

بانخفاض السعر أدى ذلك لزيادة القدرة الشرائية للمستهلك وتجلى ذلك في القيم الموجبة لأثر الدخل أي زيادة السلعتين معا

الأثر الكلي:

$$ET_X = ES_X + ER_X = 7.4 + (-7.4) = 0$$

$$ET_Y = ES_Y + ER_Y = 14.8 + 5.2 = 20$$

نلاحظ ان اثر الدخل والاحلال موجبين معا بالنسبة للسلعة Y وبالتالي يعملان في نفس الاتجاه عكس اتجاه السعر السلعة Y الذي انخفض وبالتالي فالسلعة Y سلعة عادية.

$$\downarrow P_Y \Longrightarrow \begin{cases} ES_Y > 0 \\ ER_Y > 0 \end{cases} \Longrightarrow Y \text{ سلعة عادية}$$

حسب سلتسكي:

عند تغير السعر حسب سلتسكي فإن المستهلك لايبقى عند النقطة التوازنية الجديدة بل يبحث عن نقطة وهمية بسحب قيد ميزانية الجديد الذي ارتفع سعره إلى النقطة الاصلية. إلا أن هذه النقطة لاتعتبر نقطة توازن للمستهلك لأنها لا تشكل مماسا لخط الميزانية لهذا نبحث عن النقطة الوهمية التي تكون مماسا لخط الميزانية المسحوب. وعليه يمكن حساب قيمة الدخل الحقيقي من خلال النقطة الاصلية للمستهلك $E_0\ (20{,}20)$

$$R = XP_X + YP_Y \Longrightarrow R = 2X + 2Y \Longrightarrow R = 2(20) + 2(20) =$$

ومنه

$$R = 80$$

إيجاد القيم التوازنية للنقطة الوهمية $E_2\ (X_2, Y_2)$ بالدخل الحقيقي بحيث يتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن التالي:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{\boldsymbol{P_X}} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{\boldsymbol{P_Y}} \\ R = XP_X + YP_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5Y^2}{2} = \frac{10XY}{2} \\ 80 = 2X + 2Y \end{cases}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين نجد:

$$\begin{cases} Y = 2X \\ 80 = 2X + 4X \end{cases}$$

وبتعويض Y في قيد الميزانية نجد:

$$\begin{cases} Y = 2X \\ 80 = 6\mathrm{X} \end{cases}$$

ومنه

$$X = 13.33 \text{ و } Y = 2X = 2(13.33) = 26.66$$

وعليه فإن التوفيقة الوهمية المثلى للمستهلك هي: $E_2\ (13.33{,}26.66)$

أثر الإحلال ES:

$$ES_X = X_2 - X_0 = 13.33 - 20 = -6.66$$
$$ES_Y = Y_2 - Y_0 = 26.66 - 20 = 6.66$$

أي أن المستهلك قام بإحلال كمية من X محل كمية من Y بسبب ارتفاع سعرها؛ أي زاد من استهلاك X بـ 5 وحدات وانقاص 1.25 من Y لارتفاع سعرها.

أثر الدخل ER:

$$ER_X = X_1 - X_2 = 20 - 13.33 = 6.66$$
$$ER_Y = Y_1 - Y_2 = 40 - 26.66 = 13.34$$

من خلال أثر الدخل نستنتج أن ارتفاع سعر السلعة Y انعكس سلبا على المستهلك حيث انخفضت قدرته الشرائية (الدخل الحقيقي).

الأثر الكلي:

$$ET_X = ES_X + ER_X = -6.66 + 6.66 = 0$$
$$ET_Y = ES_Y + ER_Y = (6.66) + (13.34) = 20$$

إيجاد الكمية التوازنية لما يرتفع سعر السلعة X إلى 6ون:

عند ارتفاع سعر السلعة X فإن الكميات التوازنية الجديدة هي: $E_1\ (X_1, Y_1)$ ويتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن التالي:

$$\begin{cases} \frac{Um_X}{P_X} = \frac{Um_Y}{P_Y} \\ R = XP_X + YP_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5Y^2}{6} = \frac{10XY}{4} \\ 120 = 6X + 4Y \end{cases}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين نجد:

$$\begin{cases} Y = 3X \\ 120 = 6X + 4(3X) \end{cases}$$

وبتعويض Y في قيد الميزانية نجد:

$$\begin{cases} Y = 2X \\ 120 = 18X \\ X = \frac{120}{18} \end{cases}$$

ومنه

$X = 6.66$ و $Y = 3X = 3(6.66) = 40$

وعليه فإن التوفيقة المثلى للمستهلك والتي تعظم منفعته هي: $E_1\ (6.66{,}20)$

حجم المنفعة الكلية: $\mathrm{UT} = 5(6.66)(20)^2 = 13320$

تحديد أثر الاحلال والدخل عند ارتفاع سعر السلعة X:

حسب هيكس

حسب هيكس فالمستهلك يبقى على نفس منحنى السواء الأصلي للحفاظ على نفس المنفعة الكلية فينتقل من النقطة الاصلية إلى نقطة وهمية جديدة لها نفس منفعة النقطة الاصلية $E_{0(20,20)}$

$$\mathrm{UT} = 5XY^2 = 40000$$

ولدينا مما سبق من شرط التوازن العلاقة بين X و Y لما انخفاض سعر السلعة Y بحيث $Y = 3X$ نعوضه في دالة المنفعة الكلية نجد

$$\mathrm{UT} = 5XY^2 = 40000 \Longrightarrow 5X(3X)^2 = 45X^3 = 40000$$

$$X^3 = \frac{40000}{45} \Longrightarrow X = \sqrt[3]{\frac{40000}{45}} \Longrightarrow X = 9.61$$

ومنه

$$Y = 3X = 3(9.61) \Longrightarrow Y = 28.84$$

ومن النقطة التوازنية الوهمية: E_2 (9.61,28.84)

وعليه نبحث عن الدخل الحقيقي للمستهلك بعدما انخفاض سعر السلعة Y

$$R = XP_X + YP_Y \Longrightarrow R = 6X + 4Y \Longrightarrow R = 6(9.61) + 4(28.84) =$$

ومنه

$$R = 173.05$$

أثر الإحلال ES:

$$ES_X = X_2 - X_0 = 9.61 - 20 = -10.39$$
$$ES_Y = Y_2 - Y_0 = 28.84 - 20 = 8.84$$

عند ارتفاع السعر أدى ذلك إلى زيادة استهلاك المستهلك لسلعة Y بـ 8.84 وانقاصه من السلعة X بـ 10.39 حيث استبدل المستهلك كمية من السلعة X بكمية من السلعة Y .

أثر الدخل ER:

$$ER_X = X_1 - X_2 = 6.66 - 9.61 = -2.95$$
$$ER_Y = Y_1 - Y_2 = 20 - 28.84 = -8.84$$

بارتفاع السعر أدى ذلك لانخفاض القدرة الشرائية للمستهلك وتجلى ذلك في القيم السالبة لأثر الدخل أي نقص الكمية المستهلكة من السلعتين.

الأثر الكلي:

$$ET_X = ES_X + ER_X = (-10.39) + (-2.95) = -13.33$$
$$ET_Y = ES_Y + ER_Y = 8.84 + (-8.84) = 0$$

حسب سلتسكي:

عند تغير السعر حسب سلتسكي فإن المستهلك لا يبقى عند النقطة التوازنية الجديدة بل يبحث عن نقطة وهمية بسحب قيد ميزانية الجديد الذي ارتفع سعره إلى النقطة الاصلية. إلا أن هذه النقطة لا تعتبر نقطة توازن للمستهلك لأنها لا تشكل مماسا لخط الميزانية لهذا نبحث عن النقطة الوهمية التي تكون مماسا لخط الميزانية المسحوب. وعليه يمكن حساب قيمة الدخل الحقيقي من خلال النقطة الاصلية للمستهلك E_0 (20,20)

$$R = XP_X + YP_Y \Longrightarrow R = 6X + 4Y \Longrightarrow R = 6(20) + 4(20) =$$

ومنه

$$R = 200$$

إيجاد القيم التوازنية للنقطة الوهمية $E_2\ (X_2, Y_2)$ بالدخل الحقيقي بحيث يتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن التالي:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{P_X} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{P_Y} \\ R = XP_X + YP_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5Y^2}{6} = \frac{10XY}{4} \\ 200 = 6X + 4Y \end{cases}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين نجد:

$$\begin{cases} Y = 3X \\ 200 = 6X + 4Y \end{cases}$$

وبتعويض Y في قيد الميزانية نجد:

$$\begin{cases} Y = 3X \\ 200 = 6\mathrm{X} + 4(3X) \\ 200 = 18X \end{cases}$$

ومنه

$$X = 11.11 \text{ و } Y = 3X = 3(11.11) = 33.33$$

وعليه فإن التوفيقة الوهمية المثلى للمستهلك هي: $E_2\ (11.11,33.33)$

أثر الإحلال ES:

$$ES_X = X_2 - X_0 = 11.11 - 20 = -8.88$$
$$ES_Y = Y_2 - Y_0 = 33.33 - 20 = 13.33$$

أثر الدخل ER:

$$ER_X = X_1 - X_2 = 20 - 11.11 = 8.88$$
$$ER_Y = Y_1 - Y_2 = 40 - 33.33 = 6.67$$

الأثر الكلي:

$$ET_X = ES_X + ER_X = -8.88 + 8.88 = 0$$
$$ET_Y = ES_Y + ER_Y = (13.33) + (6.67) = 20$$

التمرين 13:

حسب هيكس

يتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن التالي:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{P_X} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{P_Y} \\ R = XP_X + YP_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{10} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{40} \\ 310 = 10X + 40Y \end{cases}$$

بحيث:

$Um_X = \frac{\partial UT}{\partial X} = Y$، $Um_Y = \frac{\partial UT}{\partial Y} = X + 1$ نعوض دوال المنفعة الحدية في شرط التوازن نحصل على:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{10} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{40} \\ 310 = 10X + 40Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{Y}{10} = \frac{X+1}{40} \\ 310 = 10X + 40Y \end{cases}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين نجد:

$$\begin{cases} 40Y = 10(X+1) \\ 310 = 10X + 40Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = \frac{10(X+1)}{40} \\ 310 = 10X + 40Y \end{cases}$$

وبالاختزال نجد:

$$\begin{cases} Y = \dfrac{(X+1)}{4} \\ 310 = 10X + 40Y \end{cases}$$

وبتعويض Y في قيد الميزانية نجد:

$$\begin{cases} Y = \dfrac{(X+1)}{4} \\ 310 = 10X + 40\dfrac{(X+1)}{4} \\ 310 = 10X + 10X + 10 \\ 310 - 10 = 20X \\ 300 = 20X \end{cases}$$

ومنه

$X = \frac{300}{20} = 15$ وبتعويض X في Y نجد $Y = \frac{(15+1)}{4} = 4$

وعليه فإن التوفيقة المثلى لهذا المستهلك والتي تعظم له منفعته في حدود دخله المتاح هي: $E_0(15,4)$

حجم المنفعة الكلية:

$$UT = Y(X+1) = 4(15+1) = 64$$

حساب أثر الإحلال والدخل وأثر السعر:

عند انخفاض سعر السلعة X إلى $P_X = 5$ ، نبحث عن التوفيقة الوهمية $E_2(X_2, Y_2)$:

نعوض دوال المنفعة الحدية في شرط التوازن نحصل على:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{Um_X}}{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{Um_Y}}{\mathbf{40}} \\ \mathrm{R} = 5X + 40Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{Y}{\mathbf{5}} = \frac{X+1}{\mathbf{40}} \\ \mathrm{R} = 5X + 40Y \end{cases}$$

بحيث R هو الدخل الحقيقي عند انخفاض السعر

وبضرب الطرفين في الوسطين نجد:

$$\begin{cases} 40Y = 5(X+1) \\ \mathrm{R} = 5X + 40Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = \frac{5(X+1)}{40} \\ \mathrm{R} = 5X + 40Y \end{cases}$$

وبالاختزال نجد:

$$\begin{cases} Y = \dfrac{(X+1)}{8} \\ \mathrm{R} = 5X + 40Y \end{cases}$$

بمأن النقطة $E_0(X_0,Y_0)$ لها نفس منفعة $E_2(X_2,Y_2)$ وهي $UT=64$ فهي تقع على نفس منحنى السواء الأول لهذا يكفي تعويض قيمة Y في دالة المنفعة للحصول على للحصول على قيمة X_2

$$UT=64=Y(X+1)$$
$$64=\frac{(X+1)}{8}(X+1)$$
$$64=\frac{(X+1)^2}{8}\Longrightarrow(64)(8)=(X+1)^2\Longrightarrow 512=(X+1)^2$$
$$(X+1)=\sqrt{512}=22.63\Longrightarrow X=22{,}63-1\Longrightarrow X=21.63$$

ومنه

$$Y=\frac{(X+1)}{8}=\frac{22.63}{8}\Longrightarrow Y=2.82$$

وعليه فإن التوفيقة الوهمية $E_2(X_2,Y_2)$ هي: $E_2(21.63{,}2.82)$

والدخل الحقيقي الموافق لهذه التوفيقة هو :

$$\mathrm{R}=5X+40Y\Longrightarrow \mathrm{R}=5(21.63)+40(2.82)\Longrightarrow \mathrm{R}=225.94$$

المبلغ الذي إدخره المستهلك هو

$$\Delta\mathrm{R}=310-225.94=84.06$$

النقطة التوازنية $E_1(X_1,Y_1)$ تحسب كذلك بشرط التوازن لكن بالدخل النقدي للمستهلك عند انخفاض السعر كما يلي:

$$\begin{cases}\frac{\mathbf{Um_X}}{\mathbf{5}}=\frac{\mathbf{Um_Y}}{\mathbf{40}}\\ 310=5X+40Y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{Y}{5}=\frac{X+1}{40}\\ 310=5X+40Y\end{cases}$$

بحيث R هو الدخل الحقيقي عند انخفاض السعر

وبضرب الطرفين في الوسطين نجد:

$$\begin{cases}40Y=5(X+1)\\ 310=5X+40Y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}Y=\frac{5(X+1)}{40}\\ 310=5X+40Y\end{cases}$$

وبالاختزال نجد:

$$\begin{cases}Y=\frac{(X+1)}{8}\\ 310=5X+40Y\end{cases}$$

وبتعويض Y في قيد الميزانية نجد:

$$\begin{cases} Y = \dfrac{(X+1)}{8} \\ 310 = 5X + 40\dfrac{(X+1)}{8} \\ 310 = 5X + 5(X+1) \\ 310 - 5 = 10X \\ X = \dfrac{305}{10} \end{cases}$$

ومنه $X = 30.5$ ونعوض قيمتها في $Y = \frac{(30.5+1)}{8} = 3.94$

وعليه فإن التوفيقة $E_1(X_1, Y_1)$ هي: $E_1(30.5,3.94)$

أثر الإحلال ES:

$$ES_X = X_2 - X_0 = 21.63 - 15 = 6.63$$
$$ES_Y = Y_2 - Y_0 = 2.82 - 4 = -1.18$$

أي أن المستهلك قام بإحلال كمية من X محل كمية من Y بسبب انخفاض سعرها؛ أي زاد من استهلاك X بـ 6.63 وحدات وانقاص 1.18 من Y لأنها لم يتغير سعرها للبقاء على نفس المنفعة.

أثر الدخل ER:

$$ER_X = X_1 - X_2 = 30.5 - 21.63 = 8.87$$
$$ER_Y = Y_1 - Y_2 = 3.94 - 2.82 = 1.12$$

من خلال أثر الدخل نستنتج أن انخفاض سعر السلعة X انعكس إيجابا على المستهلك حيث ارتفعت القدرته الشرائية (الدخل الحقيقي).

الأثر الكلي:

$$ET_X = ES_X + ER_X = 6.63 + 8.87 = 15.5$$
$$ET_Y = ES_Y + ER_Y = (-1.18) + 1.12 = -0.06$$

طريقة سلتسكي (Slutsky):

الكمية التوازنية الأصلية للمستهلك هي $E_0(15,4)$ ، وعند انخفاض سعر السلعة X نعوضها في قيد الميزانية الجديد نحصل على الدخل الحقيقي

$$R = 5X + 40Y = 5(15) + 40(4) = 235$$

الدخل الحقيقي للمستهلك $R = 235$ نقوم بإيجاد الكمية التوازنية الوهمية بالدخل الجديد

النقطة التوازنية $E_2(X_2, Y_2)$ تحسب كذلك بشرط التوازن لكن بالدخل الحقيقي للمستهلك عند انخفاض السعر كما يلي:

$$\begin{cases} \frac{Um_X}{5} = \frac{Um_Y}{40} \\ 235 = 5X + 40Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{Y}{5} = \frac{X+1}{40} \\ 235 = 5X + 40Y \end{cases}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين نجد:

$$\begin{cases} 40Y = 5(X+1) \\ 235 = 5X + 40Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = \frac{5(X+1)}{40} \\ 235 = 5X + 40Y \end{cases}$$

وبالاختزال نجد:

$$\begin{cases} Y = \dfrac{(X+1)}{8} \\ 235 = 5X + 40Y \end{cases}$$

وبتعويض Y في قيد الميزانية نجد:

$$\begin{cases} Y = \dfrac{(X+1)}{8} \\ 235 = 5X + 40\dfrac{(X+1)}{8} \\ 235 = 5X + 5(X+1) \\ 235 - 5 = 10X \\ X = \dfrac{230}{10} \end{cases}$$

ومنه $X = 23$ ونعوض قيمتها في $Y = \frac{(23+1)}{8} = 3$

وعليه فإن التوفيقة الوهمية $E_2(X_2, Y_2)$ هي: $E_2(23,3)$، أما النقطة التوازنية (X_1, Y_1) هي: $E_1(30.5,3.94)$ حسبناها سابقا ومنه يمكن الفصل بين أثر الدخل والإحلال كما يلي:

أثر الإحلال ES:

$$ES_X = X_2 - X_0 = 23 - 15 = 7$$
$$ES_Y = Y_2 - Y_0 = 3 - 4 = -1$$

أي أن المستهلك قام بإحلال كمية من X محل كمية من Y بسبب انخفاض سعرها؛ أي زاد من استهلاك X بـ 7 وحدات وانقاص 1 من Y لأنها لم يتغير سعرها للبقاء على نفس المنفعة.

أثر الدخل ER:

$$ER_X = X_1 - X_2 = 30.5 - 23 = 7.5$$
$$ER_Y = Y_1 - Y_2 = 3.94 - 3 = 0.94$$

من خلال أثر الدخل نستنتج أن انخفاض سعر السلعة X انعكس إيجابا على المستهلك حيث ارتفعت القدرته الشرائية (الدخل الحقيقي).

الأثر الكلي:

$$ET_X = ES_X + ER_X = 7 + 7.5 = 15.5$$
$$ET_Y = ES_Y + ER_Y = (-1) + 0.94 = -0.06$$

المطلب الثالث: تمارين للحل

لتطبيق ما جاء في التمارين السابقة حول المنفعة الترتيبية وضعنا مجموعة من التمارين لحلها من طرف الطلبة

تمرين 01:

يعطي الجدول التالي عددا من التوفيقات لإستهلاك السلعتين X و Y :

I		II		III		IV	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
2	13	3	12	5	12	7	12
3	6	4	8	5,5	9	8	9
4	4,5	5	6,3	6	8,3	9	7
5	3,5	6	5	7	7	10	6,3
6	3	7	4,4	8	6	11	5,7
7	2,7	8	4	9	5,4	12	5,3

1. أرسم منحنيات السواء على نفس المعلم
2. ماذا تبين منحنيات السواء.
3. أوجد المعدل الحدي للإحلال $TMS_{X.Y}$ عند كل نقطة من هذا الجدول
4. على افتراض ان $R = 16$ و ان $P_X = 2$ و $P_Y = 1$ ، اوجد ميل ومعادلة خط الميزانية ومثله بيانيا، ثم حدد نقطة توازن المستهلك بيانيا؟
5. نفترض ان دخل المستهلك R قد تغير من 12 الى 16 ثم الى 20 و ان الاسعار لا تتغير، اوجد نقاط التوازن بيانيا عند مستويات الدخل المختلفة ثم ارسم منحنى استهلاك الدخل؟
6. اشتق منحنى انجل للسلعة X؟
7. اذا انخفض سعر السلعة X الى 1 ون مع بقاء الدخل $R = 16$ و سعر السلعة Y بدون تغيير حدد منحنى استهلاك السعر واشتق منحنى الطلب على السلعة X ؟

تمرين02:

تشكل المعطيات التالية توليفات مختلفة لمنحنيات السواء:

I		II	
X	Y	X	Y
3	10	5	12
4	7	6	9
5	5	8	6.2
7	3.5	9	5.5
9	3	12	4.5

1. اذا كان الدخل المخصص للانفاق هو $R = 20$ و اسعار السلعتين كالتالي $P_X = 1$ و $P_Y = 2$ فعين نقطة توازن المستهلك A ؟
2. اذا انخفض الدخل الى $R = 14$، فعين نقطة التوازن الجديدة B؟
3. اذا كان الدخل هو $R = 20$ مع $P_X = 2$ ، فعين نقطة توازن الجديدة C؟
4. ماذا تمثل القطعة AB و القطعة AC؟

التمرين 03:

لتكن دالة المنفعة الكلية لأحد المستهلكين من الشكل: $UT = YX$ وكانت أسعار السلعتين X و Y هي $P_X = 4$ و $P_Y = 10$

1. أوجد الكميات التوازنية للسلعتين X و Y علما أن منفعة المستهلك هي $UT = 1000$
2. ماهي قيمة الميزانية الاسمية (الدخل النقدي)؟
3. تأكد من الحل بيانيا؟

التمرين 04:

لتكن دالة المنفعة الكلية لأحد المستهلكين من الشكل: $UT = 7\,Y^{0.7}X^{0.5}$ وكانت أسعار السلعتين X و Y هي $P_X = 1$ و $P_Y = 2$ والدخل المخصص للإنفاق على السلعتين X و Y هو $R = 12$

1. أوجد الكميات التوازنية لهذا المستهلك؟
2. احسب حجم المنفعة الكلية؟
3. عند ارتفاع سعر السلعة X إلى 3ون أوجد القيم التوازنية الجديدة؟
4. احسب أثر الاحلال والدخل للمستهلك واستنتج طبيعة السلعة X ؟

المبحث الثالث: توازن المستهلك بطريقة لاغرانج (الحل الرياضي)

يقصد بالحل الرياضي تحديد الوضع التوازني باستخدام أسلوب رياضي، وتعد طريقة مضاعف لاغرانج من أشهر الطرق التي تستعمل في حل التمارين وايجاد الكميات التوازنية بالنسبة للمستهلك، ومضاعف لاغرانج هو المؤشر الذي يقيس لنا درجة تغير المنفعة الناتجة عن تغير الدخل ونرمز له بـ λ ، ولحل مشكلة لاغرانج يجب تتبع الخطوات التالي:

- وضع دالة الهدف؛
- استنتاج نموذج الحل من دالة الهدف؛
- حل النموذج المتحصل.

المطلب الأول: تمارين محلولة بطريقة لاغرانج

تستعمل هذه الطريقة لحل مشكلة التعظيم إذا كان المستهلك يريد تعظيم منفعته الكلية أو لحل مشكلة التقليل في حالة ما إذا كان المستهلك يرغب في تقليل دخله المتاح عندما تكون منفعته الكلية معلومة. ولفهم هذه الطريقة أكثر نقترح مجموعة من التمارين المحلولة التالية.

التمرين01:

اذا كانت دالة المنفعة الكلية لاحد المستهلكين من الشكل: $UT = Y(X-1)$

اذا كان الدخل المخصص للانفاق هو $R = 20$ و اسعار السلعتين X و Y هو 2 ون

المطلوب:

1. اوجد الكميات التوازنية وقدر حجم المنفعة الكلية؟
2. اذا انخفض سعر السلعة X الى 1ون، اوجد الكميات التوازنية الجديدة
3. واشتق منحنى الطلب على السلعة؟

التمرين 02:

لتكن لدينا دالة المنفعة من الشكل التالي: $UT = XY^{\frac{1}{2}}$ بحيث X و Y تمثل الكميات المستهلكة من السلعتين و $P_X = 2$ و $P_Y = 4$ اسعار السلعتين X و Y على التوالي و R هو الدخل المخصص للإنفاق على السلعتين X و Y يساوي 100ون

المطلوب:

1. حدد معادلة استهلاك الدخل، ودوال الطلب لهذا المستهلك لكل من السلعتين X و Y بطريقة لاغرانج ؟ وأوجد الكميات التوازنية المثلى؟
2. إذا فرضت الدولة ضريبة على الدخل بمعدل $t = 10\%$، أوجد دوال الطلب الجديدة ثم حدد الكميات المثلى
3. ارسم منحى انجل للسلعة Y ؟

التمرين 03:

لتكن دالة الطلب لأحد المستهلكين من الشكل: $UT = 2XY + 4Y$ بحيث X و Y تمثل الكميات المستهلكة من السلعتين و $P_X = 10$ و $P_Y = 16$ اسعار السلعتين X و Y على التوالي و R هو الدخل المخصص للإنفاق على السلعتين X و Y هو 300ون

المطلوب:

1. حدد معادلة استهلاك الدخل، ودوال الطلب لهذا المستهلك لكل من السلعتين X و Y ؟
2. وأوجد الكميات التوازنية المثلى؟
3. إذا أصبح المستهلك مخيرا بين دفع ضريبة على الدخل بمعدل $t = 20\%$ أو ضريبة على السلعة X بنفس النسبة، حدد دوال الطلب الجديدة في الحالتين ثم حدد الكميات المثلى؟
4. ما تأثير ذلك على منفعة المستهلك؟ وماذا يفضل؟

تمرين 04:

مستهلك له دخل R ينفقه لشراء السلعتين X و Y دالة منفعته هي: $UT = X^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{6}}$

$R = 120$ وسعر السلعتين X و Y هما $P_X = 3$ و $P_Y = 3$،

1. حدد معادلة منحنى استهلالك الدخل اوجد دوال الطلب على السلعتين X و Y ، واحسب الكميات التوازنية وحجم المنفعة الكلية؟
2. عند انخفاض سعر السلعة X إلى 1,5 ثم ارتفع إلى 6 اوجد الكميات التوازنية الجديدة في كل حالة؟
3. مثل بيانيا منحنى استهلالك السعر واشتق منحنى الطلب؟
4. عند انخفاض P_X إلى 1,5 احسب حجم المنفعة الكلية وماهي المنفعة الضائعة لهذا المستهلك؟

تمرين 05:

مستهلك له دخل R ينفقه لشراء السلعتين X و Y دالة منفعته هي: $UT = X^2Y$

$R = 180$ وسعر السلعتين X و Y هما $P_X = 12$ و $P_Y = 2$،

1. احسب دوال الطلب على السلعتين X و Y ، واحسب الكميات التوازنية وحجم المنفعة الكلية؟
2. احسب TMS عند التوازن وفسر النتيجة اقتصاديا؟
3. ماهي الثنائية المثلى عندما انخفاض أن دخل المستهلك إلى 160 مع بقاء الاسعار ثابتة؟ احسب المنفعة الكلية الجديدة؟ ما هو حجم المنفعة الكلية التي خسرها المستهلك؟
4. مثل بيانيا منحنى استهلاك الدخل واشتق منحنى أنجل بالنسبة للسلعة X و Y ؟

تمرين 06:

لتكن دالة الاشباع لأحد المستهلكين من الشكل $UT = X^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}}$

1. حدد معادلة استهلاك–دخل، ودوال الطلب لهذا المستهلك لكل من السلعتين X وY بطريقة لاغرانج؟
2. اذا كان $R = 200$ و $P_X = P_Y = 2$: اوجد الكميات التوازنية المثلى؟
3. احسب مرونة الطلب الدخلية للدوال السابقة وعين نوع السلعتين X و Y ؟
4. فرضت الدولة ضريبة على الدخل بمعدل $t = 20\%$ ، حدد دوال الطلب الجديدة ثم احسب الكميات المثلى الجديدة؟ احسب حجم المنفعة الكلية؟
5. ارسم منحنى استهلاك – دخل ثم مثل بيانيا منحنيات أنجل للسلعتين X و Y ؟
6. بالإضافة إلى الضريبة على الدخل تأخذ الدولة TVA الرسم على القيمة المضافة بنسبة α على السلعة X ، أوجد دوال الطلب الجديدة؟
7. إذا كانت $\alpha = 10\%$ ، احسب الكميات التوازنية الجديدة؟ ما هي المنفعة الضائعة لهذا المستهلك؟
8. ثم اشتق منحنى الطلب على السلعة X؟

تمرين 07:

لتكن دالة الاشباع لأحد المستهلكين من الشكل: $UT = 2LogX + 4LogY$، وأسعار السلعتين X و Y على التوالي هما P_X و P_Y والدخل المخصص للانفاق هو R

1. حدد معادلة منحنى الاستهلاك – الدخل؟
2. إذا كان $P_X = 1$ و $P_Y = 2$، حدد معادلة منحنى انجل لكل سلعة ومثلها بيانيا؟

التمرين 08:

لتكن دالة الاشباع لأحد المستهلكين من الشكل: $\boldsymbol{UT = 4X^2Y}$، وأسعار السلعتين X و Y على التوالي هما P_X و P_Y و R هو الدخل المخصص للانفاق

1. حدد دوال الطلب لهذا المستهلك لكل من السلعتين X و Y ؟
2. بين أن مضاعف لاغرانج λ هو مقدار التغير في المنفعة الكلية بالنسبة للتغير في الدخل أي: $\lambda = \frac{\partial UT}{\partial R}$ ؟
3. اذا كان $R = 200$ و $P_Y = 4$ و $P_X = 2$: اوجد الكميات التوازنية المثلى؟
4. فرضت الدولة ضريبة على الدخل بمعدل $t = 20\%$ ، حدد دوال الطلب الجديدة ثم احسب الكميات المثلى الجديدة؟ احسب حجم المنفعة الكلية؟

التمرين 09:

يقوم مستهلك بتركيز استهلاكه على سلعتين هما الخبز (X) والحليب (Y) حيث نقوم بدراسة سلوكه الاستهلاكي وفق دالة الاشباع التالية: $\boldsymbol{UT = 3X^2Y}$، اذا كان الدخل المخصص للانفاق عليهما هو $R = 600$ ، وأسعار كل من الخبز هو $P_X = 4$ ، و الحليب $P_Y = 2$:

1. أوجد دوال الطلب على الخبز والحليب لهذا المستهلك بطريقة لاغرانج؟
2. اوجد الكميات المثلى للخبز و الحليب ؟ ثم قدر قيمة المنفعة المحصلة؟
3. احسب قيمة TMS عند التوازن
4. عند ارتفاع الدخل إلى $R = 1200$:
   - أوجد الكميات التوازنية الجديدة؟ واحسب حجم المنفعة الكلية؟
   - عرف منحنى الاستهلاك–الدخل ومثله بيانيا، واشتق منحى انجل للسلعة X ؟
5. عند ثبات الدخل عند $R = 1200$، فرضت الدولة ضريبة على السلعة على الخبز (X) بقيمة $\alpha = 10\%$:
   - أوجد الكميات التوازنية الجديدة؟ واحسب حجم المنفعة الكلية؟
   - اشتق منحنى الطلب على السلعة X ؟ ماهي المنفعة الضائعة على المستهلك؟
   - احسب اثر الاحلال والدخل واستنتج طبيعة السلعة (X)؟

التمرين 10:

لتكن دالة المنفعة لاحد المستهلكين يستهلك سلعتين X و Y معطاة بالصيغة الرياضية التالية:

$$UT = 2XY + 3X$$

1. عين معادلة منحنى استهلاك الدخل؟
2. احسب دوال الطلب؟
3. هل يؤثر ارتفاع سعر السلعة Y على الكمية المطلوبة من السلعة X ؟ لماذا؟
4. أوجد التوليفة المثلى التي تعظم منفعة المستهلك إذا كان $R = 200$، $P_Y = 4$، $P_X = 2$ ؟
5. إذا فرضت الدولة ضريبة على السلعة Y بمعدل 10% أوجد التوليفة المثلى التي تعظم الإنتاج؟ ماذا تستنتج؟

التمرين 11:

لتكن دوال الطلب لأحد المستهلكين من الشكل:

$$\begin{cases} X = \dfrac{R}{2P_X} \\ Y = \dfrac{R}{2P_Y} \end{cases}$$

1. عند فرض الدولة ضريبة على الدخل بمعدل 20%، ما هو تأثير ذلك على المستهلك؟ علل؟
2. لو ألغت الدولة الضريبة على الدخل واستبدلتها بالضريبة على سعر السلعة X بمعدل 20% ، ما هو تأثير ذلك على المستهلك؟ علل؟

التمرين 12:

يعتمد أحد المستهلكين على إشباع حاجة معينة من خلال استهلاكه لسلعتين بحيث $P_X =$ $P_Y = 3$ ودالة منفعته من الشكل: $Y = \frac{9}{X}$

1. حدد معادلة منحنى الاستهلاك–الدخل ومثله بيانيا؟
2. أوجد الكمية التوازنية لهذا المستهلك؟
3. احسب القيمة الاسمية للدخل؟
4. تحقق من نقطة التوازن بيانيا؟

التمرين 13:

لتكن دالة المنفعة لاحد المستهلكين من الشكل $UT = 4XYZ$ حيث P_X و P_Y و P_Z اسعار السلعتين X و Y و Z على التوالي R الدخل المخصص للإنفاق

- أوجد دوال الطلب لهذا المستهلك؟
- حدد الكميات التوازنية المثلى إذا كان $P_X = 2$ و $P_Y = 4$ و$P_Z = 5$ و $R = 60$ ؟
- تأكد انه الحل الأمثل الذي يعظم دالة المنفعة؟

التمرين 14:

لتكن دالة الاشباع لأحد المستهلكين من الشكل $\boldsymbol{UT = X^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}}}$

1. حدد معادلة استهلاك–دخل، ودوال الطلب لهذا المستهلك لكل من السلعتين X و Y بطريقة لاغرانج؟
2. اذا كان $R = 200$ و $P_X = P_Y = 2$: اوجد الكميات التوازنية المثلى؟
3. احسب مرونة الطلب الدخلية للدوال السابقة وعين نوع السلعتين X و Y؟
4. فرضت الدولة ضريبة على الدخل بمعدل $t = 20\%$ ، حدد دوال الطلب الجديدة ثم احسب الكميات المثلى الجديدة؟ احسب حجم المنفعة الكلية؟
5. ارسم منحنى استهلاك – دخل ثم مثل بيانيا منحنيات أنجل للسلعتين X و y ؟

6. بالإضافة إلى الضريبة على الدخل تأخذ الدولة TVA الرسم على القيمة المضافة بنسبة α على السلعة X ، أوجد دوال الطلب الجديدة؟
7. إذا كانت $\alpha = 10\%$ ، احسب الكميات التوازنية الجديدة؟ ما هي المنفعة الضائعة لهذا المستهلك؟

التمرين 15:

لتكن دالة الاشباع لاحد المستهلكين من الشكل $\boldsymbol{UT = 3X^2Y + 4}$

اذا كانت اسعار السلعتين X و Y معلومة وكذلك حجم الدخل المخصص للاستهلاك:

1. أوجد دوال الطلب لهذا المستهلك لكل من السلعتين X و Y بطريقة لاغرانج؟
2. استخرج مما سبق معادلة استهلاك –دخل
3. اذا كان $R = 24$ ، $P_Y = 4$ ، $p_X = 2$:اوجد الكميات المثلى من السلعتين X و Y؟ ثم قدر قيمة المنفعة المحصلة
4. احسب مرونة الطلب الدخلية للدوال السابقة وعين نوع السلعتين X و Y؟
5. احسب قيمة TMS عند التوازن
6. إذا انخفض سعر السلعة y إلى 2 اوجد الكميات المثلى من السلعتين X و Y في هده الحالة ثم ارسم منحنى الطلب للسلعة y وعلق عليه؟
7. إذا تضاعف دخل المستهلك مثل بيانيا منحنى أنجل للسلعة X . ماذا تستنتج؟

التمرين 16:

مستهلك دالة منفعته من الشكل $UT = X^{\alpha}Y^{1-\alpha}$ مع $0 < \alpha <$

1. احسب دالتي الطلب على السلعتين X و Y؟
2. حدد معادلة منحنى استهلاك الدخل وبين ان الامر يتعلق بمنحنى خطي يمر من نقطة المبدأ؟
3. احسب قيمة المرونة الدخلية السلعتين X و Y؟
4. ما هي قيمة المرونة السعرية السلعتين X و Y؟

التمرين 17:

قامت احدى الشركات الفرنسية بفحص اختيارت المستهلكين لتقدير دالة المنفعة وذلك لدراسة سلوك المستهلك في التنقل وتبين انه في معظم المدن الكبرى يستخدم المتنقلون وسائل النقل العام ووسائل النقل الخاصة حينما يذهبون الى مكان عملهم. وبملاحظة عدد من المستهلكين المتماثلين طبقا لنمط معين من الخواص المختلفة مثل أوقات الانتظار و الراحة ...الخ، تم تقدير دالة منفعة

المستهلك كالتالي: $UT = XY$، حيث X وسيلة النقل العام و Y وسيلة النقل الخاص. اذا علمت ان النقل العام و الخاص يكلفان المستهلك 12، 18 دينار على التوالي و ان المبلغ المنفق عليهما هو 144 دينار في اليوم

1. اوجد دول الطلب لهذا المستهلك؟
2. اوجد التوليفة المثلىA ؟
3. اذا انخفضت تكلفة استخدام وسائل النقل الخاصة الى 4.5 دينار مع بقاء العوامل الأخرى ثابتة نتيجة انخفتض أسعار البترول اوجد الاستهلاك الأمثل الجديد B؟
4. ماهو مقدار التغير اللازم في الدخل لجعل الاستهلاك الأمثل الأصلي في متناول القدرة الشرائية لهذا المستهلك حسب الأسعار الجديدة؟
5. احسب مرونة الطلب السعرية عند الانتقال من A الى B

التمرين 18:

لتكن دالة المنفعة لأحد المستهلكين من الشكل $UT = 2XY$وقيد الميزانية من الشكل

$$200 = 4X + 10Y$$

أوجد الكميات التوازنية وتأكد أنها الكميات المثلى التي تعظم دالة المنفعة؟

التمرين 19:

لتكن دالة المنفعة من الشكل $UT = Y(X + 1)$ وكانت أسعار السلعتين $P_X = 10$ و $P_Y = 40$

1. أوجد كميتي التوازن من السلعتين Yو$\boldsymbol{X}$اذا كانت المنفعة الكلية $UT = 64$؟
2. ماهي قيمة الميزانية الاسمية؟
3. اذا انخفض سعر السلعة X الى $P_X = 5$ احسب اثر السعر، اثر الدخل، وأثر الاحلال؟

المطلب الثاني: حلول تمارين طريقة مضاعف لاغرانج (الحل الرياضي)

فيما يلي نقترح حلولا للتمارين المقترحة في المطلب الأول، من أجل تسهيل عملية الاستعاب للطلبة.

التمرين 01:

الدالة التي تعظيم منفعة المستهلك وتكتب من الشكل:

$$MaxL = Max\big(F(X,Y,\cdots,n) + \lambda(R - XP_X - YP_Y - \cdots\cdots - nP_n)\big)$$

$$MaxL = Y(X-1) + \lambda(20 - 2X - 2Y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0 \Rightarrow Y - 2\lambda = 0 \cdots \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = 0 \Rightarrow X - 1 - 2\lambda = 0 \cdots\cdots \cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow 20 - 2X - 2Y = 0 \cdots \quad \cdots\cdots (3)$$

بقسمة (1) على (2) نتحصل على:

$$\frac{Y}{X-1}=\frac{2\lambda}{2\lambda}$$

وبالاختزال نحصل على:

$$\frac{Y}{X-1}=1$$

ومنه

$$Y=X-1\cdots\cdots\cdots(4)$$

بتعويض (4) في (3):

$$20-2X-2(X-1)=0\Longrightarrow 22-4X=0\Longrightarrow X=\frac{22}{4}=5{,}5$$

وبتعويض قيمة X في (4) نجد:

$$Y=5{,}5-1=4{,}5$$

عند انخفاض سعر السلعة X إلى 1 فإن دالة الهدف تكتب من الشكل:

$$MaxL=Y(X-1)+\lambda(20-X-2Y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X}=0\Rightarrow Y-\lambda=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y}=0\Rightarrow X-1-2\lambda=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0\Rightarrow 20-X-2Y=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

بقسمة (1) على (2) نتحصل على:

$$\frac{Y}{X-1}=\frac{\lambda}{2\lambda}$$

وبالاختزال نحصل على:

$$\frac{Y}{X-1}=\frac{1}{2}$$

ومنه

$$2Y=X-1\Longrightarrow Y=\frac{X-1}{2}\cdots\cdots\cdots(4)$$

بتعويض (4) في (3):

$$20-X-\frac{2(X-1)}{2}=0\Longrightarrow 22-2X=0\Longrightarrow X=\frac{22}{2}=11$$

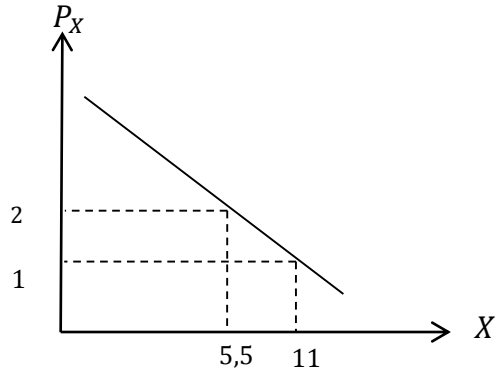
وبتعويض قيمة X في (4) نجد:

$$Y=\frac{11-1}{2}=5{,}5$$

اشتقاق منحنى الطلب:

P_X	X
2	5,5
1	11

ومن خلال هذا الجدول يمكن رسم منحنى الطلب كما هو مبين في الشكل التالي:



التمرين 02:

الدالة التي تعظيم منفعة المستهلك وتكتب من الشكل:

$$MaxL = Max\left(F(X,Y,\cdots,n) + \lambda(R - XP_X - YP_Y - \cdots\cdots - nP_n)\right)$$

$$MaxL = XY^{\frac{1}{2}} + \lambda(R - XP_X - YP_Y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0 \Rightarrow Y^{\frac{1}{2}} - P_X\lambda = 0 \cdots \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}XY^{\frac{-1}{2}} - P_Y\lambda = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow R - XP_X - YP_Y = 0 \cdots \quad \cdots\cdots (3)$$

بقسمة (1) على (2) نتحصل على:

$$\frac{Y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}XY^{\frac{-1}{2}}} = \frac{P_X\lambda}{P_Y\lambda}$$

وبالاختزال نحصل على:

$$\frac{2Y^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}}}{X} = \frac{P_X}{P_Y} \Rightarrow \frac{2Y}{X} = \frac{P_X}{P_Y}$$

ومنه

$$4YP_Y = XP_X \Rightarrow Y = \frac{XP_X}{4P_Y} \cdots\cdots\cdots (4)$$

معادلة منحنى استهلاك الدخل

$$4YP_Y = XP_X \Rightarrow X = \frac{4YP_Y}{P_X} \cdots\cdots\cdots (5)$$

بتعويض (4) في (3):

$$R - XP_X - \left(\frac{XP_X}{4P_Y}\right)P_Y = 0 \Longrightarrow R - \frac{4XP_X}{4} - \left(\frac{XP_X}{4}\right) = 0 \Longrightarrow X = \frac{4R}{5P_X}$$

وبتعويض (5) في (3) نجد:

$$R - XP_X - YP_Y = 0 \Longrightarrow R - \left(\frac{4YP_Y}{P_X}\right)P_X - YP_Y = 0 \Longrightarrow Y = \frac{R}{5P_Y}$$

الكميات التوازنية:

$$X = \frac{4R}{5P_X} = \frac{4(100)}{5(2)} = 40$$
$$Y = \frac{R}{5P_Y} = \frac{100}{5(4)} = 5$$

بعد فرض الدولة ضريبة على الدخل بمعدل $t = 10\%$ فإن الكميات التوازنية تصبح كما يلي:

الدخل الجديد: $R` = R - Rt = R(1-t) = 100(1-0,1) = 90$

وعليه:

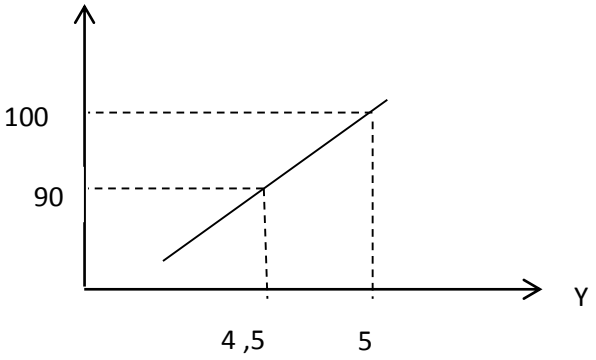
$$X = \frac{4R`}{5P_X} = \frac{4R(1-t)}{5P_X}$$
$$Y = \frac{R(1-t)}{5P_Y}$$

والكميات التوازنية تصبح :

$$X = \frac{4R(1-t)}{5P_X} = \frac{4(100)(1-0,1)}{5(2)} = 360$$
$$Y = \frac{R(1-t)}{5P_Y} = \frac{100(1-0,1)}{5(4)} = 4,5$$

منحنى أجل للسلعة Y :

R	Y
100	5
90	4,5



التمرين03:

الدالة التي تعظيم منفعة المستهلك وتكتب من الشكل:

$$MaxL = Max\big(F(X,Y,\cdots,n) + \lambda(R - XP_X - YP_Y - \cdots\cdots - nP_n)\big)$$
$$MaxL = 2XY + 4Y + \lambda(R - XP_X - YP_Y)$$
$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0 \Rightarrow 2Y - P_X\lambda = 0 \cdots \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$\frac{\partial L}{\partial Y} = 0 \Rightarrow 2X + 4 - P_Y\lambda = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow R - XP_X - YP_Y = 0 \cdots \quad \cdots\cdots (3)$$

بقسمة (1) على (2) نتحصل على:

$$\frac{2Y}{2X+4} = \frac{P_X\lambda}{P_Y\lambda}$$

وبالاختزال نحصل على:

$$\frac{Y}{X+2} = \frac{P_X}{P_Y}$$

ومنه

$$YP_Y = (X+2)P_X \Rightarrow Y = \frac{(X+2)P_X}{P_Y} \dots\dots\dots (4)$$

معادلة منحنى استهلاك الدخل

$$YP_Y = (X+2)P_X \Rightarrow X = \frac{YP_Y - 2P_X}{P_X} \dots\dots\dots (5)$$

بتعويض (4) في (3) نتحصل على دالة الطلب للسلعة X:

$$R - XP_X - \left(\frac{(X+2)P_X}{P_Y}\right)P_Y = 0 \Longrightarrow R - XP_X - \big((X+2)P_X\big) = 0$$

$$R - XP_X - XP_X - 2P_X = 0 \Longrightarrow X = \frac{R - 2P_X}{2P_X}$$

وبتعويض (5) في (3) نتحصل على دالة الطلب للسلعة Y :

$$R - XP_X - YP_Y = 0 \Longrightarrow R - \left(\frac{YP_Y - 2P_X}{P_X}\right)P_X - YP_Y = 0$$

$$R - YP_Y + 2P_X - YP_Y = 0 \Longrightarrow Y = \frac{R + 2P_X}{2P_Y}$$

الكميات التوازنية:

$$X = \frac{R - 2P_X}{2P_X} = \frac{300 - 2(10)}{2(10)} \Longrightarrow X = 14$$

$$Y = \frac{R + 2P_X}{2P_Y} = \frac{300 + 2(10)}{2(16)} \Longrightarrow Y = 10$$

بعد فرض الدولة ضريبة على الدخل بمعدل $t = 20\%$ فإن الكميات التوازنية تصبح كما يلي:

الدخل الجديد: $R` = R - Rt = R(1-t) = 300(1-0{,}2) = 240$

وعليه:

$$X = \frac{4R`}{5P_X} = \frac{4R(1-t)}{5P_X}$$

$$Y = \frac{R(1-t)}{5P_Y}$$

والكميات التوازنية تصبح :

$$X = \frac{R(1-t) - 2P_X}{2P_X} = \frac{300(1-0{,}2) - 2(10)}{2(10)} \Longrightarrow X = 11$$

$$Y = \frac{R(1-t) + 2P_X}{2P_Y} = \frac{300(1-0{,}2) + 2(10)}{2(16)} \Longrightarrow Y = 8{,}125$$

المنفعة قبل دفع الضريبة على الدخل:

$$UT = 2(14)(10) + 4(10) \Longrightarrow UT = 320$$

المنفعة بعد دفع ضريبة على الدخل:

$$UT = 2(11)(8{,}125) + 4(8{,}125) \Longrightarrow UT = 211{,}25$$

المنفعة التي تضيع على المستهلك بعد دفع ضريبة على الدخل:

$$\Delta UT = 211{,}25 - 320 = -108{,}75$$

دفع ضريبة على السلعة X:

السعر الجديد: $P_X` = P_X + P_X t = P_X(1+t)$

وعليه تصبح دوال الطلب كما يلي:

$$X = \frac{R - 2P_X(1+t)}{2P_X(1+t)} = \frac{300 - 2(10)(1+0{,}2)}{2(10)(1+0{,}2)} \Rightarrow X = 11{,}5$$

$$Y = \frac{R + 2P_X(1+t)}{2P_Y} = \frac{300 + 2(10)(1+0{,}2)}{2(16)} \Rightarrow Y = 10{,}125$$

المنفعة بعد دفع الضريبة على الدخل:

$$UT = 2(11{,}5)(10{,}125) + 4(10{,}125) \Rightarrow UT = 273{,}375$$

المنفعة التي تضيع على المستهلك بعد دفع ضريبة على الدخل:

$$\Delta UT = 273{,}375 - 320 = -46{,}625$$

وعليه يفضل المستهلك دفع ضريبة على السلعة X حيث تكون المنفعة الضائعة 46,625 بدلا من دفع ضريبة على الدخل ويضيع على نفسه 108,75.

التمرين 04:

الدالة التي تعظيم منفعة المستهلك وتكتب من الشكل:

$$MaxL = Max\big(F(X,Y,\cdots,n) + \lambda(R - XP_X - YP_Y - \cdots\cdots - nP_n)\big)$$

$$MaxL = X^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{6}} + \lambda(R - XP_X - YP_Y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}X^{\frac{-1}{2}}Y^{\frac{1}{6}} - P_X\lambda = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = 0 \Rightarrow \frac{1}{6}X^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{-5}{6}} - P_Y\lambda = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow R - XP_X - YP_Y = 0 \cdots \quad \cdots\cdots (3)$$

بقسمة (1) على (2) نتحصل على:

$$\frac{\frac{1}{2}X^{\frac{-1}{2}}Y^{\frac{1}{6}}}{\frac{1}{6}X^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{-5}{6}}} = \frac{P_X\lambda}{P_Y\lambda}$$

وبالاختزال نحصل على:

$$\frac{3Y^{\frac{1}{6}}Y^{\frac{5}{6}}}{X^{\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}} = \frac{P_X}{P_Y} \Rightarrow \frac{3Y}{X} = \frac{P_X}{P_Y}$$

ومنه

$$3YP_Y = XP_X \Rightarrow Y = \frac{XP_X}{3P_Y} \cdots\cdots\cdots (4)$$

معادلة منحنى استهلاك الدخل

$$3YP_Y = XP_X \Rightarrow X = \frac{3YP_Y}{P_X} \cdots\cdots\cdots (5)$$

بتعويض (4) في (3) نتحصل على دالة الطلب للسلعة X:

$$R - XP_X - \left(\frac{XP_X}{3P_Y}\right)P_Y = 0 \Longrightarrow R - XP_X - \left(\frac{XP_X}{3}\right) = 0$$

$$R - \frac{4XP_X}{3} = 0 \Longrightarrow X = \frac{3R}{4P_X}$$

وبتعويض (5) في (3) نتحصل على دالة الطلب للسلعة Y :

$$R - \left(\frac{3YP_Y}{P_X}\right)P_X - YP_Y = 0 \Longrightarrow R - 3YP_Y - YP_Y = 0$$

$$R - 4YP_Y = 0 \Longrightarrow Y = \frac{R}{4P_Y}$$

الكميات التوازنية:

$$X = \frac{3R}{4P_X} = \frac{3(120)}{4(3)} \Longrightarrow X = 30$$

$$Y = \frac{R}{4P_Y} = \frac{120}{4(3)} \Longrightarrow Y = 10$$

حساب المنفعة الكلية: $UT = (30)^{\frac{1}{2}}(10)^{\frac{1}{6}} = 8{,}036$

عند انخفاض السعر السلعة X إلى 1.5 تصبح الكميات التوازنية كما يلي:

$$X = \frac{3R}{4P_X} = \frac{3(120)}{4(1{,}5)} \Longrightarrow X = 60$$

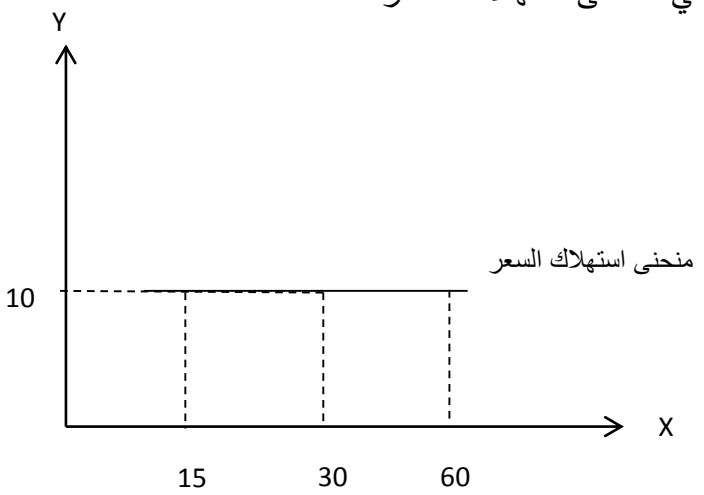
$$Y = \frac{R}{4P_Y} = \frac{120}{4(3)} \Longrightarrow Y = 10$$

عند ارتفاع السعر السلعة X إلى 6 تصبح الكميات التوازنية كما يلي:

$$X = \frac{3R}{4P_X} = \frac{3(120)}{4(6)} \Longrightarrow X = 15$$

$$Y = \frac{R}{4P_Y} = \frac{120}{4(3)} \Longrightarrow Y = 10$$

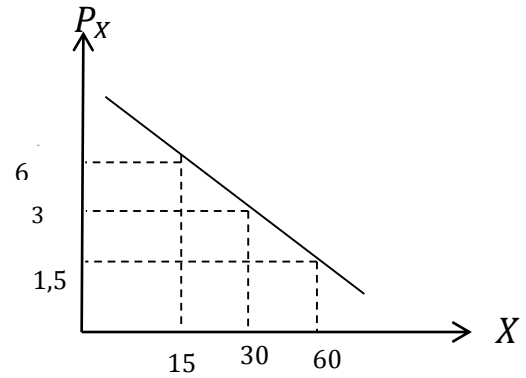
التمثيل البياني لمنحنى استهلالك السعر:



واشتق منحنى الطلب:

P_X	X
1,5	15
3	30
6	60

ومن خلال هذا الجدول يمكن رسم منحنى الطلب كما هو مبين في الشكل التالي:



تمرين 05:

الدالة التي تعظيم منفعة المستهلك وتكتب من الشكل:

$$MaxL = Max\big(F(X,Y,\cdots,n) + \lambda(R - XP_X - YP_Y - \cdots\cdots - nP_n)\big)$$

$$MaxL = X^2Y + \lambda(R - XP_X - YP_Y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0 \Rightarrow 2XY - P_X\lambda = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = 0 \Rightarrow X^2 - P_Y\lambda = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow R - XP_X - YP_Y = 0 \cdots \quad \cdots\cdots (3)$$

بقسمة (1) على (2) نتحصل على:

$$\frac{2XY}{X^2} = \frac{P_X\lambda}{P_Y\lambda}$$

وبالاختزال نحصل على:

$$\frac{2Y}{X} = \frac{P_X}{P_Y}$$

ومنه

$$2YP_Y = XP_X \Rightarrow Y = \frac{XP_X}{2P_Y} \cdots\cdots\cdots (4)$$

معادلة منحنى استهلاك الدخل

$$2YP_Y = XP_X \Rightarrow X = \frac{2YP_Y}{P_X} \cdots\cdots\cdots (5)$$

بتعويض (4) في (3) نتحصل على دالة الطلب للسلعة X:

$$R - XP_X - \left(\frac{XP_X}{2P_Y}\right)P_Y = 0 \Longrightarrow R - XP_X - \left(\frac{XP_X}{2}\right) = 0$$

$$R - \frac{3XP_X}{2} = 0 \Longrightarrow X = \frac{2R}{3P_X}$$

وبتعويض (5) في (3) نتحصل على دالة الطلب للسلعة Y :

$$R - \left(\frac{2YP_Y}{P_X}\right)P_X - YP_Y = 0 \Longrightarrow R - 2YP_Y - YP_Y = 0$$

$$R - 3YP_Y = 0 \Longrightarrow Y = \frac{R}{3P_Y}$$

الكميات التوازنية:

$$X = \frac{2R}{3P_X} = \frac{2(180)}{3(12)} \Longrightarrow X = 10$$

$$Y = \frac{R}{3P_Y} = \frac{180}{3(2)} \Longrightarrow Y = 30$$

حساب المنفعة الكلية: $UT = (10)^2(30) = 3000$

حساب TMS عند التوازن:

$$TMS = -\frac{P_X}{P_Y} = -\frac{12}{6} = -6$$

التفسير الاقتصادي: المستهلك يتخلى على 6 وحدات من السلعة Y للحصول على وحدة واحدة من السلعة X

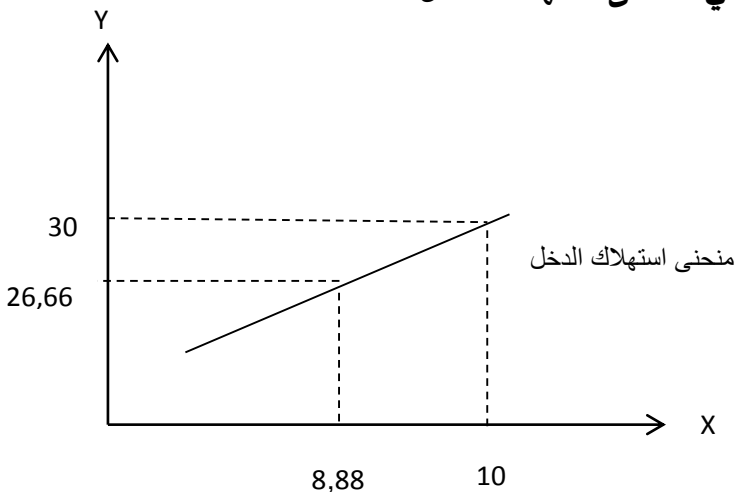
عند انخفاض الدخل إلى 160 فالكميات التوازنية تصبح:

$$X = \frac{2R}{3P_X} = \frac{2(160)}{3(12)} \Longrightarrow X = 8{,}88$$

$$Y = \frac{R}{3P_Y} = \frac{160}{3(2)} \Longrightarrow Y = 26{,}66$$

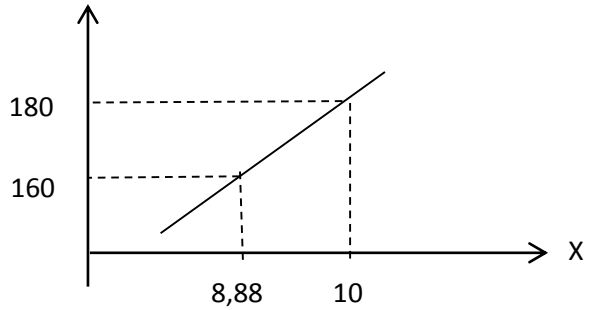
حساب المنفعة الكلية عند إذن: $UT = (8{,}88)^2(26{,}66) = 2102{,}18$

التمثيل البياني لمنحنى استهلاك الدخل:



منحنى أجل للسلعة X :

R	X
180	10
160	8,88



المنفعة التي تضيع على المستهلك بعد انخفاض الدخل:

$$\Delta UT = 2102{,}18 - 3000 = -897{,}216$$

التمرين 06:

الدالة التي تعظيم منفعة المستهلك وتكتب من الشكل:

$$MaxL = Max\big(F(X,Y,\cdots,n) + \lambda(R - XP_X - YP_Y - \cdots\cdots - nP_n)\big)$$

$$MaxL = X^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}} + \lambda(R - XP_X - YP_Y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}X^{-\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}} - P_X\lambda = 0 \cdots \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}X^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{-1}{2}} - P_Y\lambda = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow R - XP_X - YP_Y = 0 \cdots \quad \cdots\cdots (3)$$

بقسمة (1) على (2) نتحصل على:

$$\frac{\frac{1}{2}X^{-\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}X^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{-1}{2}}} = \frac{P_X\lambda}{P_Y\lambda}$$

وبالاختزال نحصل على:

$$\frac{Y}{X} = \frac{P_X}{P_Y}$$

ومنه

$$YP_Y = XP_X \Rightarrow Y = \frac{XP_X}{P_Y} \cdots\cdots\cdots (4)$$

معادلة منحنى الاستهلاك – الدخل

$$YP_Y = XP_X \Rightarrow X = \frac{YP_Y}{P_X} \cdots\cdots\cdots (5)$$

بتعويض (4) في (3) نتحصل على دالة الطلب للسلعة X:

$$R - XP_X - \left(\frac{XP_X}{P_Y}\right)P_Y = 0 \Longrightarrow R - XP_X - XP_X = 0$$

$$R - 2XP_X = 0 \Longrightarrow X = \frac{R}{2P_X}$$

وبتعويض (5) في (3) نتحصل على دالة الطلب للسلعة Y :

$$R - \left(\frac{YP_Y}{P_X}\right)P_X - YP_Y = 0 \Longrightarrow R - YP_Y - YP_Y = 0$$

$$R - 2YP_Y = 0 \Longrightarrow Y = \frac{R}{2P_Y}$$

الكميات التوازنية:

$$X = \frac{R}{2P_X} = \frac{200}{2(2)} \Longrightarrow X = 50$$

$$Y = \frac{R}{2P_Y} = \frac{200}{2(2)} \Longrightarrow Y = 50$$

تعيين طبيعة السلعتين X و Y :

$$E_R = \frac{\partial X}{\partial R} \cdot \frac{R}{X} \Longrightarrow E_R = \frac{1}{2P_X} \cdot \frac{R}{\frac{R}{2P_X}} \Longrightarrow E_R = 1$$

$$E_R = \frac{\partial Y}{\partial R} \cdot \frac{R}{Y} \Longrightarrow E_R = \frac{1}{2P_Y} \cdot \frac{R}{\frac{R}{2P_Y}} \Longrightarrow E_R = 1$$

السلعتين X و Y هما سلعتين ضروريتين (عاديتين) لأن $0 < R \leq 1$

بعد فرض الدولة ضريبة على الدخل بمعدل $t = 20\%$ فإن الكميات التوازنية تصبح كما يلي:

الدخل الجديد: $R` = R - Rt = R(1-t) = 200(1-0{,}2) = 180$

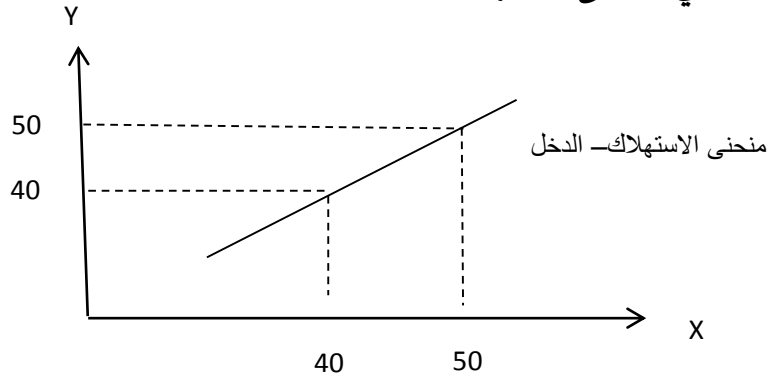
وعليه الكميات التوازنية الجديدة:

$$X = \frac{R(1-t)}{2P_X} = \frac{200(1-0{,}2)}{2(2)} \Longrightarrow X = 40$$

$$Y = \frac{R(1-t)}{2P_Y} = \frac{200(1-0{,}2)}{2(2)} \Longrightarrow Y = 40$$

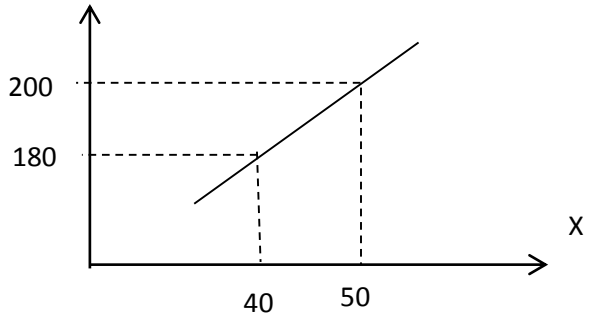
المنفعة الكلية: $(40)^{\frac{1}{2}}(40)^{\frac{1}{2}} = 40$

التمثيل البياني لمنحنى الاستهلاك – الدخل:



منحنى أنجل للسلعة X:

R	X
200	50
180	40



بالإضافة إلى الضريبة على الدخل تفرض الدولة فرض ضريبة على السلعة X:

السعر الجديد: $P_X` = P_X + P_X\alpha = P_X(1+\alpha)$

وعليه تصبح دوال الطلب كما يلي:

$$X = \frac{R(1-t)}{2P_X(1+\alpha)} = \frac{200(1-0,2)}{2(2)(1+0,1)} \Longrightarrow X = 36,36$$

$$Y = \frac{R(1-t)}{2P_Y} = \frac{200(1-0,2)}{2(2)} \Longrightarrow Y = 40$$

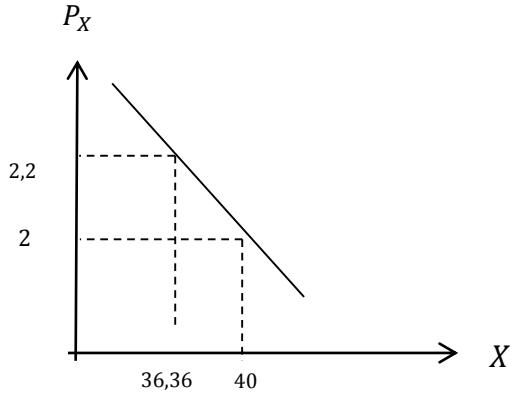
المنفعة الكلية: $(36,36)^{\frac{1}{2}}(40)^{\frac{1}{2}} = 38,138$

المنفعة الضائعة: $\Delta UT = 38,138 - 40 = -1,86$

واشتق منحنى الطلب:

P_X	X
2	40
2,2	36,36

ومن خلال هذا الجدول يمكن رسم منحنى الطلب كما هو مبين في الشكل التالي:



التمرين 07:

الدالة التي تعظيم منفعة المستهلك وتكتب من الشكل:

$$MaxL = Max\big(F(X,Y,\cdots,n) + \lambda(R - XP_X - YP_Y - \cdots\cdots - nP_n)\big)$$

$$MaxL = 2LogX + 4LogY + \lambda(R - XP_X - YP_Y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0 \Rightarrow \frac{2}{X} - P_X\lambda = 0 \cdots \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = 0 \Rightarrow \frac{4}{Y} - P_Y\lambda = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow R - XP_X - YP_Y = 0 \cdots \quad \cdots\cdots (3)$$

بقسمة (1) على (2) نتحصل على:

$$\frac{\frac{2}{X}}{\frac{4}{Y}} = \frac{P_X\lambda}{P_Y\lambda}$$

وبالاختزال نحصل على:

$$\frac{Y}{2X} = \frac{P_X}{P_Y}$$

ومنه

$$YP_Y = 2XP_X \Rightarrow Y = \frac{2XP_X}{P_Y} \cdots\cdots\cdots (4)$$

معادلة منحنى الاستهلاك – الدخل

$$YP_Y = 2XP_X \Rightarrow X = \frac{YP_Y}{2P_X} \cdots\cdots\cdots (5)$$

تحديد معادلة منحنى أنجل:

بتعويض (4) في (3) نتحصل على دالة الطلب للسلعة X:

$$R - XP_X - \left(\frac{2XP_X}{P_Y}\right)P_Y = 0 \Longrightarrow R - XP_X - 2XP_X = 0$$
$$R - 3XP_X = 0 \Longrightarrow X = \frac{R}{3P_X}$$

وبتعويض (5) في (3) نتحصل على دالة الطلب للسلعةY :

$$R - \left(\frac{YP_Y}{2P_X}\right)P_X - YP_Y = 0 \Longrightarrow R - \frac{YP_Y}{2} - YP_Y = 0$$
$$R - \frac{3YP_Y}{2} = 0 \Longrightarrow Y = \frac{2R}{3P_Y}$$

إذا كان $P_X = 1$ و $P_Y = 2$، فإن معادلة منحنى انجل:

بالنسبة للسلعة X:

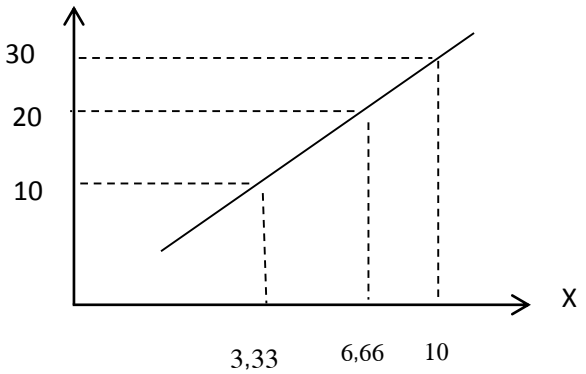
$$X = \frac{R}{3P_X} = \frac{R}{3(1)} = \frac{R}{3}$$

نفرض في كل مرة قيمة معينة للدخل ونجد كمية السلعة X

R

تمثيله البياني منحنى أنجل للسلعة:

R	X
10	3,33
20	6,66
30	10

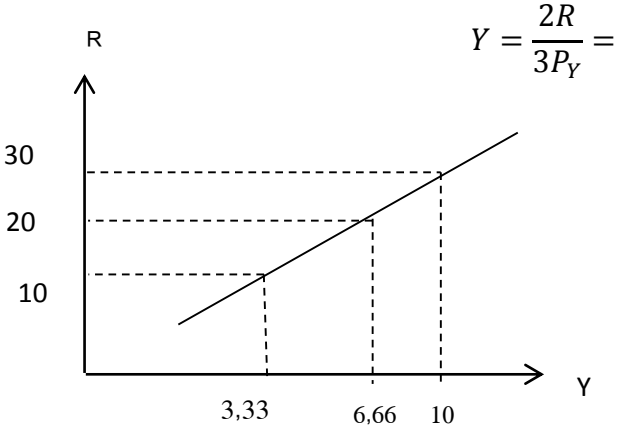


بالنسبة للسلعة Y:

$$Y = \frac{2R}{3P_Y} = \frac{2R}{3(2)} = \frac{R}{3}$$

تمثيله البياني منحنى أنجل للسلعة:

R	X
10	3,33
20	6,66
30	10



تمرين 08:

الدالة التي تعظيم منفعة المستهلك وتكتب من الشكل:

$$MaxL = Max\big(F(X,Y,\cdots,n) + \lambda(R - XP_X - YP_Y - \cdots\cdots - nP_n)\big)$$

$$MaxL = 4X^2Y + \lambda(R - XP_X - YP_Y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0 \Rightarrow 8XY - P_X\lambda = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = 0 \Rightarrow 4X^2 - P_Y\lambda = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow R - XP_X - YP_Y = 0 \cdots \quad \cdots\cdots (3)$$

بقسمة (1) على (2) نتحصل على:

$$\frac{8XY}{4X^2} = \frac{P_X\lambda}{P_Y\lambda}$$

وبالاختزال نحصل على:

$$\frac{2Y}{X} = \frac{P_X}{P_Y}$$

ومنه

$$2YP_Y = XP_X \Rightarrow Y = \frac{XP_X}{2P_Y} \cdots\cdots\cdots (4)$$

معادلة منحنى استهلاك الدخل

$$2YP_Y = XP_X \Rightarrow X = \frac{2YP_Y}{P_X} \cdots\cdots\cdots (5)$$

بتعويض (4) في (3) نتحصل على دالة الطلب للسلعة X:

$$R - XP_X - \left(\frac{XP_X}{2P_Y}\right)P_Y = 0 \Longrightarrow R - XP_X - \frac{XP_X}{2} = 0$$

$$R - \frac{3XP_X}{2} = 0 \Longrightarrow X = \frac{2R}{3P_X}$$

وبتعويض (5) في (3) نتحصل على دالة الطلب للسلعةY :

$$R - \left(\frac{2YP_Y}{P_X}\right)P_X - YP_Y = 0 \Longrightarrow R - YP_Y - 2YP_Y = 0$$

$$R - 3YP_Y = 0 \Longrightarrow Y = \frac{R}{3P_Y}$$

الكميات التوازنية:

$$X = \frac{2R}{3P_X} = \frac{2(200)}{3(2)} \Longrightarrow X = 66{,}66$$

$$Y = \frac{R}{3P_Y} = \frac{(200)}{3(4)} \Longrightarrow Y = 16.66$$

بيان أن مضاعف لاغرانج λ هو مقدار التغير في المنفعة الكلية بالنسبة للتغير في الدخل أي: $\lambda = \frac{\partial UT}{\partial R}$:

معادلة لاغرانج المشتقة الاولى بالنسبة للسلعة X لدينا:

$$8XY - P_X\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{8XY}{P_X}$$

$$\lambda = \frac{8\left(\frac{2R}{3P_X}\right)\left(\frac{R}{3P_Y}\right)}{P_X} \Longrightarrow \lambda = \frac{16R^2}{9{P_X}^2P_Y}$$

وبتعويض الكميات التوازنية في دالة المنفعة نجد:

$$UT = 4\left(\frac{2R}{3P_X}\right)^2\left(\frac{R}{3P_Y}\right) = \left(\frac{4R^2}{9{P_X}^2}\right)\left(\frac{R}{3P_Y}\right) = \frac{16R^3}{27{P_X}^2P_Y}$$

$$\frac{\partial UT}{\partial R} = \frac{16R^2}{9{P_X}^2P_Y}$$

وهي نفس نتيجة مضاعف لاغرانج λ حيث:

$$\lambda = \frac{\partial UT}{\partial R} = \frac{16R^2}{9{P_X}^2P_Y}$$

بعد فرض الدولة ضريبة على الدخل بمعدل $t = 20\%$ فإن الكميات التوازنية تصبح كما يلي:

الدخل الجديد: $R` = R - Rt = R(1-t) = 200(1-0{,}2) = 180$

وعليه الكميات التوازنية الجديدة:

$$X = \frac{2R(1-t)}{3P_X} = \frac{2(200)(1-0{,}2)}{3(2)} \Longrightarrow X = 53{,}328$$

$$Y = \frac{R(1-t)}{3P_Y} = \frac{(200)(1-0{,}2)}{3(4)} \Longrightarrow Y = 13.33$$

التمرين 09:

الدالة التي تعظيم منفعة المستهلك وتكتب من الشكل:

$$MaxL = Max\big(F(X,Y,\cdots,n) + \lambda(R - XP_X - YP_Y - \cdots\cdots - nP_n)\big)$$

$$MaxL = 3X^2Y + \lambda(R - XP_X - YP_Y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0 \Rightarrow 6XY - P_X\lambda = 0 \cdots \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = 0 \Rightarrow 3X^2 - P_Y\lambda = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow R - XP_X - YP_Y = 0 \cdots \quad \cdots\cdots (3)$$

بقسمة (1) على (2) نتحصل على:

$$\frac{6XY}{3X^2} = \frac{P_X\lambda}{P_Y\lambda}$$

وبالاختزال نحصل على:

$$\frac{2Y}{X} = \frac{P_X}{P_Y}$$

ومنه

$$2YP_Y = XP_X \Rightarrow Y = \frac{XP_X}{2P_Y} \cdots\cdots\cdots (4)$$

معادلة منحنى استهلاك الدخل

$$2YP_Y = XP_X \Rightarrow X = \frac{2YP_Y}{P_X} \cdots\cdots\cdots (5)$$

بتعويض (4) في (3) نتحصل على دالة الطلب للسلعة X:

$$R - XP_X - \left(\frac{XP_X}{2P_Y}\right)P_Y = 0 \Longrightarrow R - XP_X - \frac{XP_X}{2} = 0$$

$$R - \frac{3XP_X}{2} = 0 \Longrightarrow X = \frac{2R}{3P_X}$$

وبتعويض (5) في (3) نتحصل على دالة الطلب للسلعةY :

$$R - \left(\frac{2YP_Y}{P_X}\right)P_X - YP_Y = 0 \Longrightarrow R - YP_Y - 2YP_Y = 0$$

$$R - 3YP_Y = 0 \Longrightarrow Y = \frac{R}{3P_Y}$$

الكميات التوازنية:

$$X = \frac{2R}{3P_X} = \frac{2(600)}{3(4)} \Longrightarrow X = 100$$

$$Y = \frac{R}{3P_Y} = \frac{(600)}{3(2)} \Longrightarrow Y = 100$$

المنفعة الكلية:

$$UT = 3X^2Y = 3(100)^2100 = 3000000$$

عند ارتفاع الدخل:

الكميات التوازنية

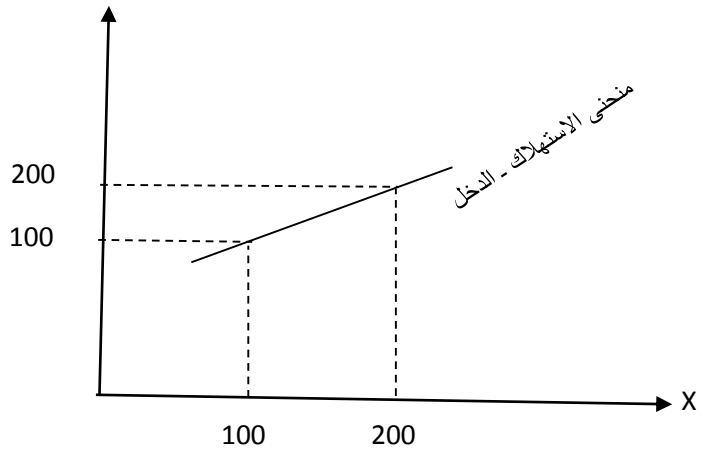
$$X = \frac{2R}{3P_X} = \frac{2(1200)}{3(4)} \Longrightarrow X = 200$$
$$Y = \frac{R}{3P_Y} = \frac{(1200)}{3(2)} \Longrightarrow Y = 200$$

المنفعة الكلية:

$$UT = 3X^2Y = 3(200)^2 200 = 24000000$$

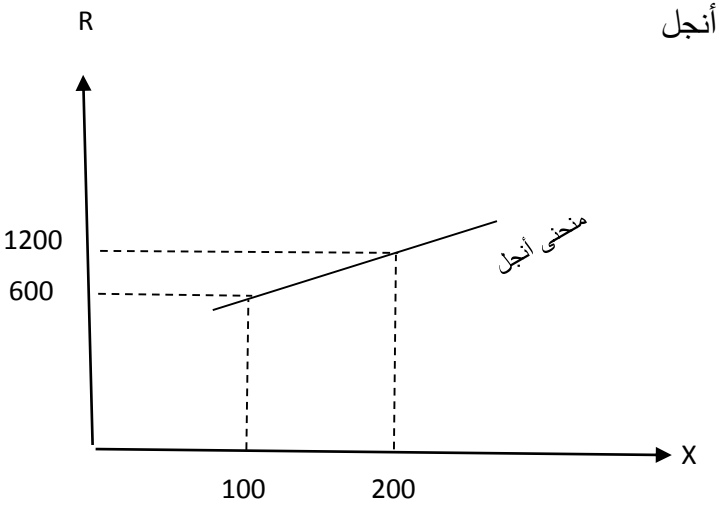
التمثيل البياني لمنحنى الاستهلاك–الدخل

Y	X
100	100
200	200



التمثيل البياني لمنحنى أنجل

R	X
600	100
1200	200



بعد فرض الدولة ضريبة على السلعة X بمعدل $t = 10\%$ فإن الكميات التوازنية تصبح كما يلي:

السعر الجديد: $P_X{}' = P_X - P_X t = P_X(1+t) = 4(1+0{,}1) = 4.4$

وعليه الكميات التوازنية الجديدة:

$$X = \frac{2R}{3P_X(1+t)} = \frac{2(1200)}{3(4)(1+0.1)} \Longrightarrow X = 181{,}81$$
$$Y = \frac{R}{3P_Y} = \frac{(1200)}{3(2)} \Longrightarrow Y = 200$$

المنفعة الكلية:

$$UT = 3X^2Y = 3(181.81)^2 200 = 19834710.74$$

المنفعة الضائعة

$$\Delta UT = 19834710.74 - 24000000 = -4165289.25$$

تحديد أثر الاحلال والدخل:

حسب هيكس

حسب هيكس فالمستهلك يبقى على نفس منحنى السواء الأصلي للحفاظ على نفس المنفعة الكلية فينتقل من النقطة الاصلية إلى نقطة وهمية جديدة لها نفس منفعة النقطة الاصلية أي

$$UT = 3X^2Y = 3(200)^2 200 = 24000000$$

ولدينا مما سبق العلاقة بين X و Y لما فرضت الدولة ضريبة على سعر السلعة X بحيث السعر الجديد $P_X{}' = P_X - P_X t = P_X(1+t) = 4(1+0{,}1) = 4.4$

والعلاقة بين بين X و Y:

$$Y = \frac{XP_X}{2P_Y} = \frac{X(4.4)}{2(2)} \Longrightarrow Y = 1.1X$$

نعوضه في دالة المنفعة الكلية نجد

$$\mathrm{UT} = 3XY^2 = 24000000 \Longrightarrow 3X(1.1X)^2 = 3.3X^3 = 24000000$$

$$X^3 = \frac{24000000}{3.3} = 7272727.27 \Longrightarrow X = \sqrt[3]{7272727.27} \Longrightarrow X = 193.74$$

ومنه

$$Y = 1.1X = 1.1(193.74) \Longrightarrow Y = 213.12$$

ومن النقطة التوازنية الوهمية: $E_2\ (193.74{,}213.12)$

ومنه النقاط التوازنية الثلاثة لحساب أثر الدخل والاحلال هي:

$E_2\ (163.41{,}179.75)$ ، $E_1\ (181.81{,}200)$ ، $E_0\ (200{,}200)$

أثر الإحلال ES:

$$ES_X = X_2 - X_0 = 193.74 - 200 = -6.26$$
$$ES_Y = Y_2 - Y_0 = 213.12 - 200 = 13.12$$

عند انخفاض السعر أدى ذلك إلى زيادة استهلاك المستهلك لسلعة X وانقاصه من السلعة Y .

أثر الدخل ER:

$$ER_X = X_1 - X_2 = 181.81 - 193.74 = -11.93$$
$$ER_Y = Y_1 - Y_2 = 200 - 213.12 = -13.12$$

بفرض ضريبة علة السلعة السعر X أدى ذلك لارتفاع سعرها ومنه انخفاض القدرة الشرائية للمستهلك وتجلى ذلك في القيم السالبة لأثر الدخل أي انخفاض السلعتين معا

الأثر الكلي:

$$ET_X = ES_X + ER_X = (-36.59) + 18.4 = -18.19$$
$$ET_Y = ES_Y + ER_Y = (-20.25) + 20.25 = 0$$

التمرين 10:

الدالة التي تعظيم منفعة المستهلك وتكتب من الشكل:

$$MaxL = Max\big(F(X,Y,\cdots,n) + \lambda(R - XP_X - YP_Y - \cdots\cdots - nP_n)\big)$$
$$MaxL = 2XY + 3Y + \lambda(R - XP_X - YP_Y)$$
$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0 \Rightarrow 2Y + 3 - \lambda P_X = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$\frac{\partial L}{\partial Y} = 0 \Rightarrow 2X - \lambda P_Y = 0 \cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow R - XP_X - YP_Y = 0 \cdots\cdots\cdots (3)$$

بقسمة (1) على (2) نتحصل على:

$$\frac{2Y+3}{2X} = \frac{\lambda P_X}{\lambda P_Y}$$

وبالاختزال نحصل على:

$$\frac{2Y+3}{2X} = \frac{P_X}{P_Y}$$

ومنه

$$(2Y+3)P_Y = (2X)P_X$$
$$X = \frac{(2Y+3)P_Y}{2P_X} \cdots\cdots\cdots (4)$$
$$2YP_Y + 3P_Y = 2XP_X \Longrightarrow 2YP_Y = 2XP_X - 3P_Y$$

$$Y = \frac{2XP_X - 3P_Y}{2P_Y} \cdots\cdots\cdots (5)$$

بتعويض (4) في (3):

$$R - \left(\frac{(2Y+3)P_Y}{2P_X}\right)P_X - YP_Y = 0 \Longrightarrow R - \left(\frac{(2Y+3)P_Y}{2}\right) - YP_Y = 0$$

ومنه

$$\frac{2R - 2YP_Y - 3P_Y - 2YP_Y}{2} = 0 \Longrightarrow 2R - 2YP_Y - 3P_Y - 2YP_Y = 0$$
$$4YP_Y = 2R - 3P_Y \Longrightarrow Y = \frac{2R - 3P_Y}{4P_Y}$$

بتعويض (5) في (3):

$$R - XP_X - \left(\frac{2XP_X - 3P_Y}{2P_Y}\right)P_Y = 0 \Longrightarrow R - XP_X - \left(\frac{2XP_X - 3P_Y}{2}\right) = 0$$

وبتوحيد المقامات نجد:

$$\frac{2R - 2XP_X + 3P_Y - 2XP_X}{2} = 0 \implies 2R - 2XP_X + 3P_Y - 2XP_X = 0$$

$$4XP_X = 2R + 3P_Y \implies X = \frac{2R + 3P_Y}{4P_X}$$

ومنه دوال الطلب هي:

$$\begin{cases} X = \dfrac{2R + 3P_Y}{4P_X} \\ Y = \dfrac{2R - 3P_Y}{4P_Y} \end{cases}$$

نعم السلعة Y لها تأثير مباشر على السلعة X بحيث كلما تغير سعر السلعة Y تغيرت الكمية المطلوبة من السلعة X كما يلي:

عند ارتفاع سعر السلعة Y الموجود في البسط والمسبوق بإشارة زائد فإن الكسر يزيد وبالتالي تزيد الكمية المطلوبة وعند انخفاضه فإن البسط ينقص وبالتالي الكسر ينقص المعبر عن الكمية المطلوبة التي تنقص كذلك.

$$\begin{cases} \uparrow P_Y \Longrightarrow \uparrow X \\ \downarrow P_Y \Longrightarrow \downarrow X \end{cases}$$

إيجاد الكمية المثلى:

$$\begin{cases} X = \dfrac{2R + 3P_Y}{4P_X} = \dfrac{2(200) + 3(4)}{4(2)} = 51.5 \\ Y = \dfrac{2R - 3P_Y}{4P_Y} = \dfrac{2(200) - 3(4)}{4(4)} = 24.25 \end{cases}$$

ومنه الكمية التوازنية هي: $(51.5,24.25)$

عند فرض الدولة ضريبة على السلعة Y فأن السلعتين تتأثرا لأن السلعة Y لها علاقة مباشرة مع السلعة X والسعر الجديد للسلعة Y هو:

$$P_Y{}' = P_Y + P_Y\alpha = P_Y(1 + \alpha)$$

ومنه دوال الطلب الجديدة هي:

$$\begin{cases} X = \dfrac{2R + 3P_Y(1+\alpha)}{4P_X} = \dfrac{2(200) + 3(4)(1+0.1)}{4(2)} = 51.65 \\ Y = \dfrac{2R - 3P_Y(1+\alpha)}{4P_Y(1+\alpha)} = \dfrac{2(200) - 3(4)(1+0.1)}{4(4)(1+0.1)} = 21.97 \end{cases}$$

الاستنتاج:

بفرض الدولة ضريبة على Y السلعة نلاحظ زيادة المستهلك لاستهلاكه من السلعة X وتقليله من استهلاك السلعة Y التي ارتفع سعرها

التمرين 11:

عند فرض الدولة ضريبة على الدخل بمعدل 20% فإن دخل المستهلك سينخفض ويصبح لديه دخل جديد يساوي الدخل القديم منقوص منه المبلغ المقتطع من الدخل (Rt)

$$R' = R - Rt \Longrightarrow R' = R(1-t)$$

والكمية المطلوبة تنخفض بسبب انخفاض الدخل كما يلي:

$$\begin{cases} X = \dfrac{R(1-t)}{2P_X} = \dfrac{R(1-0.2)}{2P_X} = \dfrac{0.8R}{2P_X} = \dfrac{0.4R}{P_X} = \dfrac{4R}{10P_X} = \dfrac{2R}{5P_X} \\ Y = \dfrac{R(1-t)}{2P_Y} = \dfrac{R(1-0.2)}{2P_Y} = \dfrac{0.8R}{2P_Y} = \dfrac{0.4R}{P_Y} = \dfrac{4R}{10P_Y} = \dfrac{2R}{5P_Y} \end{cases}$$

عند فرض الدولة ضريبة على الدخل ينخفض دخل المستهلك وبالتالي تنخفض الكمية اتوازنية لأن هناك علاقة طردية بين الدخل والكمية المطلوبة فكلما ارتفع الدخل ارتفعت الكمية المطلوبة وكلما انخفض الدخل انخفضت الكمية المطلوبة في حالة السلعة العادية كما يلي:

$$\begin{cases} \uparrow R \Longrightarrow \uparrow X \\ \downarrow R \Longrightarrow \uparrow X \\ \uparrow R \Longrightarrow \uparrow Y \\ \downarrow R \Longrightarrow \uparrow Y \end{cases}$$

عند فرض الدولة ضريبة على السلعة X فإن سعرها يرتفع وبالتالي تتأثر الكمية المطلوبة منها التي تنخفض بحيث أن السعر الجديد هو السعر القديم مضاف إليه مبلغ الضريبة

مبلغ الضريبة هو $P_X\alpha$

$$P_X' = P_X + P_X\alpha \Longrightarrow P_X' = P_X(1+\alpha)$$

وعند الغاء الدولة للضريبة على الدخل وفرض ضريبة على السلعة X تصبح دوال الطلب كما يلي:

$$\begin{cases} X = \dfrac{R}{2P_X'} = \dfrac{R}{2P_X} = \dfrac{R}{2P_X(1+\alpha)} = \dfrac{R}{2P_X(1+0.2)} = \dfrac{R}{2.4P_X} \\ Y = \dfrac{R}{2P_Y} \end{cases}$$

كما نعلم هناك علاقة عكسية بين السعر والكمية المطلوبة فكلما ارتفع السعر زادت الكمية المطلوبة وكلما انخفض السعر انخفضت الكمية المطلوبة كما يلي:

$$\begin{cases} \uparrow P_Y \Longrightarrow \uparrow X \\ \downarrow P_Y \Longrightarrow \downarrow X \end{cases}$$

التمرين 12:

تحديد معادلة منحنى الاستهلاك–الدخل:

$$MinL = Min\left(XP_X + YP_Y + \lambda\big(UT_0 - F(X,Y)\big)\right)$$
$$MinL = 3X + 3Y + \lambda(9 - XY)$$
$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0 \Rightarrow 3 - \lambda Y = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$\frac{\partial L}{\partial Y} = 0 \Rightarrow 3 - \lambda X = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow 9 - XY = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

بقسمة (1) على (2) نجد:

$$\frac{\lambda Y}{\lambda X} = \frac{3}{3}$$

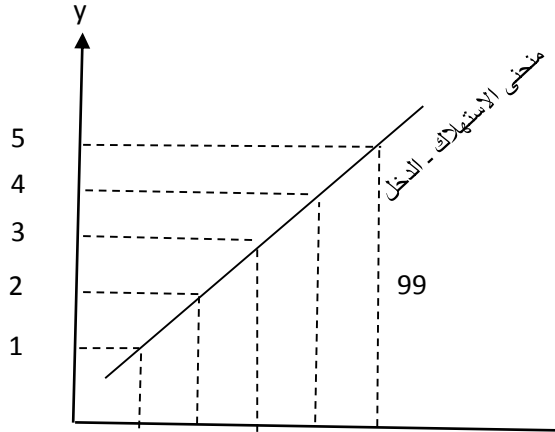
بالاختزال نجد معادلة منحنى الاستهلاك–الدخل:

$$\frac{Y}{X} = 1 \Longrightarrow Y = X \cdots\cdots (4)$$

التمثيل البياني لمنحنى الاستهلاك–الدخل:

نقوم بفرض قيمة لـ X في معادلة منحنى الاستهلاك–الدخل نحصل على قيمة لـ Y في كل مرة فنحصل على الجدول التالي:

X	Y
1	1
2	2
3	3



4	4
5	5

3 4

حساب الكمية التوازنية:

وبتعويض (4) في (3) نجد:

$$9 - XX = 0 \Longrightarrow 9 - X^2 = 0 \Longrightarrow X^2 = 9$$

ومنه:

$$X = \sqrt{9} = 3$$

وعليه:

$$X = Y = 3$$

وبالتالي الدخل المخصص للإنفاق يحسب كما يلي:

$$R = 3X + 3Y = 3(3) + 3(3) = 18$$

وقيد الميزانية هو:

$$18 = 3X + 3Y$$

التحقق من الكمية التوازنية بيانيا

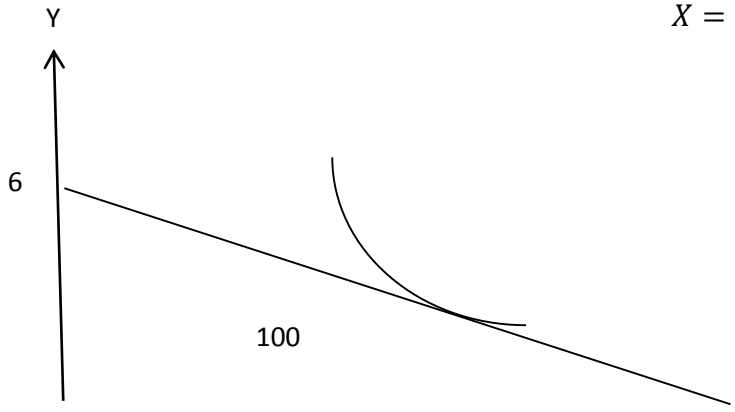
$$Y = \frac{9}{X}$$

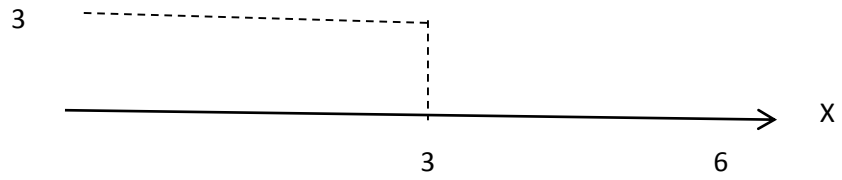
تقوم بتعويض في كل مرة قيمة X نحصل على قيمة Y وبالتالي نحصل على منحنى السواء الممثل في النقاط التالية:

X	1	2	3	4	5	6
Y	9	4.5	3	2.25	1.8	1.5

وعليه نقوم بتمثيل كل من قيد الميزانية ومنحنى السواء في نفس المعلم نحصل على النقطة التوازنية

لتمثيل قيد الميزانية: نفرض أن $X = 0$ فنجد $Y = \frac{18}{3} = 6$ كما نفرض أن $Y = 0$ فنجد $X = \frac{18}{3} = 6$





التمرين 13:

إيجاد دوال الطلب:

$$MaxL = Max\big(F(X,Y,\cdots,n) + \lambda(R - XP_X - YP_Y - \cdots\cdots - nP_n)\big)$$

$$MaxL = 4XYZ + \lambda(R - XP_X - YP_Y - ZP_Z)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0 \Rightarrow 4YZ - P_X\lambda = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = 0 \Rightarrow 4XZ - P_Y\lambda = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Z} = 0 \Rightarrow 4XY - P_Z\lambda = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow R - XP_X - YP_Y - ZP_Z = 0 \cdots\cdots (4)$$

بقسمة (1) على (2) نتحصل على:

$$\frac{4YZ}{4XZ} = \frac{P_X\lambda}{P_Y\lambda}$$

وبالاختزال نحصل على:

$$\frac{Y}{X} = \frac{P_X}{P_Y}$$

ومنه:

$$Y = \frac{XP_X}{P_Y} \cdots\cdots\cdots (5)$$

بقسمة (1) على (3) نتحصل على:

$$\frac{4YZ}{4XY} = \frac{P_X\lambda}{P_Z\lambda}$$

وبالاختزال نحصل على:

$$\frac{Z}{X} = \frac{P_X}{P_Z}$$

ومنه:

$$Z = \frac{XP_X}{P_Z} \cdots\cdots\cdots (6)$$

وبتعويض (5) و (6) في (4) نجد:

$$R - XP_X - \left(\frac{XP_X}{P_Y}\right)P_Y - \left(\frac{XP_X}{P_Z}\right)P_Z = 0$$

وبالاختزال نحصل على:

$$R - XP_X - XP_X - XP_X = 0 \Longrightarrow R - 3XP_X = 0$$

ومنه دالة الطلب للسلعة X:

$$X = \frac{R}{3P_X}$$

وبتعويض X في (5) نجد دالة الطلب للسلعة Y:

$$Y = \frac{XP_X}{P_Y} = \frac{\left(\frac{R}{3P_X}\right)P_X}{P_Y} = \frac{R}{3P_Y}$$

وبتعويض X في (6) نجد دالة الطلب للسلعةZ :

$$Z = \frac{XP_X}{P_Z} = \frac{\left(\frac{R}{3P_X}\right)P_X}{P_Z} = \frac{R}{3P_Z}$$

القيم التوازنية هي:

$$X = \frac{600}{3(20)} = 10$$
$$Y = \frac{600}{3(40)} = 5$$
$$Z = \frac{600}{3(50)} = 4$$

ولتأكد من أنها الكمية التي تعظم دالة المنفعة الكلية يجب التأكد من الشرط الكافي بحيث تكتب الدالة الهيسية كما يلي:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial X \partial X} & \frac{\partial^2 L}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 L}{\partial X \partial Z} & \frac{\partial^2 L}{\partial X \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial Y \partial X} & \frac{\partial^2 L}{\partial Y \partial Y} & \frac{\partial^2 L}{\partial Y \partial Z} & \frac{\partial^2 L}{\partial Y \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial Z \partial X} & \frac{\partial^2 L}{\partial Z \partial Y} & \frac{\partial^2 L}{\partial Z \partial Z} & \frac{\partial^2 L}{\partial Z \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial X} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial Y} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial Z} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial \lambda} \end{bmatrix}$$

ولتبسيطها أكثر يمكن كتابتها كما يلي:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial^2 L}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 L}{\partial X \partial Z} & -P_X \\ \frac{\partial^2 L}{\partial Y \partial X} & 0 & \frac{\partial^2 L}{\partial Y \partial Z} & -P_Y \\ \frac{\partial^2 L}{\partial Z \partial X} & \frac{\partial^2 L}{\partial Z \partial Y} & 0 & -P_Z \\ -P_X & -P_Y & -P_Z & 0 \end{bmatrix}$$

وبتعويض المشتقات الجزئية الثانية نحصل على المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4Z & 4Y & -2 \\ 4Z & 0 & 4X & -4 \\ 4Y & 4X & 0 & -5 \\ -2 & -4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

وبتعويض قيم المتغيرات نحصل على المصفوفة التالية

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 16 & 20 & -2 \\ 16 & 0 & 40 & -4 \\ 20 & 40 & 0 & -5 \\ -2 & -4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

وحل هذه المصفوفة يتم من خلال حساب المحددات الجزئية لهذه المصفوفة ولنرمز لها بـ Δ فإذا كانت إشارة هذه المحددات متناوبة بين السالب والموجب نقول أن لدالة الهدف نهاية عظمى:

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$$

وتتمثل المحددات الجزئية في:

المحدد الأول Δ_1 وهو اصغر محدد:

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 16 \\ 16 & 0 \end{bmatrix}$$

ويحسب بضرب الطرفين في الوسطين لأنه محدد ثنائي: $\Delta_1 = 0 - (16 \times 16) = -256$

ومنه

$$\boldsymbol{\Delta_1 < 0}$$

والمحدد الثاني Δ_2 هو أكبر من الأول بسطر وعمود ويحل بوضع الاشارات المتناوبة كما يلي:

$$\begin{matrix} + & - & + \end{matrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 16 & 20 \\ 16 & 0 & 40 \\ 20 & 40 & 0 \end{vmatrix}$$

وحل هذا المحدد يكون بتثبيت أحد الاسطر وليكن السطر الأول ثم يتم تغيير الأعمدة في كل مرة دون نسيان المتغيرات في السطر الأول كما يلي:

$$\Delta_2 = +0\begin{vmatrix}0 & 40\\ 40 & 0\end{vmatrix} - 16\begin{vmatrix}16 & 40\\ 20 & 0\end{vmatrix} + 20\begin{vmatrix}16 & 0\\ 20 & 40\end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = +0\big(0 \times (40 \times 40)\big) - 16\big((16 \times 0) - (40 \times 20)\big) + 20\big((16 \times 40) - (0 \times 20)\big)$$

$$\Delta_2 = 12800 + 12800 = 25600 > 0$$

$$\boldsymbol{\Delta_2 > 0}$$

المحدد الثالث Δ_3 هو أكبر من الثاني بسطر وعمود ويحل بوضع الاشارات المتناوبة كما يلي:

$$\begin{matrix} + & - & + & - \end{matrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 0 & 16 & 20 & -2 \\ 16 & 0 & 40 & -4 \\ 20 & 40 & 0 & -5 \\ -2 & -4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

وحل هذا المحدد يكون بتثبيت أحد الاسطر وليكن السطر الأول ثم يتم تغيير الأعمدة في كل مرة دون نسيان المتغيرات في السطر الأول كما يلي:

$$\Delta_3 = 0\begin{vmatrix}0 & 40 & -4\\ 40 & 0 & -5\\ -4 & -5 & 0\end{vmatrix} - 16\begin{vmatrix}16 & 40 & -4\\ 20 & 0 & -5\\ -2 & -5 & 0\end{vmatrix} + 20\begin{vmatrix}16 & 0 & -4\\ 20 & 40 & -5\\ -2 & -4 & 0\end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix}16 & 0 & 40\\ 20 & 40 & 0\\ -2 & -4 & -5\end{vmatrix}$$

ولنحل كل محدد ثلاثي لوحده ثم نحسب المحدد الكبير

المحدد الأول مسبوق بإشارة (0) وبالتالي لا نحسبه لأنه معدوم

المحدد الثاني:

$$\begin{matrix} + & - & + \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix}16 & 40 & -4\\ 20 & 0 & -5\\ -2 & -5 & 0\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}16 & 40 & -4\\ 20 & 0 & -5\\ -2 & -5 & 0\end{vmatrix} = +16\begin{vmatrix}0 & -5\\ -5 & 0\end{vmatrix} - 40\begin{vmatrix}20 & -5\\ -2 & 0\end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix}20 & 0\\ -2 & -5\end{vmatrix}$$

$$= 16\big((0) - (25)\big) - 40\big((0) - (10)\big) - 4\big((20 \times -5) - (-2 \times 0)\big)$$

$$= -400 + 400 + 400 = 400$$

المحدد الثالث:

$$\begin{matrix} + & - & + \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 16 & 0 & -4 \\ 20 & 40 & -5 \\ -2 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 16 & 0 & -4 \\ 20 & 40 & -5 \\ -2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = +16\begin{vmatrix} 40 & -5 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 20 & -5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 20 & 40 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 16\big((0) - (-4 \times -5)\big) - 0\big((0) - (-2 \times -5)\big) - 4\big((20 \times -4) - (-2 \times 40)\big)$$

$$= 16(-20) - 4\big((-80) + 80\big) = -320$$

المحدد الرابع:

$$+ \quad - \quad +$$

$$\begin{vmatrix} 16 & 0 & 40 \\ 20 & 40 & 0 \\ -2 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 16 & 0 & 40 \\ 20 & 40 & 0 \\ -2 & -4 & -5 \end{vmatrix} = +16\begin{vmatrix} 40 & 0 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 20 & 0 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + 40\begin{vmatrix} 20 & 40 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 16\big((40 \times -5) - 0\big) - 0\big((20 \times -5) - 0\big) + 40\big((20 \times -4) - (40 \times -2)\big)$$

$$= 16(-200) + 40(-80 + 80) = -3200$$

حساب المحدد الكبير Δ_3 وهو عبارة عن مجموع المحددات الأربعة للمصفوفة الكبيرة:

$$\Delta_3 = -16(400) + 20(-320) + 2(-3200) \Longrightarrow \Delta_3 = -21200 < 0$$

$$\boldsymbol{\Delta_3 < 0}$$

الاستنتاج:

ومنه محددات المصفوفة الهيسية A ذات اشارات متناوبة ومنه للدالة نهاية عظمى

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$$

التمرين 14:

الدالة التي تعظيم منفعة المستهلك وتكتب من الشكل:

$$MaxL = Max\big(F(X, Y, \cdots, n) + \lambda(R - XP_X - YP_Y - \cdots\cdots - nP_n)\big)$$

$$MaxL = X^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}} + \lambda(R - XP_X - YP_Y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}X^{-\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}} - P_X\lambda = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}X^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{-1}{2}} - P_Y\lambda = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow R - XP_X - YP_Y = 0 \cdots \quad \cdots\cdots (3)$$

بقسمة (1) على (2) نتحصل على:

$$\frac{\frac{1}{2}X^{-\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}X^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{-1}{2}}} = \frac{P_X\lambda}{P_Y\lambda}$$

وبالاختزال نحصل على:

$$\frac{Y}{X} = \frac{P_X}{P_Y}$$

ومنه

$$YP_Y = XP_X \Rightarrow Y = \frac{XP_X}{P_Y} \cdots\cdots\cdots (4)$$

معادلة منحنى الاستهلاك – الدخل

$$YP_Y = XP_X \Rightarrow X = \frac{YP_Y}{P_X} \cdots\cdots\cdots (5)$$

بتعويض (4) في (3) نتحصل على دالة الطلب للسلعة X:

$$R - XP_X - \left(\frac{XP_X}{P_Y}\right)P_Y = 0 \Longrightarrow R - XP_X - XP_X = 0$$

$$R - 2XP_X = 0 \Longrightarrow X = \frac{R}{2P_X}$$

وبتعويض (5) في (3) نتحصل على دالة الطلب للسلعةY :

$$R - \left(\frac{YP_Y}{P_X}\right)P_X - YP_Y = 0 \Longrightarrow R - YP_Y - YP_Y = 0$$

$$R - 2YP_Y = 0 \Longrightarrow Y = \frac{R}{2P_Y}$$

الكميات التوازنية:

$$X = \frac{R}{2P_X} = \frac{200}{2(2)} \Longrightarrow X = 50$$

$$Y = \frac{R}{2P_Y} = \frac{200}{2(2)} \Longrightarrow Y = 50$$

حساب مرونة الطلب الدخلية وتعيين طبيعة السلعتين X وY :

$$E_R = \frac{\partial X}{\partial R} \cdot \frac{R}{X} \Rightarrow E_R = \frac{1}{2P_X} \cdot \frac{R}{\frac{R}{2P_X}} \Longrightarrow E_R = 1$$

$$E_R = \frac{\partial Y}{\partial R} \cdot \frac{R}{Y} \Rightarrow E_R = \frac{1}{2P_Y} \cdot \frac{R}{\frac{R}{2P_Y}} \Longrightarrow E_R = 1$$

السلعتين X وY هما سلعتين ضروريتين (عاديتين) لأن $0 < R \leq 1$

بعد فرض الدولة ضريبة على الدخل بمعدل $t = 20\%$ فإن الكميات التوازنية تصبح كما يلي:

الدخل الجديد: $R` = R - Rt = R(1-t) = 200(1-0{,}2) = 180$

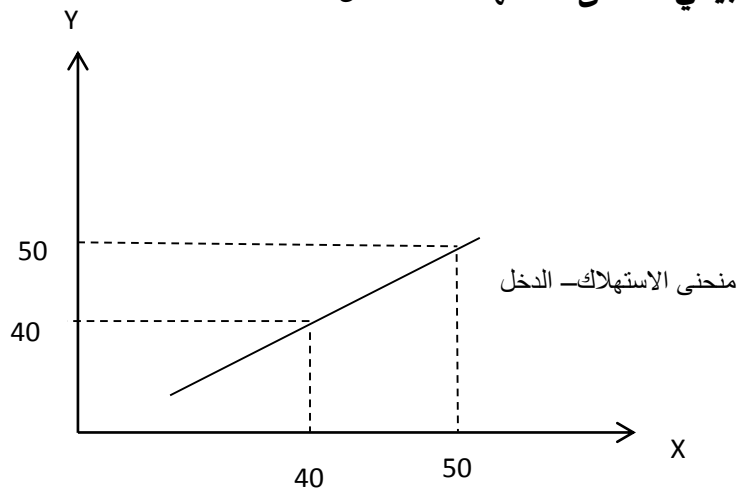
وعليه الكميات التوازنية الجديدة:

$$X = \frac{R(1-t)}{2P_X} = \frac{200(1-0,2)}{2(2)} \Longrightarrow X = 40$$

$$Y = \frac{R(1-t)}{2P_Y} = \frac{200(1-0,2)}{2(2)} \Longrightarrow Y = 40$$

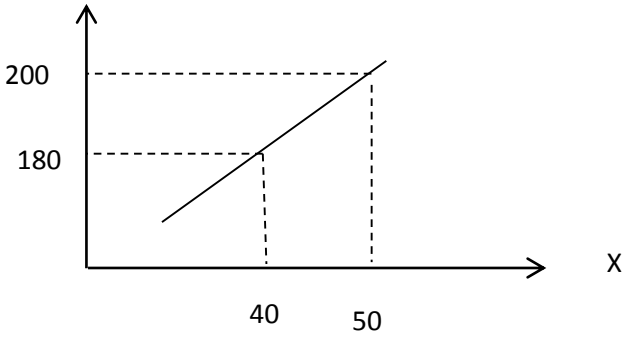
المنفعة الكلية: $(40)^{\frac{1}{2}}(40)^{\frac{1}{2}} = 40$

التمثيل البياني لمنحنى الاستهلاك – الدخل:



منحنى أنجل للسلعة X:

R	X
200	50
180	40



بالإضافة إلى الضريبة على الدخل تفرض الدولة فرض ضريبة على السلعة X:

السعر الجديد: $P_X` = P_X + P_X\alpha = P_X(1+\alpha)$

وعليه تصبح دوال الطلب كما يلي:

$$X = \frac{R(1-t)}{2P_X(1+\alpha)} = \frac{200(1-0,2)}{2(2)(1+0,1)} \Longrightarrow X = 36,36$$

$$Y = \frac{R(1-t)}{2P_Y} = \frac{200(1-0,2)}{2(2)} \Longrightarrow Y = 40$$

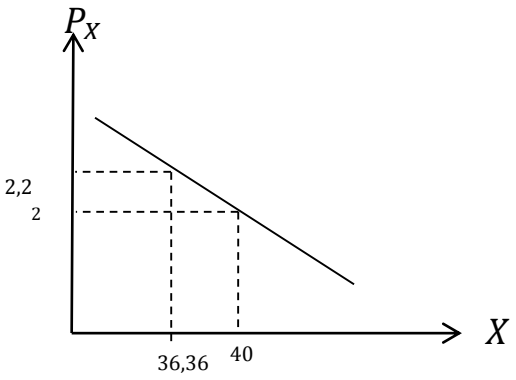
المنفعة الكلية: $(36,36)^{\frac{1}{2}}(40)^{\frac{1}{2}} = 38,138$

المنفعة الضائعة: $\Delta UT = 38,138 - 40 = -1,86$

واشتق منحنى الطلب:

P_X	X
2	40
2,2	36,36

ومن خلال هذا الجدول يمكن رسم منحنى الطلب كما هو مبين في الشكل التالي:



التمرين 15:

الدالة التي تعظيم منفعة المستهلك وتكتب من الشكل:

$$MaxL = Max\big(F(X,Y,\cdots,n) + \lambda(R - XP_X - YP_Y - \cdots\cdots - nP_n)\big)$$

$$MaxL = \mathbf{3}X^2Y + 4 + \lambda(R - XP_X - YP_Y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0 \Rightarrow 6XY - P_X\lambda = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = 0 \Rightarrow 3X^2 - P_Y\lambda = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow R - XP_X - YP_Y = 0 \cdots \quad \cdots\cdots (3)$$

بقسمة (1) على (2) نتحصل على:

$$\frac{6XY}{3X^2} = \frac{P_X\lambda}{P_Y\lambda}$$

وبالاختزال نحصل على:

$$\frac{2Y}{X} = \frac{P_X}{P_Y}$$

ومنه

$$2YP_Y = XP_X \Rightarrow Y = \frac{XP_X}{2P_Y} \cdots\cdots\cdots (4)$$

معادلة منحنى الاستهلاك – الدخل

$$2YP_Y = XP_X \Rightarrow X = \frac{2YP_Y}{P_X} \cdots\cdots\cdots (5)$$

بتعويض (4) في (3) نتحصل على دالة الطلب للسلعة X:

$$R - XP_X - \left(\frac{XP_X}{2P_Y}\right)P_Y = 0 \Longrightarrow R - \frac{2XP_X}{2} - \frac{XP_X}{2} = 0$$

$$R - \frac{3XP_X}{2} = 0 \Longrightarrow X = \frac{2R}{3P_X}$$

وبتعويض (5) في (3) نتحصل على دالة الطلب للسلعةY :

$$R - \left(\frac{2YP_Y}{P_X}\right)P_X - YP_Y = 0 \Longrightarrow R - 2YP_Y - YP_Y = 0$$

$$R - 3YP_Y = 0 \Longrightarrow Y = \frac{R}{3P_Y}$$

الكميات التوازنية:

$$X = \frac{2R}{3P_X} = \frac{2(24)}{3(2)} \Longrightarrow X = 8$$

$$Y = \frac{R}{3P_Y} = \frac{24}{3(4)} \Longrightarrow Y = 2$$

حساب مرونة الطلب الدخلية وتعيين طبيعة السلعتين X وY :

$$E_R = \frac{\partial X}{\partial R} \cdot \frac{R}{X} \Rightarrow E_R = \frac{2}{3P_X} \cdot \frac{R}{\frac{2R}{3P_X}} \Longrightarrow E_R = 1$$

$$E_R = \frac{\partial Y}{\partial R} \cdot \frac{R}{Y} \Rightarrow E_R = \frac{1}{3P_Y} \cdot \frac{R}{\frac{R}{3P_Y}} \Longrightarrow E_R = 1$$

السلعتين X وY هما سلعتين ضروريتين (عاديتين) لأن $0 < R \leq 1$

حساب TMS عند التوازن

ط1.

$$\mathrm{TMS}_{X.Y} = -\frac{P_X}{P_Y} = -0.5$$

ط2.

$$Um_X = \frac{\partial UT}{\partial X} = 6XY$$
$$Um_Y = \frac{\partial UT}{\partial Y} = 3X^2$$

$$\text{TMS}_{X.Y} = -\frac{Um_X}{Um_Y} = -\frac{6XY}{3X^2} = -\frac{2Y}{X} = -\frac{2(2)}{8} = -0.5$$

إذا انخفض سعر السلعة y إلى 2 ايجاد الكميات المثلى من السلعتين X و Y :

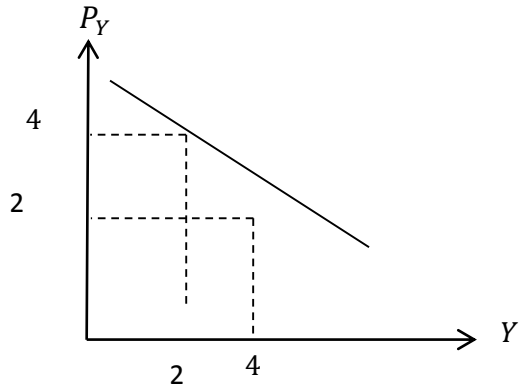
الكميات التوازنية:

$$X = \frac{2R}{3P_X} = \frac{2(24)}{3(2)} \Longrightarrow X = 8$$
$$Y = \frac{R}{3P_Y} = \frac{24}{3(2)} \Longrightarrow Y = 4$$

ارسم منحنى الطلب للسلعة y

P_Y	Y
2	4
4	2

ومن خلال هذا الجدول يمكن رسم منحنى الطلب كما هو مبين في الشكل التالي:

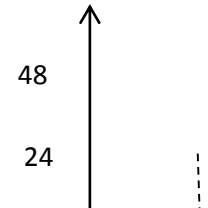


1. إذا تضاعف دخل المستهلك مثل بيانيا منحنى أنجل للسلعة X .. ماذا تستنتج؟

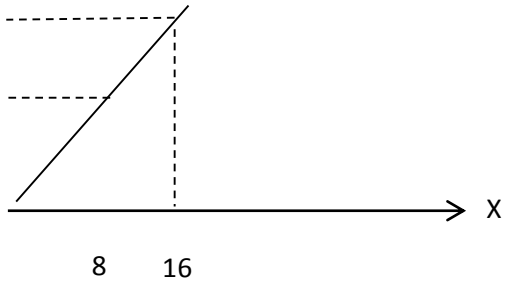
الكميات التوازنية:

$$X = \frac{2R}{3P_X} = \frac{2(48)}{3(2)} \Longrightarrow X = 16$$
$$Y = \frac{R}{3P_Y} = \frac{48}{3(4)} \Longrightarrow Y = 4$$

منحنى أنجل للسلعة X:



R	X
24	8
48	16



عند زيادة الدخل تزداد القيم التوازنية وبالتالي نستنتج ان هناك علاقة طردية بين الدخل و الكمية التوازنية كلما ارتفع الدخل ارتفعت الكمية التوازنية والعكس صحيح وبالتالي السلعة X هي سلعة عادية

التمرين 16:

$$MaxL = Max\big(F(X,Y,\cdots,n) + \lambda(R - XP_X - YP_Y - \cdots\cdots - nP_n)\big)$$

$$MaxL = X^{\alpha}Y^{1-\alpha} + \lambda(R - XP_X - YP_Y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0 \Rightarrow \alpha X^{1-\alpha}Y^{1-\alpha} - P_X\lambda = 0 \cdots \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = 0 \Rightarrow (1-\alpha)X^{\alpha}Y^{-\alpha} - P_Y\lambda = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow R - XP_X - YP_Y = 0 \cdots \quad \cdots\cdots (3)$$

بقسمة (1) على (2) نتحصل على:

$$\frac{\alpha X^{1-\alpha}Y^{1-\alpha}Y^{-\alpha}}{(1-\alpha)X^{\alpha}Y^{-\alpha}} = \frac{P_X\lambda}{P_Y\lambda}$$

وبالاختزال نحصل على:

$$\frac{\alpha Y}{(1-\alpha)X} = \frac{P_X}{P_Y}$$

ومنه

$$\alpha YP_Y = (1-\alpha)XP_X \Rightarrow Y = \frac{(1-\alpha)XP_X}{\alpha P_Y} \cdots\cdots\cdots (4)$$

معادلة منحنى الاستهلاك – الدخل

$$\alpha YP_Y = (1-\alpha)XP_X \Rightarrow X = \frac{\alpha YP_Y}{(1-\alpha)P_X} \cdots\cdots\cdots (5)$$

بتعويض (4) في (3) نتحصل على دالة الطلب للسلعة X:

$$R - XP_X - \left(\frac{(1-\alpha)XP_X}{\alpha P_Y}\right)P_Y = 0 \Longrightarrow R = \frac{\alpha XP_X}{\alpha} + \frac{(1-\alpha)XP_X}{\alpha}$$

$$\Longrightarrow \alpha R = (\alpha + 1 - \alpha)XP_X \Longrightarrow \alpha R = XP_X \Longrightarrow \frac{\alpha R}{P_X} = X$$

$$\Rightarrow X = \frac{\alpha R}{P_X}$$

وبتعويض (5) في (3) نتحصل على دالة الطلب للسلعة Y :

$$R - \left(\frac{\alpha Y P_Y}{(1-\alpha)P_X}\right)P_X - YP_Y = 0 \Rightarrow R - \frac{\alpha Y P_Y}{(1-\alpha)} - \frac{(1-\alpha)YP_Y}{(1-\alpha)} = 0$$

$$R = \frac{\alpha Y P_Y}{(1-\alpha)} + \frac{(1-\alpha)YP_Y}{(1-\alpha)} \Rightarrow R = \frac{(\alpha + 1 - \alpha)YP_Y}{1-\alpha} \Rightarrow R = \frac{YP_Y}{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{(1-\alpha)R}{P_Y}$$

حساب مرونة الطلب الدخلية وتعيين طبيعة السلعتين X و Y :

$$E_R = \frac{\partial X}{\partial R} \cdot \frac{R}{X} \Rightarrow E_R = \frac{\alpha}{P_X} \cdot \frac{R}{\frac{\alpha R}{P_X}} \Rightarrow E_R = 1$$

$$E_X = \frac{\partial Y}{\partial R} \cdot \frac{R}{Y} \Rightarrow E_R = \frac{1-\alpha}{P_Y} \cdot \frac{R}{\frac{(1-\alpha)R}{P_Y}} \Rightarrow E_R = 1$$

السلعتين X و Y هما سلعتين ضروريتين (عاديتين) لأن $0 < R \leq 1$

قيمة المرونة السعرية:

$$E_X = \frac{\partial X}{\partial P_X} \cdot \frac{P_X}{X} \Rightarrow E_R = \frac{-\alpha R}{{P_X}^2} \cdot \frac{P_X}{\frac{\alpha R}{P_X}} \Rightarrow E_X = -1$$

$$E_Y = \frac{\partial Y}{\partial P_Y} \cdot \frac{P_Y}{Y} \Rightarrow E_Y = \frac{-(1-\alpha)R}{{P_Y}^2} \cdot \frac{P_Y}{\frac{(1-\alpha)R}{P_Y}} \Rightarrow E_Y = -1$$

التمرين 17:

الدالة التي تعظيم منفعة المستهلك وتكتب من الشكل:

$$MaxL = Max\big(F(X,Y,\cdots,n) + \lambda(R - XP_X - YP_Y - \cdots\cdots - nP_n)\big)$$

$$MaxL = \boldsymbol{X}Y + \lambda(R - XP_X - YP_Y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0 \Rightarrow Y - P_X\lambda = 0 \cdots \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = 0 \Rightarrow X - P_Y\lambda = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow R - XP_X - YP_Y = 0 \cdots \quad \cdots\cdots (3)$$

بقسمة (1) على (2) نتحصل على:

$$\frac{Y}{X} = \frac{P_X\lambda}{P_Y\lambda}$$

ومنه

$$YP_Y = XP_X \Rightarrow Y = \frac{XP_X}{P_Y} \cdots\cdots\cdots (4)$$

معادلة منحنى الاستهلاك – الدخل

$$YP_Y = XP_X \Rightarrow X = \frac{YP_Y}{P_X} \cdots\cdots\cdots (5)$$

بتعويض (4) في (3) نتحصل على دالة الطلب للسلعة X:

$$R - XP_X - \left(\frac{XP_X}{P_Y}\right)P_Y = 0 \Longrightarrow R - XP_X - XP_X = 0$$

$$R - 2XP_X = 0 \Longrightarrow X = \frac{R}{2P_X}$$

وبتعويض (5) في (3) نتحصل على دالة الطلب للسلعةY :

$$R - \left(\frac{YP_Y}{P_X}\right)P_X - YP_Y = 0 \Longrightarrow R - YP_Y - YP_Y = 0$$

$$R - 2YP_Y = 0 \Longrightarrow Y = \frac{R}{2P_Y}$$

الكميات التوازنية:

$$X = \frac{R}{2P_X} = \frac{144}{2(12)} \Longrightarrow X = 6$$

$$Y = \frac{R}{2P_Y} = \frac{144}{2(18)} \Longrightarrow Y = 4$$

إيجاد الكمية التوازنية بعد انخفاض وسائل النقل الخاصة الى 4.5:

$$X = \frac{R}{2P_X} = \frac{144}{2(12)} \Longrightarrow X = 6$$

$$Y = \frac{R}{2P_Y} = \frac{144}{2(4.5)} \Longrightarrow Y = 16$$

حساب المرونة السعرية عند الانتقال من A الى B

$$E_Y = \frac{\Delta Y}{\Delta P_Y} \cdot \frac{P_{Y1}}{Y_1} \Longrightarrow E_Y = \frac{Y_2 - Y_1}{P_{Y2} - P_{Y1}} \cdot \frac{P_{Y1}}{Y_1} \Longrightarrow E_Y = \frac{16 - 4}{4.5 - 18} \cdot \frac{18}{4}$$

$$\Longrightarrow E_Y = -\frac{12}{13.5} \cdot \frac{18}{4} \Longrightarrow E_Y = -\frac{216}{54} \Longrightarrow E_Y = -4$$

التمرين 18:

تسعى دالة الهدف لتعظيم منفعة المستهلك وتكتب من الشكل:

$$MaxL = Max\big(F(X, Y, \cdots, n) + \lambda(R - XP_X - YP_Y - \cdots\cdots - nP_n)\big)$$

$$MaxL = 2XY + \lambda(200 - 4X - 10Y)$$

وحل هذه الدالة يتمثل في:

الشرط اللازم:

ويتمثل في انعدام المشتقات الجزئية الأولى لدالة الهدف بالنسبة لجميع المتغيرات كما يلي:

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0 \Rightarrow 2Y - 4\lambda = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$\frac{\partial L}{\partial Y} = 0 \Rightarrow 2X - 10\lambda = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow 200 - 4X - 10Y = 0 \cdots\cdots (3)$$

بقسمة $\frac{1}{2}$ نتحصل على:

$$\frac{2Y}{2X} = \frac{4\lambda}{10\lambda}$$

وبالاختزال نحصل على:

$$\frac{Y}{X} = \frac{2}{5}$$

ومنه

$$Y = \frac{2X}{5} \cdots\cdots\cdots (4)$$

وبتعويض (4) في (3) نحصل على:

$$200 - 4X - 10\left(\frac{2X}{5}\right) = 0$$

وبالاختزال نحصل على:

$$200 - 4X - 4X = 0$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على:

$$200 - 8X = 0$$

ومنه

$$X = \frac{200}{8} = 25$$

وبتعويض قيمة X في (4) نجد:

$$Y = \frac{2(25)}{5} = 10$$

وعليه فالكمية التوازنية هي:$(25,10)$

ولتأكد من انها الكمية التي تعظم دالة المنفعة الكلية يجب التأكد من الشرط الكافي بحيث تكتب الدالة الهيسية كما يلي:

$$A=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial X \partial X} & \frac{\partial^2 L}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 L}{\partial X \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial Y \partial X} & \frac{\partial^2 L}{\partial Y \partial Y} & \frac{\partial^2 L}{\partial Y \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial X} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial Y} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial \lambda} \end{bmatrix}$$

وبتعويض المشتقات الجزئية الثانية نحصل على المصفوفة التالية:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -10 \\ -4 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

وتتمثل المحددات الجزئية في:

$$\Delta_1=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ويحسب بضرب الطرفين في الوسطين لأنه محدد ثنائي بحيث: $\Delta_1= 0-(2\times 2)=-4$

والمحدد الثاني هو اكبر من الاول بسطر وعمود ويحل بوضع الاشارات المتناوبة كما يلي:

$$\begin{matrix} + & - & + \end{matrix}$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -10 \\ -4 & -10 & 0 \end{vmatrix}$$

وحل هذا المحدد يكون بتثبيت أحد الاسطر وليكن السطر الأول ثم يتم تغيير الاعمدة في كل مرة دون نسيان المتغيرات في السطر الأول كما يلي:

$$\Delta_2= +0\big(0\times(-10\times-10)\big)-2\big((2\times 0)-(-4\times-10)\big) -4\big((2\times-10)-(0\times-4)\big)$$

$$\Delta_2= 80+80=160>0$$

ومنه محددات المصفوفة الهيسية ذات اشارات متناوبة ومنه للدالة نهاية عظمى

التمرين 19:

$$TMS_{X.Y}=\frac{\partial Y}{\partial X}=-\frac{P_X}{P_Y}$$

$$=-\frac{P_X}{P_Y}=-\frac{10}{40}=-\frac{1}{4}$$

$$UT=Y(X+1)\Longrightarrow 64=Y(X+1)\Longrightarrow Y=\frac{64}{X+1}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial X}=\frac{(64)^{\sim}(X+1)-(64)(X+1)^{\sim}}{(X+1)^2}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial X}=\frac{-64}{(X+1)^2}$$

عند التوازن:

$$TMS_{X.Y}=\frac{\partial Y}{\partial X}=-\frac{P_X}{P_Y}$$

ومنه

$$-\frac{1}{4}=\frac{-64}{(X+1)^2}\Longrightarrow(X+1)^2=256\Longrightarrow X+1=16\Longrightarrow X=15$$

$$Y=\frac{64}{15+1}=4$$

الميزانية الاسمية

$$R=XP_X+YP_Y\Longrightarrow R=15(10)+4(40)=310$$

انخفاض السعر الى $P_X=5$ **أي تغير السعر: يؤدي الى حدوث اثرين: اثر الدخل و اثر الاحلال**

نبحث عن Y **و** $\boldsymbol{X}$ الجديدة:

$$MaxL=Max\big(F(X,Y,\cdots,n)+\lambda(R-XP_X-YP_Y-\cdots\cdots-nP_n)\big)$$

$$MaxL=Y(X+1)+\lambda(310-5X-40Y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X}=0\Rightarrow Y-5\lambda=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y}=0\Rightarrow X+1-40\lambda=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0\Rightarrow 310-5X-40Y=0\cdots\quad\cdots\cdots(3)$$

بقسمة (1) على (2) نتحصل على:

$$\frac{Y}{X+1}=\frac{5\lambda}{40\lambda}$$

ومنه

$$8Y=(X+1)\Rightarrow Y=\frac{(X+1)}{8}\cdots\cdots\cdots(4)$$

معادلة منحنى الاستهلاك – الدخل

بتعويض (4) في (3) نتحصل على دالة الطلب للسلعة X:

$$310-5X-\left(\frac{X+1}{8}\right)40=0\Longrightarrow 310-5X-5X-5=0$$

$$305-10X=0\Longrightarrow X=\frac{305}{10}\Longrightarrow X^{\sim}=30.5$$

$$Y=\frac{(30.5+1)}{8}\Longrightarrow Y^{\sim}=3.93$$

اثر السعر:

$$X^{\sim}-X=30.5-15=15.5$$

$$Y^{\sim}-Y=3.93-4=-0.7$$

ارتفاع كمية الطلب على X وانخفاض الطلب على Y

نحسب الدخل الجديد اللازم لاقتناء السلعتين X و Y بالسعر الجديد

$$R=XP_X+YP_Y\Longrightarrow R=15(5)+4(40)=235$$

قيم التوازن بالدخل الجديد $R = 235$

$$MaxL = Max\big(F(X,Y,\cdots,n) + \lambda(R - XP_X - YP_Y - \cdots\cdots - nP_n)\big)$$

$$MaxL = Y(X+1) + \lambda(235 - 5X - 40Y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0 \Rightarrow Y - 5\lambda = 0 \cdots \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = 0 \Rightarrow X + 1 - 40\lambda = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow 235 - 5X - 40Y = 0 \cdots \quad \cdots\cdots (3)$$

بقسمة (1) على (2) نتحصل على:

$$\frac{Y}{X+1} = \frac{5\lambda}{40\lambda}$$

ومنه

$$8Y = (X+1) \Rightarrow Y = \frac{(X+1)}{8} \cdots\cdots\cdots (4)$$ الدخل استهلاك منحى معادلة

بتعويض (4) في (3) نتحصل على دالة الطلب للسلعة X:

$$235 - 5X - \left(\frac{X+1}{8}\right)40 = 0 \Longrightarrow 235 - 5X - 5X - 5 = 0$$

$$230 - 10X = 0 \Longrightarrow X = \frac{230}{10} \Longrightarrow X^{\approx} = 23$$

$$Y = \frac{(23+1)}{8} \Longrightarrow Y^{\approx} = 3$$

اثر الاحلال:

$$X^{\approx} - X = 23 - 15 = 8$$

$$Y^{\approx} - Y = 3 - 4 = -1$$

اثر الدخل

$$X^{\sim} - X^{\approx} = 30.5 - 23 = 7.5$$

$$Y^{\sim} - Y^{\approx} = 3.93 - 3 = 0.93$$

اثر السعر= الأثر الكلي= اثر الاحلال+ اثر الدخل

$$X = 8 + 7.5 = 15.5$$

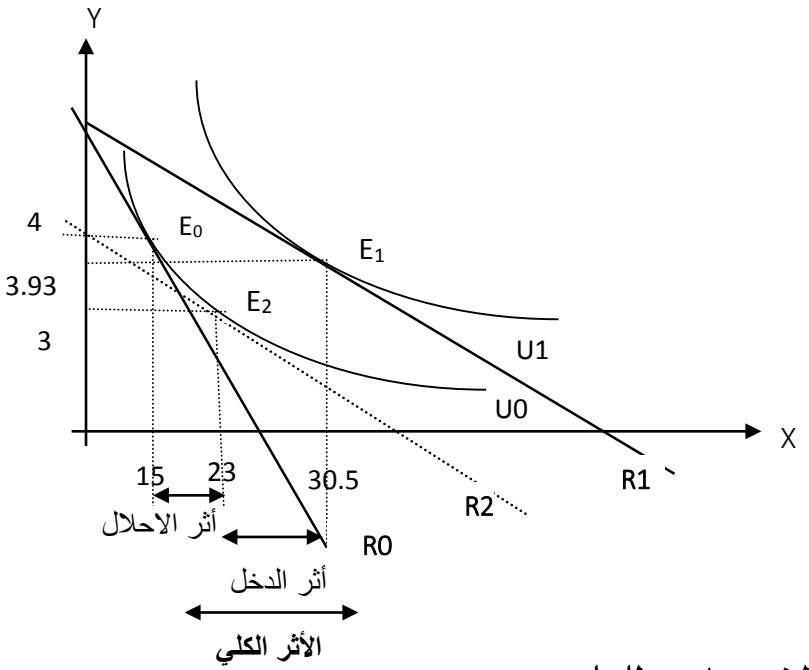
$$Y = -1 + 0.93 = -0.07$$

اثر الدخل يؤدي الى انخفاض سعر السلعة مما يؤدي الى تحسين ميزانية المستهلك وتجعله في مستوى منفعة اعلى

اثر الاحلال الدخل النقدي ثلبت واحلال سلعة محل سلعة أخرى ممكنة

اثر السعر: انخفاض سعر السلعة يؤدي الى زيادة المشتريات مع ثبات الدخل

التمثيل البياني لأثر الدخل والاحلال حسب هيكس



المطلب الثالث: تمارين للحل

فيما يلي نقترح مجموعة من التمارين تساعد الطالب على تطبيق ماجاء في المطالب السابقة

التمرين 01:

لتكن دالة المنفعة لأحد المستهلكين من الشكل $UT = (Y+1)(X+2)$، حيث $P_X = 2$ و $P_Y = 5$ أسعار السلعتين X و Y على التوالي و $R = 50$ الدخل المخصص للإنفاق.

1. أوجد دوال الطلب؟
2. ما هي التوليفة المثلى التي تحقق اشباع ممكن؟
3. احسب مقدار المنفعة التي سيحصل عليها المستهلك؟
4. احسب المنفعة الحدية؟

التمرين 02:

لتكن دالة المنفعة لاحد المستهلكين من الشكل $UT = X^{\frac{1}{3}}Y^{\frac{2}{3}}$، حيث P_X و P_Y اسعار السلعتين X و Y على التوالي و R الدخل المخصص للإنفاق

- اوجد معادلة منحنى استهلاك الدخل؟

– اوجد دوال الطلب لهذا المستهلك؟ حدد طبيعة كل منهما؟

التمرين 03:

مستهلك له دخل R ينفقه لشراء السلعتين X و Y دالة منفعته هي: $UT = X^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{4}}$

$R = 120$ وسعر السلعتين X و Y هما $P_X = 2$ و $P_Y = 2$،

1. حدد معادلة منحنى استهلاك الدخل اوجد دوال الطلب على السلعتين X وY ، واحسب الكميات التوازنية وحجم المنفعة الكلية؟
2. احسب مرونة الطلب الدخلية للدوال السابقة وعين نوع السلعتين X و Y؟
3. عند انخفاض سعر السلعة X إلى 1,5 اوجد الكميات التوازنية الجديدة ؟ واشتق منحنى الطلب؟
4. احسب حجم المنفعة الكلية وماهي المنفعة المكتسبة لهذا المستهلك؟
5. إذا فرضت الدولة ضريبة على الدخل بمعدل $t = 10\%$، أوجد دوال الطلب الجديدة ثم حدد الكميات المثلى
6. ارسم منحى انجل للسلعة y؟

التمرين 04:

لتكن دالة المنفعة لأحد المستهلكين من الشكل: $UT = 2X + 4Y + XY + 8$، وكان قيد الميزانية: $50 = 5X + 10Y$

المطلوب:

1. أوجد الكميات التوازنية بطريقة لاغرانج التي تحقق أعظم منفعة ؟
2. تأكد من أن هذه الكميات هي فعلا المثلى؟

التمرين 05:

اذا كانت دالة المنفعة لأحد المستهلكين من الشكل: $UT = XYZ$ وكانت دالة قيد الميزانية من الشكل: $4000 = X + 2Y + 3Z$ ، أوجد دوال الطلب لهذا المستهلك؟

الخلاصة

من خلال ما تقدم يمكن القول ان نظرية سلوك المستهلك تعتمد على اسلوبين لتحليل سلوكه وهما المنفعة القياسية والمنفعة الترتيبية (منحنيات السواء)، لهذا نجد مجموعة من العوامل التي تؤثر على سلوكه وتحاول هذه النظرية الإجابة على السؤال الجوهري التالي: كيف يستطيع المستهلك ان يحصل على أقصى اشباع ممكن في حدود موارده المتاحة المحدودة.

وقد حاولنا كذلك من خلال هذا الفصل وضع مجموعة من التمارين لتسهيل فهم هذه النظرية مع حلولها كما عززنا ذلك بمجموعة من التمارين لحلها من طرف الطلبة.

الفصل الثاني

تمهيد

ان الإنتاج والتكاليف وجهتين لعملة واحدة فأي كلام على الإنتاج يقابله كلام عن التكاليف، ففي هذ الفصل، سنلقي الضوء على نظرية من أهم النظريات التي أخذت حيزا واسعا في علم الاقتصاد وهي نظرية الإنتاج، حيث سنقوم بتحليل دالة الإنتاج في المدى القصير ودالة الإنتاج في المدى الطويل وتحديد توازن المنتج، وهذا من خلال طرح مجموعة من التمارين التطبيقية وحلولها لكل الدروس مدروسة بالشرح المبسط. كما سنتطرق الى تمارين مع حلولها حول تكاليف الإنتاج في المدى القصير والمدى الطوير.

وعليه قسمنا هذا الفصل الى مبحثين:

- المبحث الأول: نظرية الإنتاج.
- المبحث الثاني: نظرية تكاليف الإنتاج.

المبحث الأول: نظرية الإنتاج

يسعى المنتج العقلاني إلى تحقيق أقصى ربح ممكن في حدود إمكانياته المتاحة المتمثل في الميزانية المخصص للإنتاج وأسعار عناصر الإنتاج السائدة في السوق، ويتحقق ذلك إما بتقليل التكاليف تحت قيد حجم الإنتاج من جهة أو تعظيم الإنتاج تحت قيد التكلفة الميزانية للوصول إلى توازن المنتج .

المطلب الأول: تمارين حول الإنتاج

من خلال هذا المطلب حاولنا وضع مجموعة من التمارين المتنوعة لتبسيط درس نظرية الانتاج للطالب

التمرين 01:

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي:

1. اهم مرحلة بالنسبة للمنتج في الفترة القصيرة هي:

أ. المرحلة الأولى ب. المرحلة الثانية ج. المرحلة الثالثة

2. TMSTعند التوازن يمثل:

أ. علاقة بين الكميات المنتجة ب. علاقة بين الإنتاجيات الحدية ج. علاقة بين الأسعار

3. عندما يصل الناتج الكلي لحده الاقصى :

أ. تكون $Pm_L = 0$ ب. يكون $Pm_L < 0$ ج. يكون $Pm_L > 0$

4. برهن جبريا على أن منحنى الناتج الحدي يقطع منحنى الناتج المتوسط عندما يصل الناتج المتوسط لحده الأقصى؟

5. عندما يتخلى المنتج على 4 وحدات من K للحصول على وحدة واحدة من L فإن:

أ. $TMST_{LK} = -4$ ب. $TMST_{LK} = \frac{-1}{4}$ ج. $TMST_{LK} = -1$

6. في نهاية المرحلة الأولى للإنتاج فإن:

أ. $PM_L = Pm_L$ ب. $MaxPM_L$ ج. $Pm_L = 0$

7. من خواص دالة كوب دوغلاس:

أ. $E_L = \alpha$ ب. $E_L = \beta$ ج. **الدالة متجانسة من الدرجة** $n = \beta + \alpha$

8. عندما ينخفض الناتج الكلي:

أ. يكون متوسط الناتج الكلي بالنسبة للعمل مساوي للصفر ب. يكون الناتج الحدي للعمل سالب

ج. يكون الناتج المتوسط للعمل سالب د. كل مما سبق

9. اذا تنازلت المؤسسة على وحدتين من راس المال نتيجة زيادة كمية العمل بوحدة واحدة للبقاء على نفس حجم الانتاج فان ، المعدل الحدي للإحلال التقني يساوي:

أ. $-\frac{1}{2}$ ب. $-\frac{1}{4}$ ج. -2 د. -1

10. TMST يمثل:

أ. علاقة بين الكميات المنتجة ب. علاقة بين الإنتاجيات الحدية

ج. علاقة بين الأسعار د. كل مما سبق

11. في نهاية المرحلة الثانية للفترة القصيرة للإنتاج:

أ. يتساوى الناتج الكلي والمتوسط ب. يكون الناتج الحدي للعمل معدوم

ج. يكون الناتج المتوسط للعمل في حده الأقصى د. كل مما سبق

12. يبلغ الإنتاج المتوسط للعمل أقصاه لما:

أ. منحنى الناتج المتوسط للعمل يقطع منحنى الناتج الحدي للعمل ب. الإنتاج الكلي للعمل في أقصاه ج. الإنتاج الحدي للعمل في أقصاه د. الإنتاج الحدي للعمل معدوم.

13. يتميز الإنتاج في المدى القصير عن الطويل بوجود:

أ. متغير واحد فقط ب. متغيرين ج. عدة متغيرات د. وجود متغير ثابت.

14. منحنى الناتج المتساوي يمثل الثنائيات التي تعطي للمنتج:

أ. نفس كمية عوامل الإنتاج ب. نفس حجم الإنتاج ج. أعظم انتاج

د. أعظم كمية لعوامل الإنتاج.

15. المسار التوسعي للمؤسسة يجمع بين نقاط التوازن عندما:

أ. تتغير الأسعار مع ثبات ميزانية المنتج ب. تتغير ميزانية المنتج مع ثبات الأسعار

ج. تتغير ميزانية المنتج والأسعار معا د. لا شيء مما سبق.

16. غلة الحجم (مردوديات السلم) ثابتة معناه ان:

أ. الكميات المنتجة ثابتة ب. الأسعار ثابتة ج. عوامل الإنتاج ثابتة

د. نسبة التغير في حجم الإنتاج مساوية لنسبة التغير في عوامل الإنتاج.

17. إذا تضاعفت ميزانية المنتج (خط التكلفة) مع ثبات الأسعار فان خط الميزانية ينزاح الى:

أ. الاعلى بشكل موازي ب. الأعلى بشكل محوري ج. الأسفل بشكل موازي

د. الأسفل بشكل محوري.

التمرين02:

يبين الجدول التالي تغيرات الانتاج الكلي تبعا لتغيرات كميات العمل المستخدمة عند مستوى معين من راس المال

K	1	1	1	1	1	1	1	1
L	1	2	3	4	5	6	7	8
Q	20	50	90	120	140	150	150	140

المطلوب:

1. احسب الناتج الحدي والمتوسط؟
2. ارسم منحنى الناتج الكلي، الحدي والمتوسط ؟
3. حدد المراحل للإنتاج حسب معطيات الجدول السابق مبينا المناطق الثلاثة للإنتاج (مع الشرح) ؟
4. متى يبدأ قانون تناقص الغلة؟ مع الشرح
5. متى تتساوى الانتاج الحدي pm_L والناتج المتوسط PM_L ؟
6. عمم هذه الحالة اذا كان الانتاج تابع لكمية العمل عند مستوى ثابت لراس المال $Q = f(L, K)$

تمرين03:

يبين الجدول التالي تغيرات الانتاج المتوسط تبعا لتغيرات كميات العمل المستخدمة:

العمل L	1	2	3	4	5	6	7	8
الانتاجية المتوسطة PML	10	12	13	13	12,2	11	9,4	8

المطلوب:

1. أحسب الانتاج الحدي، والانتاج الكلي؟
2. وأرسم الناتج الكلي والحدي والمتوسط في نفس المعلم محددا المناطق الثلاثة للإنتاج مع الشرح؟
3. أين يبدا قانون تناقص الغلة؟ لماذا يعمل المنتج في المرحلة الثانية؟
4. ما هو عدد العمال الذي يقابل اكبر حجم للإنتاج؟
5. ما هو عدد العمال الذي يقابل أكبر عدد للإنتاج الحدي؟
6. ما هو عدد العمال الذي يقابل أكبر عدد للإنتاج الحدي؟

التمرين 04:

لتكن دالة الانتاج التالية: $Q = 20(KL)^2 - (KL)^3$ حيث k راس المال و L عنصر العمل و Q حجم الانتاج الكلي، إذا كان $k = 1$:

1. ما هو حجم العمل الذي يمكن من الحصول على أكبر انتاج ممكن؟
2. ما هو حجم العمل الذي يمكن من الحصول على أكبر انتاجية متوسطة؟
3. ابتداء من أي حجم للعمل يشرع الانتاج الكلي في التزايد بمعدل متناقص؟
4. اشرح خصائص كل مرحلة مبينا قيمة العمل في كل مرة؟

التمرين 05:

لتكن دالة الانتاج المتوسط للفترة القصيرة لشركة تعمل في سوق المنافسة الحرة من الشكل:

$$\boldsymbol{PML = 40L - 4L^2}$$

1. اوجد عدد العمال التي تمكن المؤسسة من الحصول على اكبر انتاج ممكن؟
2. اوجد عدد العمال التي تمكن المؤسسة من الحصول على اكبر انتاج متوسط؟
3. ماهي المنطقة المفضلة اقتصاديا، وبين خصائص كل منطقة؟

التمرين06:

لتكن دالة الانتاج التالية: $PML = 40 + 6L - L^2$ حيث k راس المال و L عنصر العمل و Q حجم الانتاج الكلي، إذا كان $k = 1$:

1. احسب عدد العمال عند بداية قانون تناقص الغلة؟
2. احسب عدد العمال بطريقتين في نهاية المرحلة الاولى؟
3. احسب عدد العمال في نهاية المرحلة الثانية؟

التمرين 07:

إذا قدرت دالة الإنتاج لمؤسسة من الشكل التالي $\boldsymbol{Q = K^{0.6}L^{0.7}}$

- حدد الإنتاجية الحدية للعمل ورأس المال؟
- إذا كان K ثابت، أثبت أن قانون الإنتاجية الحدية المتناقصة لـ **L** محقق؟

التمرين 08:

لدينا دوال الإنتاج التالية: $\boldsymbol{Q_1 = K^{\alpha}L^{\beta}T^{\gamma}}$ ، $\boldsymbol{Q_2 = K^{0,2}L^{0,5}}$، $\boldsymbol{Q_3 = K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}}}$

- حدد طبيعة غلة الحجم بالنسبة لكل دالة؟
- احسب مرونة الإنتاج لكل عنصر من عناصر الإنتاج في الدالة Q_3 و المرونة الكلية؟

التمرين09:

لتكن لدينا دالة الانتاج التالية و هي من نوع دوال كوب دوغلاس $\boldsymbol{Q = bL^{\alpha}K^{\beta}}$ ، حيث تمثل $\boldsymbol{Q}$ كمية الانتاج ، Lو K تمثل عوامل الانتاج، b ثابت

المطلوب:

1. باي مقدار يمكن مضاعفة كمية الانتاج اذا ما ضاعفنا عوامل الانتاج مرتين، وكانت لدينا $\alpha + \beta = 2$
2. احسب المعاملات α ، β اذا علمت ان:
   - مرونة الانتاج للعمل تساوي 0،5
   - دالة الانتاج متجانسة ومن الدرجة الثانية
3. اوجد دالتي الناتج الحدي والمتوسط للعمل انطلاقا من دالة الإنتاج المحددة في السؤال الثاني؟

التمرين 10:

لتكن لدينا دالة الانتاج التالية و هي من نوع دوال كوب دوكلاس $\boldsymbol{Q = bL^{\alpha}K^{\beta}}$ ، حيث تمثل $\boldsymbol{Q}$ كمية الانتاج ، L و K تمثل عوامل الانتاج، b ثابت

3. احسب المعاملات α ، β اذا علمت ان: مرونة الانتاج للعمل تساوي 0،7 ودالة الانتاج متجانسة من الدرجة الاولى

لنفرض أن $\boldsymbol{Q = 2L^{0,7}K^{0,3}}$ وحجم ميزانية المنتج هي 400 ون، يريد انفاقها على L و K ، واسعار عوامل الانتاج هي $P_L = 5$ و $P_K = 10$

1. بأي مقدار يمكن مضاعفة الانتاج اذا ما ضعفنا عوامل الانتاج مرتين؟
2. ما هي التوليفة المثلى لهذا المنتج مستنتجا معادلة المسار التوسعي له؟
3. اوجد دوال الانتاجية المتوسطة والحدية لـ L و K ؟ وحسب قيمتها؟
4. احسب المعدل الحدي للإحلال التقني $TMST_{LK}$ عند التوازن؟
5. احسب مرونة كل عنصر انتاج وماهي مرونة الانتاج الكلية ؟

التمرين 11:

لتكن دالة الإنتاج التالية $Q = 4L^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{4}}$ وكان حجم الإنتاج الكلي $Q = 800$ وأسعار عناصر الإنتاج $P_L = 9$ و $P_K = 3$

1. هل الدالة متجانسة، وماهي درجة تجانسها وماهي المرحلة التي يمر بها الإنتاج؟
2. أوجد معادلة المسار التوسعي للمؤسسة؟ والكميات المثلى التي تقلل تكاليف الانتاج؟
3. احسب مقدار موازنة المنتج (تكاليف الإنتاج)؟

4. أوجد دوال الإنتاجية الحدية والمتوسطة للعمل ورأس المال واحسب قيمتهما؟
5. احسب المرونات الجزئية للعمل ورأس المال بطريقتين مختلفتين؟

التمرين 12:

يعطي الجدول التالي توفيقات مختلفة لأربع منحنيات الناتج المتساوي:

المنحنى1		المنحنى2		المنحنى3		المنحنى 4	
L	K	L	K	L	K	8	16
3	14	4	14	5,5	15	7	12.5
2	10	3	11	5	12	8	9
3	6	4	8	5,5	9	9	7
4	4,5	5	6,3	6	8,3	10	6.4
5	3,5	6	5	7	7	11	7
6	3	7	4,4	8	6		
7	2,7	8	4	9	5,6		
8	3	9	4,4	10	6		

1. اوجد المعدل الحدي للإحلال الفني عند كل نقطة داخل المنطقة الاقتصادية؟
2. عندما تكون منحنيات الناتج المتساوي محدبة على نفسها بين باختصار كيف نحصل على المنطقة الاقتصادية للإنتاج؟
3. ارسم منحنيات الناتج المتساوي على نفس المعلم وعين حدود المنطقة الاقتصادية للإنتاج؟ محددا مناطق الانتاج؟
4. اذا كانت اسعار عوامل الانتاج $P_L = 2$ و $P_K = 1$ ، اوجد ميل دالة التكلفة المتساوية وأعطي الصيغة الرياضية لهذه الدالة إذا كانت موازنة المنتج تقدر بـ 16 دينار؟
5. حدد نقطة توازن المنتج ؟

التمرين 13:

لتكن دالة الإنتاج من الشكل $\boldsymbol{Q = \frac{1}{2} L^{\alpha} K^{\beta} T^{\gamma}}$ حيث L كمية العمل، K رأس المال، T الأرض

1. احسب دوال الإنتاجية الحدية والمتوسطة لـ L و K؟
2. على منحنى من منحنيات الناتج المتساوي عرف $TMST_{LK}$؟
3. ماهو حجم الإنتاج الذي تعطيه التوليفة $L = 100$ و $K = 200$ اذا اعتبرنا ان $T = 2$ و $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.4}$ و $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0.4}$ و $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0.2}$ ؟
4. احسب مرونة كل من عنصر انتاج وما هي مرونة الإنتاج الكلية؟

5. قدر زيادة الإنتاج او نقصانه المتأتية من زيادة العمل بـ 10% ونقصان حجم راس المال بـ 5%؟

التمرين 14:

اذا كانت دالة الإنتاج لمؤسسة من الشكل $Q = AL^{\alpha-1}K^{\alpha}$، حيث تمثل $\boldsymbol{Q}$ كمية الانتاج، L و K تمثل عوامل الانتاج، A ثابت وكانت أسعار عوامل الانتاج P_L و P_K

1. حدد المعدل الحدي للإحلال الفني (التقني) $TMST_{LK}$ عند التوازن بدلالة α ؟
2. **اذا كانت** $A = 2$، $\alpha = 0.5$، $P_L = 1$ و $P_K = 1$، والتكلفة المخصصة للمنتج هي $CT =$ 50 ما هو مستوى الإنتاج؟

التمرين15:

تقدر دالة الإنتاج لمؤسسة ما بـ $Q = (L-1)^{\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}}$ بحيث $L \geq 1$

1. استخرج معادلة منحنى الناتج المتساوي؟
2. احسب الكميات المثلى لعناصر الإنتاج علما ان $Q = 1$ أسعار عوامل الانتاج $P_L = 1$ و $P_K = 1$ بطريقتين؟
3. احسب تكاليف الإنتاج الدنيا؟

التمرين 16:

لتكن دالة الإنتاج من الشكل كوب دوغلاس بحيث $Q = L^{0.4}K^{0.6}$ وكانت موازنة المنتج $CT = 400$ وأسعار عناصر الإنتاج $P_L = 2$ و $P_K = 4$

1. هل الدالة متجانسة، وماهي درجة تجانسها وماهي المرحلة التي يمر بها الإنتاج؟
2. أوجد معادلة المسار التوسعي للمؤسسة؟ والكميات المثلى التي تعظم الإنتاج الكلي؟
3. أوجد دوال الإنتاجية الحدية والمتوسطة واحسب قيمتها؟
4. أوجد العلاقة بين $TMST_{LK}$ وبين الإنتاجية الحدية للعمل ورأس المال؟
5. احسب $TMST_{LK}$ عند التوازن بطريقتين؟
6. احسب المرونات الجزئية للعمل ورأس المال؟

المطلب الثاني: حلول تمارين نظرية الإنتاج

من خلال هذا المطلب حاولنا وضع حلول مبسطة للتمارين السابقة التي نشرح من خلالها نظرية الانتاج

التمرين 01:

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي:

1. اهم مرحلة بالنسبة للمنتج في الفترة القصيرة هي:

أ. المرحلة الأولى **ب. المرحلة الثانية** ج. المرحلة الثالثة

2. TMSTعند التوازن يمثل:

أ. علاقة بين الكميات المنتجة **ب. علاقة بين الإنتاجيات الحدية** **ج. علاقة بين الأسعار**

3. عندما يصل الناتج الكلي لحده الأقصى تكون :

أ. $\boldsymbol{Pm_L = 0}$ ب. يكون $Pm_L < 0$ ج. يكون $Pm_L > 0$

4. برهن جبريا على أن منحنى الناتج الحدي يقطع منحنى الناتج المتوسط عندما يصل الناتج المتوسط لحده الأقصى؟

$$MaxPM_L \Rightarrow Pm_L = PM_L$$
$$MaxPM_L \Rightarrow \frac{\partial PM_L}{\partial L} = 0$$
$$\frac{\partial PM_L}{\partial L} = 0 \Rightarrow \left(\frac{Q}{L}\right)' = 0$$
$$\left(\frac{Q}{L}\right)' = 0 \Rightarrow \frac{Q'L - QL'}{L^2} = 0$$

ولدينا:

$$Pm_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = Q'$$

و

$$L' = 1$$

ومنه

$$\frac{Q'L - QL'}{L^2} = 0 \Rightarrow \frac{Pm_L L - Q}{L^2} = 0$$
$$\frac{Pm_L L - Q}{L^2} = 0 \Rightarrow Pm_L L - Q = 0$$
$$Pm_L L = Q \Rightarrow Pm_L = \frac{Q}{L} \Rightarrow Pm_L = PM_L$$

5. عندما يتخلى المنتج على 4 وحدات من K للحصول على وحدة واحدة من L فإن:

أ. $\boldsymbol{TMST_{LK} = -4}$ ب. $TMST_{LK} = \frac{-1}{4}$ ج. $TMST_{LK} = -1$

6. في نهاية المرحلة الأولى للإنتاج فإن:

أ. $\boldsymbol{PM_L = Pm_L}$ **ب.** $\boldsymbol{MaxPM_L}$ ج. $Pm_L = 0$

7. من خواص دالة كوب دوغلاس:

أ. $\boldsymbol{E_L = \alpha}$ ب. $\boldsymbol{E_L = \beta}$ **ج. الدالة متجانسة من الدرجة** $\boldsymbol{n = \beta + \alpha}$

8. عندما ينخفض الناتج الكلي:

أ. يكون متوسط الناتج الكلي بالنسبة للعمل مساوي للصفر **ب. يكون الناتج الحدي للعمل سالب**

ج. يكون الناتج المتوسط للعمل سالب د. كل مما سبق

9. اذا تنازلت المؤسسة على وحدتين من راس المال نتيجة زيادة كمية العمل بوحدة واحدة للبقاء على نفس حجم الانتاج فان، المعدل الحدي للإحلال التقني يساوي:

أ. $-\frac{1}{2}$ ب. $-\frac{1}{4}$ **ج. -2** د. -1

10. TMST يمثل:

أ. علاقة بين الكميات المنتجة ب. علاقة بين الإنتاجيات الحدية ج. علاقة بين الأسعار **د. كل مما سبق**

11. في نهاية المرحلة الثانية للفترة القصيرة للإنتاج:

أ. يتساوى الناتج الكلي والمتوسط **ب. يكون الناتج الحدي للعمل معدوم**

ج. يكون الناتج المتوسط للعمل في حده الأقصى د. كل مما سبق.

12. يبلغ الإنتاج المتوسط للعمل أقصاه لما:

أ. منحنى الناتج المتوسط للعمل يقطع منحنى الناتج الحدي للعمل ب. الإنتاج الكلي للعمل في أقصاه ج. الإنتاج الحدي للعمل في أقصاه د. الإنتاج الحدي للعمل معدوم.

13. يتميز الإنتاج في المدى القصير عن الطويل بوجود:

أ. متغير واحد فقط ب. متغيرين ج. عدة متغيرات **د. وجود على الأقل متغير ثابت.**

14. منحنى الناتج المتساوي يمثل الثنائيات التي تعطي للمنتج:

أ. نفس كمية عوامل الإنتاج **ب. نفس حجم الإنتاج** ج. أعظم انتاج

د. أعظم كمية لعوامل الإنتاج.

15. المسار التوسعي للمؤسسة يجمع بين نقاط التوازن عندما:

أ. تتغير الأسعار مع ثبات ميزانية المنتج **ب. تتغير ميزانية المنتج مع ثبات الأسعار** ج. تتغير ميزانية المنتج والأسعار معا د. لا شيء مما سبق.

16. غلة الحجم (مردوديات السلم) ثابتة معناه ان:

أ. الكميات المنتجة ثابتة ب. الأسعار ثابتة ج. عوامل الإنتاج ثابتة

د. نسبة التغير في حجم الإنتاج مساوية لنسبة التغير في عوامل الإنتاج.

17. إذا تضاعفت ميزانية المنتج (خط التكلفة) مع ثبات الأسعار فان خط الميزانية ينزاح الى:

أ. الاعلى بشكل موازي ب. الأعلى بشكل محوري ج. الأسفل بشكل موازي

د. الأسفل بشكل محوري.

التمرين 02:

الناتج الحدي:

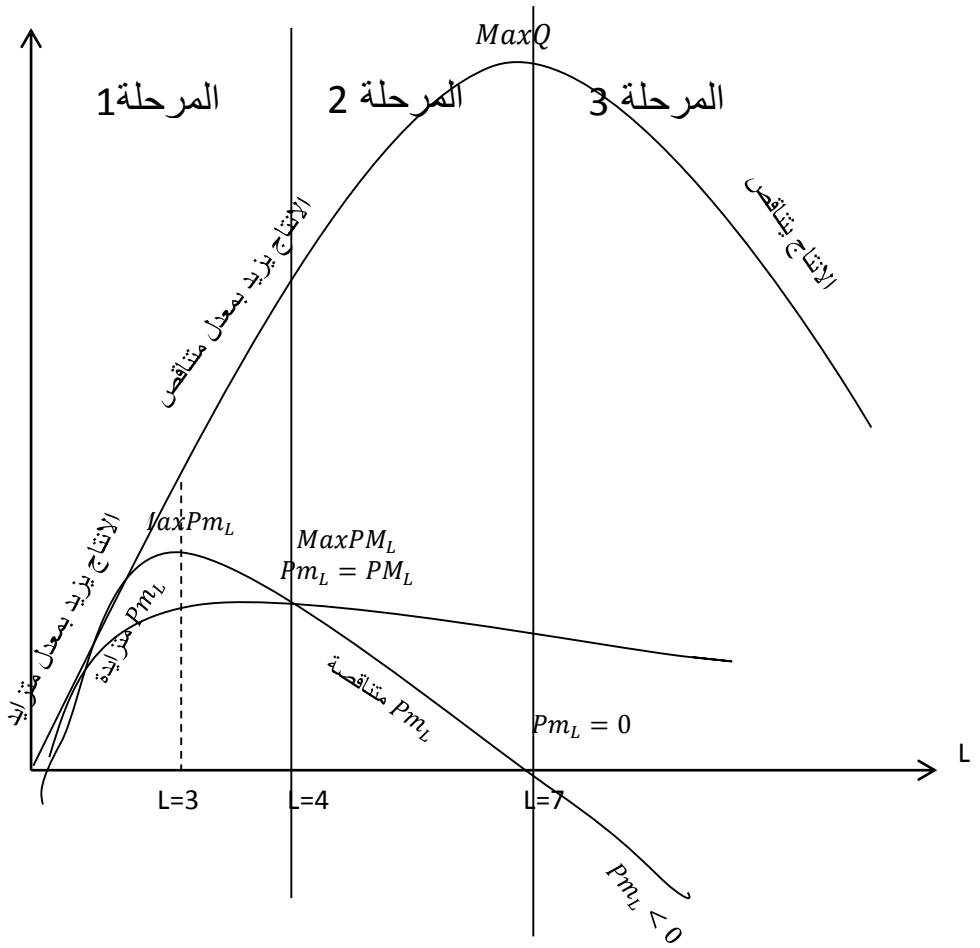
$$\boldsymbol{pm_L} = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$$

الناتج المتوسط:

$$\boldsymbol{PM_L} = \frac{Q}{L}$$

راس المال **K**	1	1	1	1	1	1	1	1
العمل **L**	1	2	3	4	5	6	7	8
الناتج الكلي $\boldsymbol{Q}$	20	50	90	120	140	150	150	140
النتاج الحدي $\boldsymbol{pm_L}$	20	30	40	30	20	10	0	−10
النتاج المتوسط $\boldsymbol{PM_L}$	20	25	30	30	28	25	21,4	17,5

التمثيل البياني:



تتساوى PM_L و Pm_L عندما يكون $L = 4$ حيث $\boldsymbol{pm_L = PM_L = 30}$

ويمكن تعميم هذه الدراسة كما يلي:

$$MaxPM_L \Rightarrow Pm_L = PM_L$$
$$MaxPM_L \Rightarrow \frac{\partial PM_L}{\partial L} = 0$$
$$\frac{\partial PM_L}{\partial L} = 0 \Rightarrow \left(\frac{Q}{L}\right)' = 0$$
$$\left(\frac{Q}{L}\right)' = 0 \Rightarrow \frac{Q'L - QL'}{L^2} = 0$$

ولدينا:

$$Pm_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = Q'$$

و

$$L' = 1$$

ومنه

$$\frac{Q'L - QL'}{L^2} = 0 \Rightarrow \frac{Pm_L L - Q}{L^2} = 0$$
$$\frac{Pm_L L - Q}{L^2} = 0 \Rightarrow Pm_L L - Q = 0$$
$$Pm_L L = Q \Rightarrow Pm_L = \frac{Q}{L} \Rightarrow Pm_L = PM_L$$

ينص قانون تناقص الغلة على أنه: عند تزايد عنصر العمل بوحدات متشابهة فإن الناتج الكلي يزيد في البداية بمعدل متزايد ثم بمعدل متناقص قبل أن يشرع في التناقص بعدما يصل لحده الأقصى، لهذا نميز 3 مراحل للإنتاج:

المرحلة 1: تبدأ من $L = 1$ إلى $L = 4$

في هذه المرحلة يزيد الانتاج الكلي بمعدل متزايد أين تكون الانتاجية الحدية متزايدة وهذا يبين أن كل وحدة مضافة من عنصر العمل تكون انتاجيتها أكبر من انتاجية العنصر الذي قبلها لكن تشرع الانتاجية الحدية في التناقص قبل نهاية هذه المرحلة حيث تصل الانتاجية الحدية إلى أقصاها $MaxPm_L$ عند $L = 3$ وهنا يبدأ قانون تناقص الغلة وتكون الانتاجية المتوسطة متزايدة كذلك، كما يكون في هذه المرحلة منحنى الناتج الحدي أعلى من منحنى الناتج المتوسط وتنتهي هذه المرحلة عند $L = 4$ أين تتساوى الانتاجية الحدية والمتوسطة $(Pm_L = PM_L)$ أين تصل الانتاجية المتوسطة لحدها الأقصى $MaxPM_L$

المرحلة 2: تبدأ من $L = 4$ إلى $L = 7$

تبدأ هذه المرحلة مع نهاية المرحلة الأولى عندما تتساوى الانتاجية الحدية مع الانتاجية المتوسطة أين تصل الانتاجية المتوسطة لحدها الأقصى عند $L = 4$ حيث يستمر الانتاج الكلي في التزايد لكن بنسب أقل فأقل وهذا ما تبينه الانتاجية الحدية التي تكون متناقصة، بحيث أن

انتاجية العامل الأخير المضاف أقل من الانتاجية الحدية للعامل الذي قبله إلى أن يصل الانتاج لحدة الأعلى $MaxQ$ أي أقصى نقطة يمكن أن يصل إليها الناتج الكلي عند $L = 7$ أين تكون الانتاجية الحدية معدومة $Pm_L = 0$. كما يكون في هذه المرحلة منحنى الناتج الحدي أقل من منحنى الناتج المتوسط.

المرحلة 3: تبدأ من $L = 7$ إلى

تبدأ من نهاية المرحلة الثانية عند $L = 7$ عندما يصل الناتج الكلي إلى أقصاه $MaxQ$ أين تنعدم الانتاجية الحدية $Pm_L = 0$ وبعدها يتناقص الانتاج الكلي وهذا ما تبينه الانتاجية الحدية التي تكون سالبة $Pm_L < 0$ فمع استمرار اضافة عنصر العمل فإن الناتج الكلي يتناقص لأنه يصبح عبئ على المؤسسة ويصبح بالنسبة لها عنصر هدم، كما يستمر في هذه المرحلة منحنى الناتج المتوسط في التناقص.

التمرين 03:

الناتج الحدي:

$$\boldsymbol{pm_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L}}$$

الناتج الكلي:

$$Q = PM_L.L$$

العمل L	1	2	3	4	5	6	7	8
الإنتاجية المتوسطة PM_L	10	12	13	13	12,2	11	9,4	8
الناتج الكليQ	10	24	39	52	61	66	66	64
النتاج الحدي pm_L	10	14	15	13	9	5	0	−2

المرحلة 1: تبدأ من $L = 1$ إلى $L = 4$

في هذه المرحلة يزيد الانتاج الكلي بمعدل متزايد أين تكون الانتاجية الحدية متزايدة وهذا يبين أن كل وحدة مضافة من عنصر العمل تكون انتاجيتها أكبر من انتاجية العنصر الذي قبلها لكن تشرع الانتاجية الحدية في التناقص قبل نهاية هذه المرحلة حيث تصل الانتاجية الحدية إلى أقصاها $MaxPm_L$ عند $L = 3$ وهنا يبدأ قانون تناقص الغلة وتكون الانتاجية المتوسطة متزايدة كذلك، كما يكون في هذه المرحلة منحنى الناتج الحدي أعلى من منحنى الناتج المتوسط وتنتهي هذه المرحلة عند $L = 4$ أين تتساوى الانتاجية الحدية والمتوسطة $(Pm_L = PM_L)$ أين تصل الانتاجية المتوسطة لحدها الأقصى $MaxPM_L$

المرحلة 2: تبدأ من $L = 4$ إلى $L = 7$

تبدأ هذه المرحلة مع نهاية المرحلة الأولى عندما تتساوى الانتاجية الحدية مع الانتاجية المتوسطة أين تصل الانتاجية المتوسطة لحدها الأقصى عند $L = 4$ حيث يستمر الانتاج الكلي في التزايد لكن بنسب أقل فأقل وهذا ما تبينه الانتاجية الحدية التي تكون متناقصة، بحيث أن انتاجية العامل الأخير المضاف أقل من الانتاجية الحدية للعامل الذي قبله إلى أن يصل الانتاج لحدة الأعلى $MaxQ$ أي أقصى نقطة يمكن أن يصل إليها الناتج الكلي عند $L = 7$ أين تكون الانتاجية الحدية معدومة $Pm_L = 0$. كما يكون في هذه المرحلة منحنى الناتج الحدي أقل من منحنى الناتج المتوسط.

المرحلة 3: تبدأ من $L = 7$ إلى

تبدأ من نهاية المرحلة الثانية عند $L = 7$ عندما يصل الناتج الكلي إلى أقصاه $MaxQ$ أين تنعدم الانتاجية الحدية $Pm_L = 0$ وبعدها يتناقص الانتاج الكلي وهذا ما تبينه الانتاجية الحدية التي تكون سالبة $Pm_L < 0$ فمع استمرار اضافة عنصر العمل فإن الناتج الكلي يتناقص لأنه يصبح عبئ على المؤسسة ويصبح بالنسبة لها عنصر هدم، كما يستمر في هذه المرحلة منحنى الناتج المتوسط في التناقص.

- يبدأ قانون تناقص الغلة عندما يصل الناتج الحدي لحده الأقصى أي $MaxPm_L$ ويكون عدد العمال $L = 4$

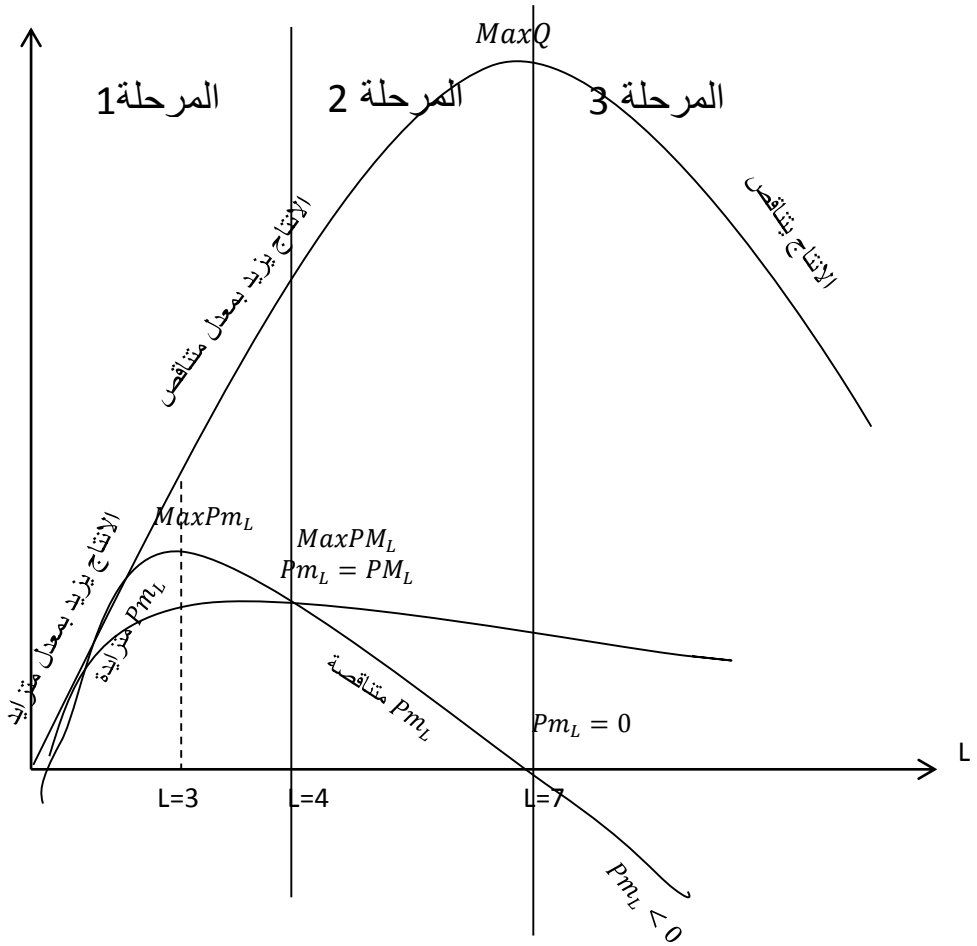
- **المرحلة المفضلة للمنتج:**

هي المرحلة الثانية أين يصل المزج بين العنصر الثابت والمتغير إلى الحالة المثلى، ففي المرحلة الأولى رغم المرحلة الأولى هي مرحلة بناء للمنتج كما أن الانتاج الكلي يزيد بمعدل متزايد حيث تكون انتاجية العنصر الأخير المضاف أكبر من انتاجية العنصر الذي قبله إلا أن المنتج مازال بحاجة لتوظيف المزيد من العنصر المتغير ليتواصل معها زيادة الانتاج الكلي.

كما انه في المرحلة الثالثة التي تعتبر مرحلة هدم للمنتج تكون انتاجية العنصر الأخير المضاف سالبة بمعنى أنى اضافة عنصر آخر يكون عبء على المؤسسة وهذا ما ينعكس على الانتاج الكلي الذي يتناقص بدوره وبالتالي فإن أحسن مرحلة بالنسبة للمنتج هي المرحلة الثانية.

- عدد العمال الذي يقابل أكبر حجم للإنتاج $L = 7$
- عدد العمال الذي يقابل أكبر عدد للإنتاج الحدي $L = 4$
- عدد العمال الذي يقابل أكبر عدد للإنتاج الحدي $L = 3$

التمثيل البياني:



تتساوى PM_L و Pm_L عندما يكون $L = 4$ حيث $\boldsymbol{pm_L = PM_L = 30}$

تمرين 04

عند $K = 1$

$$Q = 20L^2 - L^3$$

1. حجم العمل الذي يمكن من الحصول على أكبر إنتاج ممكن:

$$Pm_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = 20L - 3L^2$$

$$MaxQ \Longrightarrow Pm_L = 0 \Longrightarrow 40L - 3L^2 = L(40 - 3L) = 0$$

ومنه: إما $L = 0$ (مرفوض) **أو** $L = 13{,}33$

2. حجم العمل الذي يمكن من الحصول على أكبر إنتاجية متوسطة:

$$MaxPM_L \Longrightarrow (PM_L)' = 0$$

حساب PM_L :

$$PM_L = \frac{Q}{L} = 20L - L^2$$

وعليه:

$$(20L - L^2)' = 0 \Longrightarrow 20 - 2L = 0 \Longrightarrow L = 10$$

3. يشرع الانتاج الكلي في التزايد بمعدل متناقص عند (حجم العمل الذي يمكن من الحصول على أكبر إنتاجية حدية):

$$MaxPm_L \Longrightarrow (Pm_L)' = 0 \Longrightarrow (40L - 3L^2)' = 0$$

ومنه:

$$40 - 6L = 0 \Longrightarrow L = \frac{40}{6} \Longrightarrow L = 6{,}66$$

التمرين 05:

1. عدد العمال التي تمكن المؤسسة من الحصول على اكبر انتاج ممكن:

الناتج الكلي:

$$Q = PM_L.L \Longrightarrow Q = L(\mathbf{40L - 4L^2})$$

$$Q = \mathbf{40L^2 - 4L^3}$$

الناتج الحدي:

$$Pm_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = 80L - 12L^2$$

ومنه

$$MaxQ \Longrightarrow Pm_L = 0 \Longrightarrow 80L - 12L^2 = L(80 - 12L) = 0$$

ومنه: إما $L = 0$ (مرفوض) **أو** $L = \frac{80}{12} = 6.66$

2. حجم العمل الذي يمكن من الحصول على أكبر إنتاجية متوسطة:

$$MaxPM_L \Longrightarrow (PM_L)' = 0$$

حساب PM_L :

$$PM_L = \frac{Q}{L} = \mathbf{40L - 4L^2}$$

وعليه:

$$(\mathbf{40L - 4L^2})' = 0 \Longrightarrow 40 - 8L = 0 \Longrightarrow L = \frac{40}{8} = 5$$

3. المنطقة المفضلة للمنتج هي المنطقة الثانية. (الخصائص مبينة في التمرين السابق)

التمرين06:

1. عدد العمال عند بداية قانون تناقص الغلة

الناتج الكلي:

$$Q = PM_L.L \Longrightarrow Q = L(40 + 6L - L^2\ )$$

$$Q = \mathbf{40L} + \mathbf{6L^2} - \mathbf{L^3}$$

الناتج الحدي:

$$Pm_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = 40 + 12L - 3L^2$$

$$MaxPm_L \Longrightarrow (Pm_L)' = 0 \Longrightarrow (40 + 12L - 3L^2)' = 0$$

ومنه:

$$12 - 6L = 0 \Longrightarrow L = \frac{12}{6} \Longrightarrow L = 2$$

2. حساب عدد العمال في حدود المنطقة الاولى والثانية:

في حدود المنطقة الاولى والثانية لدينا إما: $\boldsymbol{Pm_L = PM_L}$ أو $\boldsymbol{MaxPM_L \Longrightarrow (PM_L)' = 0}$

الطريقة الأولى:

$$MaxPM_L \Longrightarrow (PM_L)' = 0 \Longrightarrow (40 + 6L - L^2)' = 0 \Longrightarrow 6 - 2L = 0$$

ومنه

$$L = \frac{6}{2} = 3$$

وعليه في حدود المنطقة الأولى والثانية فإن: $\boldsymbol{L = 3}$

الطريقة الثانية:

$$Pm_L = PM_L \implies 40 + 12L - 3L^2 = 40 + 6L - L^2$$

وبنقل الطرف الثاني إلى الأول نجد:

$$40 + 12L - 3L^2 - 40 - 6L + L^2 = 0$$

وبتبسط المعادلة نجد

$$6L - 2L^2 = 0 \Longrightarrow L(6 - 2L) = 0$$

ومنه إما $L = 0$ **(مرفوض) أو** $(6 - 2L) = 0 \Longrightarrow L = \frac{6}{2} = 3$

وعليه في حدود المنطقة الأولى والثانية فإن: $\boldsymbol{L = 3}$

حساب عدد العمال في حدود المنطقة الثانية والثالثة:

في نهاية المنطقة الثانية وبداية المنطقة الثالثة يصل الانتاج الكلي لأقصاه $\boldsymbol{MaxQ}$ أين تنعدم الانتاجية الحدية $\boldsymbol{Pm_L = 0}$ ومنه:

$$\boldsymbol{Pm_L = 0} \Longrightarrow 40 + 12L - 3L^2 = 0$$

وحل هذه المعادلة يكون بحساب المحدد وتحديد حلول هذه المعادلة:

حساب المحدد

$$\Delta = b^2 - ac \implies \Delta = (12)^2 - 4(40)(-3) = 144 + 480 = 624$$

$$\sqrt{\Delta} = 24{,}97$$

حساب الحلين:

$$L_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Longrightarrow L_1 = \frac{-12 - 24{,}97}{2(-3)} \Longrightarrow L_1 = 6{,}16$$

$$L_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Longrightarrow L_2 = \frac{-12 + 24{,}97}{2(-3)} \Longrightarrow L_2 = -2{,}16 \left(\text{مرفوض}\right)$$

وعليه فإن عدد العمال بين المنطقة الثانية والثالثة هي $L = 6{,}16 \approx 6$.

التمرين 07:

$$\mathrm{Q} = \mathrm{K}^{0.6}.\mathrm{L}^{0.7}$$

1. حساب الانتاجية الحدية:

$$\mathrm{Pm}_L = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial L} = 0.7\ \mathrm{K}^{0.6}.\mathrm{L}^{-0.3}$$

$$\mathrm{Pm}_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = 0.6K^{-0.4}L^{0.7}$$

2. تكون الانتاجية الحدية للعمل (Pm_L) متناقصة، لما تكون المشتقة الأولى لها سالبة، ومنه نقوم باشتقاق (Pm_L) بالنسبة لـ (L) كما يلي:

$$(Pm_L)' = (-0.3)(0.7)\mathrm{K}^{0.6}.\mathrm{L}^{-1.3} < 0$$

ومنه قانون تناقص المنفعة الحدية محقق.

التمرين 08:

1. تحديد طبيعة غلة الحجم:

نستعمل طريقة التجانس:

$$\boldsymbol{Q_1 = K^{\alpha} L^{\beta} T^{\gamma}}$$

عند مضاعفة عوامل الانتاج بمقدار $(\boldsymbol{\lambda})$ نجد:

$$Q_1' = (\lambda K)^{\alpha}.(\lambda L)^{\beta}.(\lambda T)^{\gamma}$$
$$Q_1' = \lambda^{\alpha} K^{\alpha} \lambda^{\beta} L^{\beta} \lambda^{\gamma} T^{\gamma}$$
$$\boldsymbol{Q_1'} = \lambda^{\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma}} Q_1$$

ومنه الدالة متجانسة من الدرجة $(n = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma})$.

وعليه نميز ثلاث حالات:

- اذا كانت $(\alpha + \beta + \gamma = 1)$: فان الانتاج يمر بمرحلة ثبات غلة الحجم.
- اذا كانت $(\alpha + \beta + \gamma > 1)$: فان الانتاج يمر بمرحلة تزايد غلة الحجم.
- اذا كانت$(\alpha + \beta + \gamma < 1)$: فان الانتاج يمر بمرحلة تناقص غلة الحجم.

$$\boldsymbol{Q_2 = K^{0,2} L^{0,5}}$$

عند مضاعفة عوامل الانتاج بمقدار $(\boldsymbol{\lambda})$ نجد:

$$Q_2' = (\lambda K)^{0.2} . (\lambda L)^{0.5}$$
$$Q_2' = \lambda^{0.2} K^{0.2} \lambda^{0.5} L^{0.5}$$
$$\boldsymbol{Q_2'} = \lambda^{0.2+0.5} Q_1 = \lambda^{0.7} Q_2$$

ومنه الدالة متجانسة من الدرجة $(n = 0.7)$، والانتاج يمر بمرحلة تناقص غلة الحجم حيث: $(n = 0.7<1)$.

$$\boldsymbol{Q_3 = K^{\frac{2}{3}} L^{\frac{1}{3}}}$$

عند مضاعفة عوامل الانتاج بمقدار $(\boldsymbol{\lambda})$ نجد:

$$Q_3' = (\lambda K)^{\frac{2}{3}} . (\lambda L)^{\frac{1}{3}}$$
$$Q_3' = \lambda^{\frac{2}{3}} K^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{1}{3}} L^{\frac{1}{3}}$$
$$\boldsymbol{Q_3'} = \lambda^{\frac{2+1}{3}} Q_3 = \lambda^1 Q_3$$
$$\boldsymbol{Q_3'} == \lambda Q_3$$

ومنه الدالة متجانسة من الدرجة الاولى، والانتاج يمر بمرحلة ثبات غلة الحجم.

2. حساب مرونة الإنتاج لكل عنصر من عناصر الإنتاج في الدالة Q_3 و المرونة الكلية:

مرونة العمل:

$$\mathrm{E}_L = \frac{\partial Q}{\partial L} . \frac{L}{Q}$$

$$\mathrm{E}_L = \frac{1}{3} K^{\frac{2}{3}} L^{\frac{-2}{3}} . \frac{L}{K^{\frac{2}{3}} L^{\frac{1}{3}}}$$

بعد الاختزال نجد:

$$\mathrm{E}_L = \frac{1}{3}L^{\frac{-2}{3}}.\frac{L}{L^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3}\frac{L^{\frac{-2+3}{3}}}{L^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3}\frac{L^{\frac{1}{3}}}{L^{\frac{1}{3}}}$$

بعد الاختزال نجد:

$$\mathrm{E}_L = \frac{1}{3}$$

حساب مرونة رأس المال:

$$E_K = \frac{\partial Q}{\partial K}\ \frac{K}{Q} = \frac{2}{3}K^{\frac{2}{3}-1}L^{\frac{1}{3}}\ \frac{K}{K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}}}$$

بالاختزال نجد:

$$E_K = \frac{2}{3}\frac{K^{-\frac{1}{3}}K}{K^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3}\frac{K^{\frac{-1+3}{3}}}{K^{\frac{2}{3}}} = 0{,}5\frac{K^{\frac{2}{3}}}{K^{\frac{2}{3}}}$$

ومنه بعد الاختزال نجد:

$$E_K = \frac{2}{3}$$

ج- المرونة الكلية:

حساب المرونة الكلية:

$$E_T = E_L + E_K = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

التمرين 09:

$$\boldsymbol{Q = bL^{\alpha}K^{\beta}}$$

عند مضاعفة عناصر الإنتاج مرتين أي $\lambda = 2$ فان:

$L' = 2L$ و $K' = 2K$

ومنه:

$$Q' = b(2L)^{\alpha}(2K)^{\beta}$$

$$Q' = b(2L)^{\alpha}(2K)^{\beta} \Rightarrow Q' = b(2^{\alpha})L^{\alpha}\left(2^{\beta}\right)K^{\beta}$$

وعليه فإن:

$$Q' = 2^{\alpha}.2^{\beta}2L^{\alpha}K^{\beta} \Rightarrow Q' = 2^{\alpha+\beta}Q$$

بما أن: $(\alpha+\beta=2)$

$$Q' = 2^2Q = 4Q$$

ومنه يمكن مضاعفة الانتاج بقدار 4 مرات.

حساب المعاملات α، β :

الدالة متجانسة من الدرجة الثانية، أي: $n = \alpha + \beta = 2$

وبما أن الدالة من الشكل كوب دوغلاس فان:

$$\begin{cases} E_L = \alpha = 0.5 \\ E_K = \beta \\ E = n = \alpha + \beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \mathbf{0.5} \\ \alpha + \beta = 2 \\ \beta = n - \alpha = 2 - 0.5 = \mathbf{1.5} \end{cases}$$

ومنه تصبح الدالة:

$$\boldsymbol{Q = bL^{0.5}K^{1.5}}$$

دوال الانتاجية الحدية والمتوسطة:

الانتاجية الحدية للعمل:

$$Pm_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \Rightarrow Pm_L = b0.5L^{-0,5}K^{1.5}$$

الانتاجية المتوسطة للعمل:

التمرين 10:

1. حساب المعاملات α، β :

بما ان الدالة هي دالة كوب دوغلاس فان:

$$E_L = \alpha = 0.7$$
$$E_K = \beta$$

والدالة متجانسة من الدرجة الأولى أي

$$n = \alpha + \beta = 1 \Longrightarrow 0.7 + \beta = 1 \Longrightarrow \beta = 1 - 0.7 = 0.3$$

ومنه $\beta = 0.3$

عند مضاعفة عناصر الإنتاج مرتين أي $\lambda = 2$ فان:

$$L' = 2L \text{ و } K' = 2K$$

و

$$Q' = 2(2L)^{0,7}(2K)^{0,3} \Rightarrow Q' = 2(2^{0,7})L^{0,7}(2^{0,3})K^{0,3}$$

وعليه فإن:

$$Q' = 2^{0,7}.2^{0,3}2L^{0,7}K^{0,3} \Rightarrow Q' = 2^{0.7+0.3}Q \Rightarrow Q' = 2Q$$

ومنه يتضاعف الإنتاج مرتين

التوليفة المثلى

تسعى دالة الهدف لتعظيم دالة الانتاج وتكتب من الشكل:

$$Max\mathcal{L} = \mathrm{F}(L,K) + \lambda(\mathrm{CT} - P_L L - P_K K)$$
$$Max\mathcal{L} = 2L^{0,7}K^{0,3} + \lambda(\ 400 - 5L - 10K)$$

وحل هذه الدالة يتمثل في:

الشرط اللازم:

ويتمثل في انعدام المشتقات الجزئية الأولى لدالة الهدف بالنسبة لجميع المتغيرات كما يلي:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0 \Rightarrow 2(0.7)L^{-0,3}K^{0,3} - 50\lambda = 0 \Longrightarrow 1.4L^{-0,3}K^{0,3} = 50\lambda \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0 \Rightarrow 2L^{0,7}(0.6)K^{-0,7} - 100\lambda = 0 \Longrightarrow 0.6L^{0,7}K^{-0,7} = 100\lambda \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow 400 - 5L - 10K = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

بقسمة $\frac{1}{2}$ نتحصل على:

$$\frac{1.4L^{-0,3}K^{0,3}}{0.6L^{0,7}K^{-0,7}} = \frac{5\lambda}{10\lambda}$$

وبالاختزال نحصل على:

$$\frac{7L^{-0,3}K^{0,3}}{3L^{0,7}K^{-0,7}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{7K}{3L} = \frac{1}{2}$$

ومنه معادلة المسار التوسعي للمؤسسة هي:

$$K = \frac{3L}{14} \cdots\cdots\cdots (4)$$

وبتعويض (4) في (3) نحصل على:

$$400 - 5L - 10\left(\frac{3L}{14}\right) = 0$$

وبالاختزال نحصل على:

$$400 - 5L - \frac{30L}{14} = 0 \Rightarrow 400 - \frac{70}{14}L - \frac{30L}{14} = 0$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على:

$$400 - \frac{100}{14}L = 0$$

ومنه

$$L = \frac{5600}{100} = 56$$

وبتعويض قيمة L في (4) نجد:

$$K = \frac{3(56)}{14} = 12$$

دوال الانتاجية الحدية والمتوسطة:

الانتاجية الحدية للعمل:

$$Pm_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \Rightarrow Pm_L = 1.4K^{0,3}L^{-0,3} = 1.4(56^{-0.3})(12^{0.3}) = 0.88$$

الانتاجية المتوسطة للعمل:

$$PM_L = \frac{Q}{L} \Rightarrow PM_L = 2K^{0,3}L^{-0,3} = 2(56^{-0.3})(12^{0.3}) = 1.26$$

الانتاجية الحدية لرأس المال:

$$Pm_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \Rightarrow Pm_K = 0.6K^{-0,7}L^{0,7} = 0.6(12^{-0.7})(56^{0.7}) = 6.18$$

الانتاجية المتوسطة لراس المال:

$$PM_K = \frac{Q}{K} \Rightarrow PM_K = 2K^{-0,7}L^{0,7} = 2(12^{-0.7})(56^{0.7}) = 5.87$$

حساب حجم المعدل الحدي للإحلال:

$$TMST_{L,K} = -\frac{P_L}{P_K} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$$

حساب قيمة المرونة الكلية:

بما ان الدالة هي دالة كوب دوغلاس فان:

$$E_L = \alpha = 0.7$$
$$E_K = \beta = 0.3$$

بما أن الدالة ذات متغيرين فالمرونة الكلية تساوي مجموع المرونات الجزئية:

$$E_T = E_L + E_K = 0.7 + 0.3 = 1$$

التمرين 11:

تكون الدالة متجانسة إذا تحقق ما يلي:

عند تضاعف عناصر الانتاج بمقدار λ فإن:

$$L' = \lambda L \text{ و } K' = \lambda K$$

و

$$Q' = 4(\lambda L)^{\frac{3}{4}}(\lambda K)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow Q' = 4\lambda^{\frac{3}{4}}L^{\frac{3}{4}}\lambda^{\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}}$$

وعليه فإن:

$$Q' = \lambda^{\frac{3}{4}}\lambda^{\frac{1}{4}}4L^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{4}} \Rightarrow Q' = \lambda^{3+1}Q \Rightarrow Q' = \lambda Q$$

الدالة متجانسة من الدرجة الأولى $n = 1$ والإنتاج يمر بمرحلة ثبات غلة الحجم.

$$Min\mathcal{L} = Min\left(LP_L + KP_K + \cdots + nP_n + \lambda\left(Q_0 - F(L, K, \ldots\ldots\ldots\ldots, n)\right)\right)$$

$$Min\mathcal{L} = 9L + 3K + \lambda\left(800 - 4L^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{4}}\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0 \Rightarrow 9 - \lambda 3L^{-\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0 \Rightarrow 3 - \lambda L^{\frac{3}{4}} K^{-\frac{3}{4}} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow 800 - 4L^{\frac{3}{4}} K^{\frac{1}{4}} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

بقسمة (1) على (2) نجد:

$$\frac{\lambda 3 L^{-\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{4}}}{\lambda L^{\frac{3}{4}} K^{-\frac{3}{4}}} = \frac{9}{3}$$

بالاختزال نجد معادلة المسار التوسعي للمؤسسة:

$$\frac{3K^{\frac{1}{4}} K^{\frac{3}{4}}}{L^{\frac{3}{4}} L^{\frac{1}{4}}} = 3 \Longrightarrow 3K = 3L \Longrightarrow K = L \cdots\cdots (4)$$

وبتعويض (4) في (3) نجد:

$$800 - L^{\frac{3}{4}} K^{\frac{1}{4}} = 0 \Longrightarrow 800 - 4L^{\frac{3}{4}} L^{\frac{1}{4}} = 0 \Longrightarrow 4L = 800 \Longrightarrow L = \frac{800}{4} = 200$$

ومنه:

$$L = K = 200$$

وبالتالي الموازنة المخصصة للإنتاج هي:

$$CT = LP_L + KP_K \Longrightarrow CT = 9L + 3K \Longrightarrow CT = 1800 + 1200 = 3000$$

دوال الانتاجية الحدية والمتوسطة:

الانتاجية الحدية للعمل:

$$Pm_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \Rightarrow Pm_L = 3L^{-\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{4}}$$

الانتاجية المتوسطة للعمل:

$$PM_L = \frac{Q}{L} \Rightarrow PM_L = \frac{4L^{\frac{3}{4}} K^{\frac{1}{4}}}{L} = 4L^{-\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{4}}$$

الانتاجية الحدية لرأس المال:

$$Pm_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \Rightarrow Pm_K = L^{\frac{3}{4}} K^{-\frac{3}{4}}$$

الانتاجية المتوسطة لراس المال:

$$PM_K = \frac{Q}{K} \Rightarrow PM_K = \frac{4L^{\frac{3}{4}} K^{\frac{1}{4}}}{K} = 4L^{\frac{3}{4}} K^{-\frac{3}{4}}$$

حساب المرونات :

حساب مرونة العمل:

ط1:

$$E_L = \frac{\partial Q}{\partial L}\ \frac{L}{Q} = 3L^{-\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}}\ \ \frac{L}{4L^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{4}}}$$

بالاختزال نجد:

$$E_L = \frac{3L^{-\frac{1}{4}}L}{4L^{\frac{3}{4}}} = \frac{3L^{-\frac{1}{4}+1}}{4L^{\frac{3}{4}}} = \frac{3L^{-\frac{1}{4}+\frac{4}{4}}}{4L^{\frac{3}{4}}} = \frac{3L^{\frac{3}{4}}}{4L^{\frac{3}{4}}} = \frac{3}{4}$$

ومنه:

$$E_L = \frac{3}{4}$$

ط2:

$$E_L = \frac{Pm_L}{PM_L} = \frac{3L^{-\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}}}{4L^{-\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}}} = \frac{3}{4}$$

ومنه:

$$E_L = \frac{3}{4}$$

حساب مرونة رأس المال:

ط1:

$$E_K = \frac{\partial Q}{\partial K}\ \frac{K}{Q} = L^{\frac{3}{4}}K^{-\frac{3}{4}}\ \ \frac{K}{4L^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{4}}}$$

بالاختزال نجد:

$$E_K = \frac{K^{-\frac{3}{4}}K}{4K^{\frac{1}{4}}} = \frac{K^{-\frac{3+4}{4}}}{4K^{\frac{1}{4}}} = \frac{K^{\frac{1}{4}}}{4K^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{4}$$

ومنه:

$$E_K = \frac{1}{4}$$

ط2:

$$E_K = \frac{Pm_K}{PM_K} = \frac{L^{\frac{3}{4}}K^{-\frac{3}{4}}}{4L^{\frac{3}{4}}K^{-\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4}$$

ومنه:

$$E_K = \frac{1}{4}$$

حساب المرونة الكلية:

$$E_T = E_L + E_K = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

التمرين 12:

يحسب $TMST_{LK}$ بالعلاقة التالية:

$$TMST_{LK} = \frac{\Delta K}{\Delta L} = \frac{K_2 - K_1}{L_2 - L_1}$$

المنحنى1			المنحنى2			المنحنى3		
L	K	TMST1	L	K	TMST2	L	K	TMST3
3	14	*	4	14	*	5,5	15	*
2	10	*	3	11	*	5	12	*
3	6	−4	4	8	−3	5,5	9	−6
4	4,5	−1,5	5	6,3	−1,7	6	8,3	−1,4
5	3,5	−1	6	5	−1,3	7	7	−1,3
6	3	−0,5	7	4,4	−0,6	8	6	−1
7	2,7	−0,3	8	4	−0,4	9	5,6	−0 ,4
8	3	*	9	4,4	*	10	6	*

عندما تكون منحنيات الناتج المتساوي محدبة على نفسها فان المنطقة الاقتصادية للإنتاج تكون هي منطقة الفعالية لعناصر الإنتاج حيث:

- يكون ميل المنحنى سالب؛
- تكون عملية الاحلال ممكنة بين عناصر الإنتاج؛
- الميل الحدي للاحلال الفني ذو إشارة سالبة.

المنطقة الاقتصادية هي منطقة فعالية عوامل الانتاج بحيث يكون معدل الإحلال التقني $TMST_{L,K}$ داخل المنطقة الاقتصادية سالب

$$TMST_{L,K} = \frac{\Delta K}{\Delta L} = \frac{K_2 - K_1}{L_2 - L_1} < 0$$

كما تكون الانتاجية الحدية لعوامل الانتاج موجبة بمعنى:

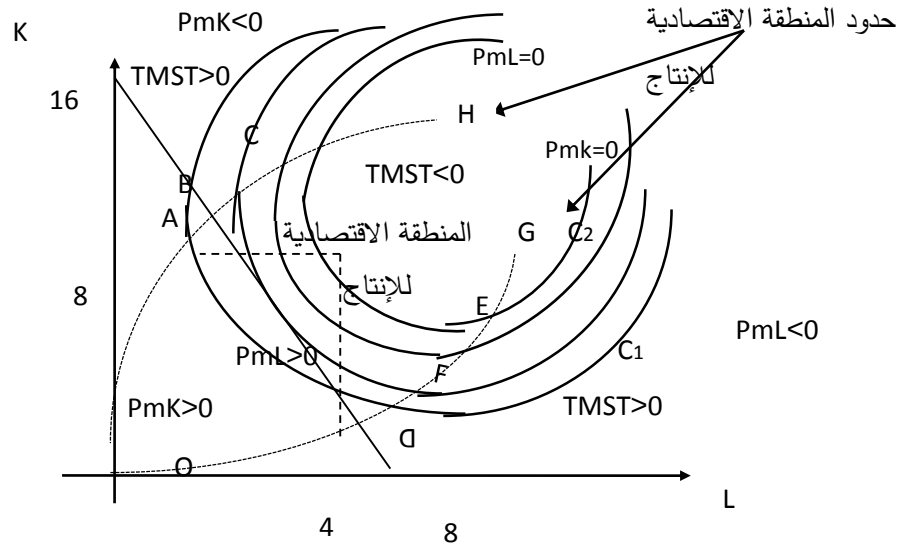
$Pm_L > 0$ و $Pm_k > 0$ عند الانتقال من أعلى منحنى السواء إلى الأسفل فإن المنتج سينقص من استعمال عنصر الانتاج K ويزيد من استعمال عنصر الانتاج العمل للبقاء على نفس مستوى الانتاج.

وعند الانتقال من الاسفل إلى الأعلى داخل المنطقة الاقتصادية فإنه سينقص من استعمال عنصر الانتاج L ويزيد من استعمال عنصر رأس المال للبقاء على نفس مستوى الانتاج. وبمعنى آخر فإن زيادة أي عنصر انتاجي معناه أن العنصر الانتاجي الآخر سوف ينقص.

كما يمكن أن تكون منحنيات الناتج المتساوي ذات ميل موجب عند انحنائها جهة الخلف أي خارج المنطقة الاقتصادية وفي الشكل الموالي، فإن المنطقة الاقتصادية هي المتواجدة بين OH و OG

وبالتالي فخارج المنطقة الاقتصادية فإن زيادة أي عنصر انتاجي يتطلب زيادة العنصر الآخر للبقاء على نفس مستوى الانتاج وهذا ما يجعل الانتاجية الحدية لأحد عناصر الانتاج تكون سالبة.

المنطقة الاقتصادية للإنتاج



فعلى يمين OG فإن المعدل الحدي للإحلال التقني يكون موجب تماما $TMST > 0$ ، والانتاجية الحدية لعنصر العمل تكون سالبة $Pm_L < 0$ فعند زيادة عنصر العمل فإن رأس المال يكون ثابت وبالتالي فإن تغير الانتاج سيكون بمتغير واحد فقط هو العمل وبما أن المنتج شخص عقلاني ورشيد سيستعمل عمال أكثر مع بقاء رأس المال ثابت والانتاج كذلك لهذا سينخفض إلى مستوى انتاجي أقل. وبالرجوع إلى تغيرات الانتاج في الفترة القصيرة فإن المنتج مع تغير عنصر العمل وثبات رأس المال وثبات الانتاج؛ فإنه لو زاد وحدة واحدة من عنصر العمل L فالإنتاج الكلي سينقص وينتقل المنتج إلى المرحلة الثالثة.

أما على يسار OG فإن كل زيادة في K تؤدي إلى التقليل من L مع المحافظة على نفس مستوى الانتاج بمعنى أن المعدل الحدي للإحلال التقني يكون سالب $TMST < 0$.

ويصل خط OG النقاط D وE و F حيث عند هذه النقاط يساوي ميل منحنى الناتج المتساوي الصفر $TMST = 0$ (لأن هناك مماس أفقي عند منحنيات الناتج المتساوي).

ويصل خط OH النقاط A و B و C فعند هذه النقاط يكون منحنى الناتج المتساوي مساوي إلى مالانهاية (مماس عمودي) $TMST = \infty$.

وعلى يسار OH خارج المنطقة الاقتصادية فإن كل زيادة في K مع ثبات عنصر العمل L وثبات الانتاج، فإن الانتاج سينخفض إلى مستوى انتاج أقل وبالرجوع إلى تغيرات الانتاج في الفترة القصيرة أين يكون عنصر رأس المال متغير والعمل ثابت، فأنه لو زاد المنتج وحدة واحدة من راس

المال K فإن الانتاج الكلي سينخفض وينتقل المنتج غلى المرحلة الثالثة من الانتاج في الفترة القصيرة حيث الانتاجية الحدية لعنصر راس المال تكون سالبة $Pm_K < 0$.

وعلى حدود المنطقة الاقتصادية عند OH و OG فإن الانتاجية الحدية تكون معدومة $Pm_L = 0$ و $Pm_K = 0$.

اذا كانت اسعار عوامل الانتاج $P_L = 2$ و $P_K = 1$ ، اوجد ميل دالة التكلفة المتساوية وأعطي الصيغة الرياضية لهذه الدالة إذا كانت موازنة المنتج تقدر بـ 16 دينار:

ميل خط التكلفة المتساوية:

$$-\frac{P_L}{P_K} = -\frac{2}{1} = -2$$

معادلة خط التكلفة المتساوية:

$$16 = 2\mathrm{L} + \mathrm{K}$$

التمثيل البياني لخط التكلفة:

نفرض أن $\mathrm{L} = 0$: $\mathrm{K} = \frac{16}{1} = 16$

ونفرض أن $\mathrm{K} = 0$: $\mathrm{L} = \frac{16}{2} = 8$

وبتمثيل خط التكلفة بيانيا نحصل على النقطة التوازنية على منحنى الناتج المتساوي الثاني:

$$(\mathbf{4}, \mathbf{8})$$

التمرين 13:

1. دوال الانتاجية الحدية والمتوسطة:

الانتاجية الحدية للعمل:

$$Pm_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \Rightarrow Pm_L = \frac{\alpha}{2} L^{\alpha-1} K^{\beta} T^{\gamma}$$

الانتاجية المتوسطة للعمل:

$$PM_L = \frac{Q}{L} \Rightarrow PM_L = \frac{1}{2} L^{\alpha-1} K^{\beta} T^{\gamma}$$

الانتاجية الحدية لرأس المال:

$$Pm_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \Rightarrow Pm_K = \frac{\beta}{2} L^{\alpha} K^{\beta-1} T^{\gamma}$$

الانتاجية المتوسطة لراس المال:

$$PM_K = \frac{Q}{K} \Rightarrow PM_K = \frac{1}{2} L^{\alpha} K^{\beta-1} T^{\gamma}$$

2. دالة منحنى الناتج المتساوي هي:

$$K^{\beta} = \frac{Q}{\frac{1}{2}L^{\alpha}T^{\gamma}} \Longrightarrow K = \left[\frac{Q}{\frac{1}{2}L^{\alpha}T^{\gamma}}\right]^{\frac{1}{\beta}} = \left[\frac{2Q}{L^{\alpha}T^{\gamma}}\right]^{\frac{1}{\beta}} = \left[\frac{2Q}{T^{\gamma}}\right]^{\frac{1}{\beta}}\left[\frac{1}{L^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\beta}}$$

$$\Longrightarrow K = \left[\frac{2Q}{T^{\gamma}}\right]^{\frac{1}{\beta}} \boldsymbol{L^{-\frac{\alpha}{\beta}}}$$

نشتق K بالنسبة لـ L نجد المعدل الحدي للإحلال الفني $TMST_{L,K}$:

$$TMST_{L,K} = \frac{\partial K}{\partial L} = \left[\frac{2Q}{T^{\gamma}}\right]^{\frac{1}{\beta}}\left(-\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}\right)\boldsymbol{L^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}}$$

3. حجم الإنتاج الكلي:

$$\boldsymbol{Q = \frac{1}{2}(100)^{0.4}(200)^{0.4}(2)^{0.2} = 30.17}$$

حساب المرونات :

حساب مرونة العمل:

$$E_L = \frac{Pm_L}{PM_L} = \frac{\frac{\alpha}{2}L^{\alpha-1}K^{\beta}T^{\gamma}}{\frac{1}{2}L^{\alpha-1}K^{\beta}T^{\gamma}} = \alpha = 0.4$$

ومنه:

$$E_L = 0.4$$

حساب مرونة رأس المال:

$$E_K = \frac{Pm_K}{PM_K} = \frac{\frac{\beta}{2}L^{\alpha}K^{\beta-1}T^{\gamma}}{\frac{1}{2}L^{\alpha}K^{\beta-1}T^{\gamma}} = \beta = 0.4$$

ومنه:

$$E_K = 0.4$$

حساب المرونة الكلية:

$$E_T = E_L + E_K = 0.4 + 0.4 = 0.8$$

قدر زيادة الانتاج او نقصانه المتأتية من زيادة العمل بـ 10% ونقصان حجم راس المال بـ 5%:

من خلال قانون المرونات الجزئية لدينا:

$$E_L = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta L}{L}} = \frac{\Delta Q}{\Delta L}\ \frac{L}{Q}$$

$$E_K = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta K}{K}} = \frac{\partial Q}{\partial K}\ \frac{K}{Q}$$

بحيث زيادة العمل بـ 10% معناه:

$$\frac{\Delta L}{L} = 10\%$$

ومنه نسبة زيادة الانتاج $\frac{\Delta Q}{Q}$ المتأتية من زيادة العمل بـ 10% تحسب كما يلي:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = E_L \cdot \frac{\Delta L}{L} \Longrightarrow \frac{\Delta Q}{Q} = (0{,}4)(10\%) \Longrightarrow \frac{\Delta Q}{Q} = 4\%$$

ومنه فإنتاج يزيد بـ 4% عند زيادة العمل بـ 10%

نقصان العمل بـ 5% معناه:

$$\frac{\Delta K}{K} = -5\%$$

ومنه نسبة زيادة الانتاج $\frac{\Delta Q}{Q}$ المتأتية من نقصان رأس المال بـ 5% تحسب كما يلي:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = E_L \cdot \frac{\Delta K}{K} \Longrightarrow \frac{\Delta Q}{Q} = (0{,}4)(-5\%) \Longrightarrow \frac{\Delta Q}{Q} = -2\%$$

والتغير الحاصل في الانتاج الكلي المتأتي من زيادة العمل بـ 10% ونقصان رأس المال بـ 5% يحسب كما يلي:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \left(\frac{\Delta Q}{Q}\right)_L + \left(\frac{\Delta Q}{Q}\right)_K = 4\% - 2\% = 2\%$$

التمرين 14:

1. حساب $TMST$ عند التوازن بدلالة α:

$$Pm_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = (\alpha - 1)AL^{-\alpha}K^{\alpha}$$

$$Pm_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha AL^{\alpha-1}K^{\alpha-1}$$

$$TMST = -\frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{(\alpha-1)AL^{-\alpha}K^{\alpha}}{\alpha AL^{\alpha-1}K^{\alpha-1}} = \frac{(\alpha-1)K^{\alpha}K^{-\alpha+1}}{\alpha L^{\alpha-1}L^{\alpha}} = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\frac{K^{\alpha-\alpha+1}}{L^{\alpha-1+\alpha}}$$

$$TMST = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\frac{K}{L}$$

2. تكتب دالة الإنتاج كما يلي: $Q = 2L^{0,5}K^{0,5}$

تسعى دالة الهدف لتعظيم دالة الانتاج وتكتب من الشكل:

$$Max\mathcal{L} = \mathrm{F}(L,K) + \lambda(\mathrm{CT} - P_L L - P_K K)$$
$$Max\mathcal{L} = 2L^{0,5}K^{0,5} + \lambda(\ 50 - L - K)$$

وحل هذه الدالة يتمثل في:

الشرط اللازم:

ويتمثل في انعدام المشتقات الجزئية الأولى لدالة الهدف بالنسبة لجميع المتغيرات كما يلي:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0 \Rightarrow L^{-0,5}K^{0,5} - \lambda = 0 \Longrightarrow L^{-0,5}K^{0,5} = \lambda \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0 \Rightarrow L^{0,5}K^{-0,5} - \lambda = 0 \Longrightarrow L^{0,5}K^{-0,5} = \lambda \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow 50 - L - K = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

بقسمة $\frac{1}{2}$ نتحصل على:

$$\frac{L^{-0,5}K^{0,5}}{L^{0,5}K^{-0,5}} = \frac{\lambda}{\lambda}$$

وبالاختزال نحصل على:

$$\frac{L^{-0,5}K^{0,5}}{L^{0,5}K^{-0,5}} = 1 \Rightarrow \frac{K^{0,5}K^{-0,5}}{L^{-0,5}L^{0,5}}\frac{K}{L} = 1$$

ومنه معادلة المسار التوسعي للمؤسسة هو:

$$K = L \cdots\cdots\cdots (4)$$

وبتعويض (4) في (3) نحصل على:

$$50 - L - L = 0 \Longrightarrow 2L = 50 \Longrightarrow L = \frac{50}{2} = 25$$

ومنه

$$L = 25$$

وبتعويض قيمة L في (4) نجد:

$$K = L = 25$$

3. حساب حجم الانتاج الكلي:

$$Q = 2L^{0,5}K^{0,5} \Rightarrow Q = 2(25^{0,5})(25^{0,5}) = 50$$

التمرين 15:

تقدر دالة الإنتاج لمؤسسة ما بـ $Q = (L-1)^{\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}}$ بحيث $L \geq 1$

1. استخرج معادلة منحنى الناتج المتساوي ؟
2. احسب الكميات المثلى لعناصر الإنتاج علما ان $Q = 1$ أسعار عوامل الانتاج $P_L = 1$ و $P_K = 1$ بطريقتين؟
3. احسب تكاليف الإنتاج الدنيا؟

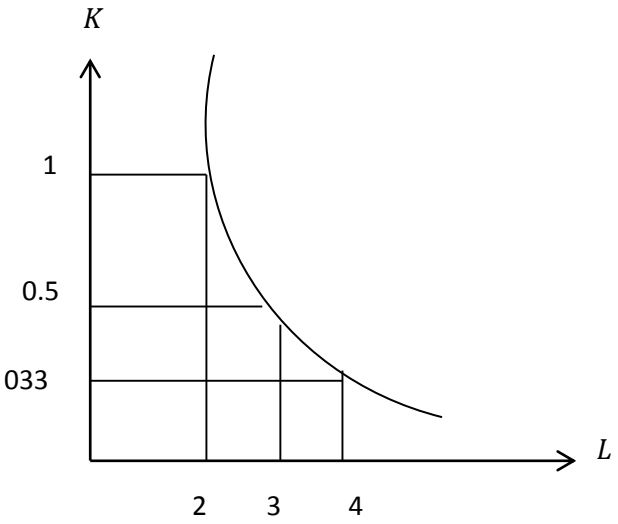
استخراج معادلة منحنى الناتج المتساوي:

$$Q = (L-1)^{\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}} = 1 \Longrightarrow (L-1)^{\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}} = 1 \Longrightarrow K^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{(L-1)^{\frac{1}{4}}} \Longrightarrow K^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{L-1}\right)^{\frac{1}{4}} \Longrightarrow$$
$$K = \frac{1}{L-1}$$

رسم منحنى الناتج المتساوي: لرسم منحنى الناتج المتساوي نفرض قيم لـ $L \geq 1$ ونعوضها في المعادلة $K = \frac{1}{L-1}$ ونجد قيمة K

منحنى الناتج المتساوي

K	L
1	2
0.5	3
1/3	4
0.25	5



ايجاد الكميات التوازنية:

$$Min\mathcal{L} = Min\left(LP_L + KP_K + \lambda\big(Q_0 - F(L,K)\big)\right)$$

$$Min\mathcal{L} = L + K + \lambda\left(1 - (L-1)^{\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}}\right)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial L} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{4}\lambda(L-1)^{-\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{4}} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial K} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{4}\lambda(L-1)^{\frac{1}{4}}K^{-\frac{3}{4}} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow 1 - (L-1)^{\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

بقسمة (1) على (2) نجد:

$$\frac{\frac{1}{4}\lambda(L-1)^{-\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}\lambda(L-1)^{\frac{1}{4}}K^{-\frac{3}{4}}} = \frac{1}{1}$$

بالاختزال نجد:

$$\frac{K}{L-1} = 1 \Rightarrow K = (L-1) \cdots\cdots (4)$$

وبتعويض (4) في (3) نجد:

$$1 - (L-1)^{\frac{1}{4}}(L-1)^{\frac{1}{4}} = 0 \Rightarrow 1 - (L-1)^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow (L-1)^{\frac{1}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow (L-1)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (L-1) = 1 \Rightarrow L = 2$$

ومنه:

$$L = 2$$

وعليه:

$$K = L - 1 = 1$$

وبالتالي الموازنة المخصصة للإنتاج هي:

$$CT = LP_L + KP_K \Longrightarrow CT = L + K \Longrightarrow CT = 2 + 1 = 3$$

ط2.

$$TMST = -\frac{Pm_L}{Pm_K} = -\frac{P_L}{P_K} = -\frac{1}{1} = -1 \dots\dots\dots\dots 1$$

$$TMST = \frac{\partial K}{\partial L}$$

$$(L-1)^{\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}} = 1 \Longrightarrow K = \frac{1}{L-1}$$

$$\frac{\partial K}{\partial L} = \frac{1'(L-1) - (L-1)'1}{(L-1)^2} = \frac{-1}{(L-1)^2} \dots\dots\dots\dots 2$$

ومنه:

$$TMST = \frac{\partial K}{\partial L} = -\frac{Pm_L}{Pm_K} = -\frac{P_L}{P_K} = -\frac{1}{1} = -1$$

من 1و2 نجد:

$$\frac{-1}{(L-1)^2} = -1 \Longrightarrow 1 = (L-1)^2 \Longrightarrow 1^2 = (L-1)^2 \Longrightarrow 1 = (L-1) \Longrightarrow L = 2$$

$$K = \frac{1}{L-1} \Longrightarrow K = \frac{1}{2-1} = 1$$

ومنه:

$$L = 2 \text{و} K = 1$$

التمرين 16:

1. تكون الدالة متجانسة إذا تحقق ما يلي:

عند تضاعف عناصر الانتاج بمقدار λ فإن:

$$L' = \lambda L \text{ و } K' = \lambda K$$

و

$$Q' = 10(\lambda L)^{0,4}(\lambda K)^{0,6} \Rightarrow Q' = 10\lambda^{0,4}L^{0,4}\lambda^{0,6}K^{0,6}$$

وعليه فإن:

$$Q' = \lambda^{0,4}\lambda^{0,6}10L^{0,4}K^{0,6} \Rightarrow Q' = \lambda Q^{04+06} \Longrightarrow Q' = \lambda Q$$

الدالة متجانسة من الدرجة الأولى $n = 1$ والإنتاج يمر بمرحلة ثبات غلة الحجم.

2. تسعى دالة الهدف لتعظيم دالة الانتاج وتكتب من الشكل:

$$Max\mathcal{L} = \mathrm{F}(L,K) + \lambda(\mathrm{CT} - P_L L - P_K K)$$
$$Max\mathcal{L} = 10L^{0.4}K^{0.6} + \lambda(\ 400 - 2L - 4K)$$

وحل هذه الدالة يتمثل في:

الشرط اللازم:

ويتمثل في انعدام المشتقات الجزئية الأولى لدالة الهدف بالنسبة لجميع المتغيرات كما يلي:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0 \Rightarrow 4L^{-0,6}K^{0,6} - 2\lambda = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0 \Rightarrow 6L^{0,4}K^{-0,4} - 4\lambda = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow 400 - 2L - 4K = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

بقسمة $\frac{1}{2}$ نتحصل على:

$$\frac{4L^{-0,6}K^{0,6}}{6L^{0,4}K^{-0,4}} = \frac{2\lambda}{4\lambda}$$

وبالاختزال نحصل على:

$$\frac{2K^{0,6}K^{0,4}}{3L^{0,6}L^{0,4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2K}{3L} = \frac{1}{2}$$

ومنه معادلة المسار التوسعي للمؤسسة هو:

$$K = \frac{3L}{4} \cdots\cdots (4)$$

وبتعويض (4) في (3) نحصل على:

$$400 - 2L - 4\left(\frac{3L}{4}\right) = 0$$

وبالاختزال نحصل على:

$$400 - 2L - 3L = 0 \Rightarrow 400 - 5L = 0 \Longrightarrow L = \frac{400}{5} \Longrightarrow L = 80$$

وبتعويض قيمة L في (4) نجد:

$$K = \frac{3(80)}{4} = 60$$

دوال الانتاجية الحدية والمتوسطة:

الانتاجية الحدية للعمل:

$$Pm_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \Rightarrow Pm_L = 4L^{-0,6}K^{0,6} = 4(80^{-0,6})(60^{0,6}) = 3.36$$

الانتاجية المتوسطة للعمل:

$$PM_L = \frac{Q}{L} \Rightarrow PM_L = 10L^{-0,6}K^{0,6} = 10(80^{-0,6})(60^{0,6}) = 8.41$$

الانتاجية الحدية لرأس المال:

$$Pm_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \Rightarrow Pm_K = 6L^{0,4}K^{-0,4} = 6(80^{0,4})(60^{-0,4}) = 6.73$$

الانتاجية المتوسطة لراس المال:

$$PM_K = \frac{Q}{K} \Rightarrow PM_K = 10L^{0,4}K^{-0,4} = 10(80^{0,4})(60^{-0,4}) = 11.21$$

حساب حجم المعدل الحدي للإحلال:

ط1:

$$TMST_{L,K} = -\frac{P_L}{P_K} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

ط2:

$$TMST_{L,K} = -\frac{Pm_L}{Pm_K} = -\frac{3.36}{6.73} = 0.5$$

حساب قيمة المرونة الكلية:

بما أن الدالة ذات متغيرين فالمرونة الكلية تساوي مجموع المرونات الجزئية:

$$E_T = E_L + E_K$$

حساب مرونة العمل:

$$E_L = \frac{Pm_L}{PM_L} = \frac{3.36}{8.41} = 0.4$$

ومنه:

$$E_L = 0.4$$

حساب مرونة رأس المال:

$$E_K = \frac{Pm_K}{PM_K} = \frac{6.73}{11.21} = 0.6$$

ومنه:

$$E_K = 0.6$$

حساب المرونة الكلية:

$$E_T = E_L + E_K = 0{,}4 + 0{,}6 = 1$$

تغيرات الانتاج:

بما أن $E_T = 1$ فإن الانتاج يمر بمرحلة ثبات غلة الحجم.

العلاقة بين $TMST_{L,K}$ والمرونات الجزئية:

لدينا:

$$TMST_{L,K} = -\frac{Pm_L}{Pm_K}$$

و

$$E_L = \frac{Pm_L}{PM_L} \Rightarrow Pm_L = E_L \cdot PM_L$$

و

$$E_K = \frac{Pm_K}{PM_K} \Rightarrow Pm_K = E_K \cdot PM_K$$

وبالتعويض في $TM_{L,K}$ نجد:

$$TMST_{L,K} = -\frac{E_L \cdot PM_L}{E_K \cdot PM_K}$$

المطلب الثالث: تمارين للحل حول نظرية الإنتاج

فيما يلي مجموعة من التمارين للحل لتطبيق ما جاء في التمارين السابقة

التمرين 01:

يبين الجدول التالي تغيرات الانتاج الكلي تبعا لتغيرات كميات العمل المستخدمة عند مستوى معين من راس المال

K	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Q	8	20	36	60	90	108	112	112	108	100	88

المطلوب:

1. احسب الانتاج الحدي والمتوسط؟
2. ارسم منحنى الانتاج الحدي والمتوسط؟
3. حدد المراحل الثلاثة للإنتاج مبينا خصائص كل مرحلة؟
4. متى يبدا قانون تناقص الغلة؟
5. ماهي المنطقة المفضلة اقتصاديا، ولماذا؟

التمرين 02:

يبين الجدول التالي تغيرات الانتاج الكلي تبعا لتغيرات كميات العمل المستخدمة عند مستوى معين من راس المال

الارض K	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
العمل L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
الناتج الكلي Q	0	10	24	39	52	61	66	66	64	12

المطلوب:

1. اوجد الناتج الحدي والمتوسط؟

2. ارسم منحنى الناتج الكلي والمتوسط والحدي على نفس المعلم، محددا المناطق الثلاثة للإنتاج على المنحنى مع الشرح كل مرحلة؟
3. متى تتساوى الانتاج الحدي pm_L والناتج المتوسط PM_L؟
4. أين يبدا قانون تناقص الغلة؟ لماذا يعمل المنتج في المرحلة الثانية؟

التمرين 03:

يبين الجدول التالي تغيرات الانتاج الكلي تبعا لتغيرات كميات العمل المستخدمة عند مستوى معين من راس المال

الارض K	1	1	1	1	1	1	1	1		
العمل L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الناتج الكلي PM	5	6	6	5.5	5	4.5	4	3.5	3	2.5

المطلوب:

1. اوجد الناتج الكلي والحدي؟
2. ارسم منحنى الناتج الكلي والمتوسط والحدي على نفس المعلم، محددا المناطق الثلاثة للإنتاج على المنحنى مع الشرح كل مرحلي؟
3. متى تتساوى الانتاج الحدي pm_L والناتج المتوسط PM_L ؟
4. عمم هذه الحالة اذا كان الانتاج تابع لكمية العمل عند مستوى ثابت لراس المال $Q = f(L, K)$؟
5. أين يبدا قانون تناقص الغلة؟ لماذا يعمل المنتج في المرحلة الثانية؟

التمرين 04:

لتكن لدينا دالة الانتاج التالية و هي من نوع دوال كوب دوكلاس $Q = 2L^{\alpha}K^{\beta}$ ، حيث تمثل Q كمية الانتاج ، L و K تمثل عوامل الانتاج، b ثابت اذا علمت ان: مرونة الانتاج للعمل تساوي 0،5 ودالة الانتاج متجانسة من الدرجة الاولى.

1. احسب المعاملات α ، β

لنفرض أن $Q = 2L^{0,5}K^{0,5}$ وموازنة المنتج هي $CT = 200$، يريد انفاقها على L و K ، واسعار عوامل الإنتاج $P_L = 2$ و $P_K = 5$

1. استنتج مرونة كل عنصر انتاج وماهي مرونة الانتاج الكلية؟ وماهي المرحلة التي يمر بها الانتاج
2. ما هي التوليفة المثلى لهذا المنتج مستنتجا معادلة المسار التوسعي له؟
3. اوجد دوال الانتاجية المتوسطة والحدية لـ L و K ؟ وحسب قيمتها؟

4. احسب المعدل الحدي للإحلال التقني $TMST_{LK}$ عند التوازن بطريقتين؟
5. أوجد الشكل العام للعلاقة بين المعدل الحدي للإحلال التقني $TMST_{LK}$ والمرونات الجزئية لعنصري الإنتاج؟

التمرين 05:

لتكن دالة الانتاج لاحد المنتجين من الشكل التالي: $Q = 10L^{0,4}K^{0,6}$ ، بحيث $L، Q،K$ راس المال ، جحم الانتاج وعنصر العمل على التوالي، اذا كانت الميزانية المخصصة من طرف المنتج من الشكل $CT = 6L + 8K$

المطلوب:

1. حدد مرحلة غلة الحجم (مردودية السلم)؟
2. اوجد دوال الانتاجية الحدية والمتوسطة للعمل وراس المال؟
3. حدد معادلة المسار التوسعي للمؤسسة واحسب الكميات المثلى عند $Q = 100$ ،
4. ما هي قيمة ميزانية المنتج؟
5. احسب $TMST_{L;K}$ عند التوازن بطريقتين؟
6. قرر المنتج زيادة الميزانية المخصصة للإنتاج لتصبح $CT = 200$ مع $P_L = 6$ و $P_K = 8$

احسب الكميات التوازنية المثلى، و حجم الانتاج الموافق لذلك؟

التمرين 06:

لتكن دالة الإنتاج من الشكل كوب دوغلاس بحيث $Q = L^{0.4}K^{0.6}$ وكانت موازنة المنتج $CT = 400$ وأسعار عناصر الإنتاج $P_L = 2$ و $P_K = 4$

1. هل الدالة متجانسة، وماهي درجة تجانسها وماهي المرحلة التي يمر بها الإنتاج؟
2. أوجد معادلة المسار التوسعي للمؤسسة؟ والكميات المثلى التي تعظم الإنتاج الكلي؟
3. أوجد دوال الإنتاجية الحدية والمتوسطة واحسب قيمتها؟
4. أوجد العلاقة بين $TMST_{LK}$ وبين الإنتاجية الحدية للعمل ورأس المال؟
5. احسب $TMST_{LK}$ عند التوازن بطريقتين؟
6. احسب المرونات الجزئية للعمل ورأس المال؟

التمرين 07:

لتكن دالة الانتاج لاحد المنتجين من الشكل التالي: $Q = 6L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{2}{3}}$ ، بحيث $L، Q،K$ راس المال ، جحم الانتاج وعنصر العمل على التوالي، اذا كانت الميزانية المخصصة من طرف المنتج من الشكل $CT = 2L + 2K$

1. حدد مرحلة غلة الحجم (مردودية السلم)؟
2. اوجد دوال الانتاجية الحدية والمتوسطة للعمل وراس المال؟
3. حدد معادلة المسار التوسعي للمؤسسة واحسب الكميات المثلى عند $Q = 300$ ،
4. ما هي قيمة ميزانية المنتج؟
5. احسب $TMST_{L;K}$ عند التوازن بطريقتين؟

التمرين 08:

لتكن دالة الانتاج لاحد المنتجين من الشكل التالي: $Q = L^{0,75}K^{0,25}$ ، بحيث L، Q،K راس المال ، جحم الانتاج ،عنصر العمل، على التوالي، اذا كانت الميزانية المخصصة من طرف المنتج من الشكل $100 = 10L + 5K$

1. ما نوع هذه الدالة؟
2. استنتج المرونة الجزئية للعمل ورأس المال ثم احسب المرونة الكلية محددا مرحلة غلة الحجم؟
3. أوجد كل من L و K التي تعظم حجم الانتاج ثم احسب حجم الانتاج الكلي؟
4. احسب $TMST_{L;K}$ عند التوازن بطريقتين؟
5. أوجد العلاقة بين $TMS_{L;K}$ والمرونة الجزئية للعمل ورأس المال؟
6. إذا كان سعر المنتوج في السوق هو $P = 10$ ، أوجد مقدار الربح أو الخسارة التي تحصل عليها المؤسسة

التمرين 09:

لتكن دالة الانتاج من الشكل: $\boldsymbol{Q = 5LK}$ ، اذا كان حجم الانتاج يقدر بـ **250** و واسعار عوامل الانتاج هي $P_L = 10$ و $P_K = 5$

1. بأي مقدار يمكن مضاعفة الانتاج اذا ما ضعفنا عوامل الانتاج مرتين؟
2. هل هي دالة متجانسة؟ إن كانت كذلك ماهي درجة تجانسها؟ وما نوع غلة الحجم؟
3. ما هي التوليفة المثلى لهذا المنتج؟
4. اوجد دوال الانتاجية المتوسطة والحدية لـ L K و ؟ وحسب قيمتها؟
5. ماهي العلاقة التي تربط بين المعدل الحدي للاحلال التقني $TMST_{LK}$ والإنتاجية الحدية للعمل ورأس المال ؟
6. احسب مرونة كل عنصر انتاج وماهي مرونة الانتاج الكلية ؟

المبحث الثاني: تكاليف الانتاج

تعتبر نظرية تكاليف الانتاج من المواضيع المهمة التي تشغل بال الوحدات الاقتصادية المتمثلة في المنتج، لان تحديد تكاليف الانتاج يعتبر أمرا مهما لتحديد حجم الانتاج الأمثل، الذي عن طريقه يتم تحديد سعر المنتوج في السوق وبالتالي تحديد هدف المؤسسة وهو تعظيم الربح. ولفهم هذه النظرية وضعنا مجموعة من التمارين بحلولها.

المطلب الأول: تمارين حول التكاليف

من خلال هذا المطلب سنتعرف على نظرية التكاليف وهذا عن طريق مجموعة من التمارين المتنوعة والبسيطة التي تساعد الطالب على الاستيعاب.

التمرين 01:

ليكن لدينا الجدول التالي الذي يبين لنا تغير حجم الانتاج والتكاليف في المدى القصير،

Q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CV	0	7	8	9	16	30	72	133	224	351	520
CF	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60

أوجد العلاقة بين جميع المتغيرات في الفترة القصيرة.

التمرين02:

لدينا الجدول التالي الذي يبين لنا تغيرات الانتاج وتغيرات التكاليف في الفترة القصيرة بحيث يقدر سعر عنصر الانتاجي المتغير في السوق 8 ون.

PM_L	Pm_L	Cm	CM	CVM	CFM	CT	CV	CF	Q
							0	60	0
							4	60	1
							6	60	2
							9	60	3
							16	60	4
							35	60	5
							72	60	6
							133	60	7

1. أكمل الجدول السابق؟
2. أوجد العلاقة بين التكاليف المتغيرة المتوسطة والناتج المتوسط لعنصر العمل وكذلك العلاقة بين التكاليف الحدية والناتج الحدي للعمل ثم وضح ذلك بيانيا ؟

التمرين03:

تقوم مؤسسة بإنتاج السلعة ما بحيث Q هو حجم الإنتاج باستخدام عدد من عوامل الانتاج حيث يمكن صياغة دالة تكاليف الانتاج كالتالي:

$$\boldsymbol{CT = 5000 - 3Q^3 + 2Q^2 + 4Q}$$

في الوقت الحالي ليس في مقدور المؤسسة تغيير جميع عناصر الانتاج.

عبر عن دوال التكاليف التالية:

- التكلفة الثابتة CF ؟
- التكلفة المتغيرة CV؟
- التكلفة المتوسطة الثابتة CFM ؟
- التكلفة المتوسطة المتغيرة CVM ؟
- التكلفة المتوسطة الكلية CM ؟
- التكلفة الحدية Cm ؟

التمرين 04:

تقوم مؤسستين انتاجيتين بإنتاج السلعة Q وفق دوال التكاليف التالية:

$$CT_1 = Q^3 - 6Q^2 + 18Q$$

$$CT_2 = Q^3 - 4Q^2 + 9Q + 19$$

احدى المؤسستين ليس بمقدورها في الوقت الحاضر تغيير كل عوامل الانتاج اما المؤسسة الاخرى فقد قامت بتغيير جميع عناصر الانتاج لديها: **المطلوب:**

1. أيهما تمثل دالة التكاليف للمدى القصير وأيهما تمثل دالة التكاليف للمدى الطويل؟ اشرح ذلك؟
2. احسب جميع التكاليف الجزئية، المتوسطة والحدية بالنسبة للدالتين؟

التمرين 05:

تقوم مؤسستين انتاجيتين بإنتاج السلعة Q وفق دوال التكاليف التالية:

$$CT_1 = 5Q^3 - 20Q^2 + 45Q$$
$$CT_2 = 5Q^3 - 20Q^2 + 45Q + 400$$

المطلوب:

1. أيهما تمثل دالة التكاليف للمدى القصير وأيهما تمثل دالة التكاليف للمدى الطويل؟ اشرح ذلك؟
2. احسب جميع التكاليف المشتقة، المتوسطة والحدية بالنسبة للدالتين؟
3. في الفترة الطويلة
   - حدد حجم الانتاج الذي تتساوى عنده التكلفة المتوسطة والحدية؟

- احسب حجم الربح الذي تتحصل عليه المؤسسة عند ذلك إذا كان سعر المنتوج في السوق هو $P = 10$؟

التمرين 06:

إذا كانت تغيرات تكلفة الانتاج لأحد المؤسسات الانتاجية معطاة حسب بيانات الجدول التالي:

Cm	CM	CVM	CFM	CT	CV	CF	Q
						55	0
					30		1
				110			2
		25					3
	40						4
	42						5
					225		6
90							7
				480			8

المطلوب: أكمل الجدول التالي؟

التمرين 07:

لتكن دالة الإنتاج مم الشكل $\boldsymbol{L = \frac{Q^2}{4K}}$ حيث ، L و K تمثل عوامل الإنتاج العمل وراس المال على التوالي، واسعار عوامل الانتاج هي $P_L = 4$ و $P_K = 10$

1. إذا كانت $K = 160$، أوجد دالة التكلفة الكلية بدلالة حجم الإنتاج ثم احسب التكاليف المشتقة؟
2. أوجد دالة التكلفة الكلية بدلالة حجم الإنتاج في الفترة الطويلة، ثم احسب التكاليف المشتقة؟

التمرين 08:

تعرض مجموعة من مؤسسات في السوق السلعة X ، فإذا كانت دالة الانتاج من الشكل: $Q = 3LK - L^2 - 2K^2$ سعر المنتوج في السوق هو $P = 10$ ودالة التكلفة تقدر بـ $CT = 2L + 10K$ إذا تحصلت المؤسسة على إعانة مالية من الدولة تسمى إعانة التوازن

- قم بدراسة كاملة لتعظيم الربح؟
- ثم حدد مقدار الإعانة المالية للتوازن المقدمة من طرف الدولة؟

إذا قررت وزارة الاقتصاد تجميع هذه المؤسسات في مؤسسة واحدة وقد توقعت أحدى الدراسات أن تكون دالة الانتاج من الشكل: $Q = L^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{4}}$ ودالة التكلفة من الشكل: $CT = 27K + L$ وسعر المنتوج في السوق يقدر بـ $P = 10$

- أوجد أقصى أنتاج كلي يمكن أن تحصل عليه بتكاليف كلية قدرها 810ون؟

- ما هي قيمة الأرباح التي يمكن أن تحققها هذه المؤسسة؟

التمرين 09:

إليك دالتي التكاليف التالية لمشروعين a و b ينتجان نفس السلعة يحدد سعر بيع المنتوج بـ $P = 8$ حيث:

$$CT_a = 8Q - 6Q^2 + Q^3$$
$$CT_b = 4Q - 3Q^2 + Q^3$$

المطلوب:

- أحسب قيمة الربح الذي يمكن لكل مشروع تحققه؟
- أي المشروعين أفضل

التمرين 10:

إليك دالتي التكاليف المتغيرة والثابتة:

$CF = 25$ و $CV = 4Q^2 + 6Q$

المطلوب:

- أحسب دالة التكاليف الكلية؟
- حدد حجم الانتاج الذي تتساوى عنده التكلفة الحدية مع التكلفة المتوسطة
- أرسم منحى التكلفة الحدية والمتوسطة واشرح العلاقة بينهما؟

التمرين 11:

لمؤسسة امكانية لاختيار بين دالتي للإنتاج هما:

$$Q = L^{0,25}K^{0,25}$$
$$Q = LK$$

إذا علمت أن سعر وحدة من X يساوي P ودالة التكلفة للدالتين هي $CT = 10K + 4L$ أوجد التكلفة الكلية والحدية ثم بين أحسن دالة للإنتاج

التمرين11:

لتكن دالة الإنتاج من الشكل كوب دوغلاس بحيث $Q = L^{0.4}K^{0.6}$

1. ما نوع هذه الدالة؟
2. هل الدالة متجانسة، وماهي درجة تجانسها وماهي المرحلة التي يمر بها الإنتاج؟
3. ماهي التوليفة المثلى من العمل ورأس المال التي تحقق حجم انتاج قدره 520 وحدة واسعار عوامل الإنتاج الإنتاج $P_L = 2$ و $P_K = 6$؟
4. احسب تكاليف الإنتاج؟

5. ماهي العلاقة بين المعدل الحدي للاحلال التقني $TMST_{LK}$والإنتاجية الحدية للعمل ورأس المال؟
6. احسب قيمة المعدل الحدي للاحلال التقني $TMST_{LK}$عند التوازن؟
7. احسب مرونة كل عنصر انتاجي وماهي المرونة الكلية؟
8. قدر تغير الإنتاج المتأتي من زيادة العمل بـ 7% ثم قدر تغير الإنتاج المتأتي من نقصان حجم رأس المال بـ 3%؟
9. اذا كان سعر المنتوج في السوق هو $P = 100$ دنانير احسب مقدار الربح؟
10. بالنسبة للدالة السابقة اذا كان $\boldsymbol{K = 20}$ حدد دالة التكاليف في الفترة القصيرة وعين جميع الدوال المستقلة؟
11. اوجد دالة التكاليف في الفترة الطويلة وعين الدوال المشتقة؟

التمرين 12:

عرف كلا من التكلفة الثابتة والمتغيرة نظريا وعمليا مستندا على المثال التالي:

$$\boldsymbol{CT} = \frac{1}{2}Q^3 - 3Q^2 + 7Q + 2$$

أثبت أن التكلفة المتغيرة المتوسطة متناقصة ثم متزايدة؟

المطلب الثاني: حلول تمارين حول تكاليف الانتاج

فيما يلي سنستعرض حلول للتمارين السابقة

التمرين01:

ليكن لدينا الجدول التالي الذي يبين لنا تغير حجم الانتاج والتكاليف في المدى القصير، أوجد العلاقة بين جميع المتغيرات في الفترة القصيرة.

Q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CT	60	67	68	69	76	90	132	193	284	411	580
CF	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60
CV	0	7	8	9	16	30	72	133	224	351	520
CM	–	67	34	23	19	18	22	27,57	35,5	45,66	58
CFM	–	60	30	20	15	12	10	8,6	7,5	6,7	6
CVM	–	7	4	3	4	6	12	19	28	39	52
Cm	–	7	1	1	7	14	42	61	91	127	169

التكلفة الكلية:

التكاليف الثابتة + التكاليف المتغيرة = التكاليف الكلية

$$\mathbf{CT = CV + CF}$$

التكلفة المتوسطة الكلية:

$$\mathbf{CM} = \frac{\boldsymbol{CT}}{\boldsymbol{Q}}$$

أو

$$\mathbf{CM} = CFM + CVM$$

التكلفة المتوسطة الثابتة:

$$\mathrm{CF}M = \frac{CF}{Q}$$

التكلفة المتغيرة المتوسطة:

$$CVM = \frac{CV}{Q}$$

التكلفة الحدية وتحسب بطريقتين:

التكلفة الحدية =(التغير في التكلفة الكلية)/(التغير في الكمية المنتجة)

ويمكن صياغتها بالعلاقة التالية:

$$Cm = \frac{\Delta CT}{\Delta Q} = \frac{CT_1 - CT_2}{Q_1 - Q_2}$$

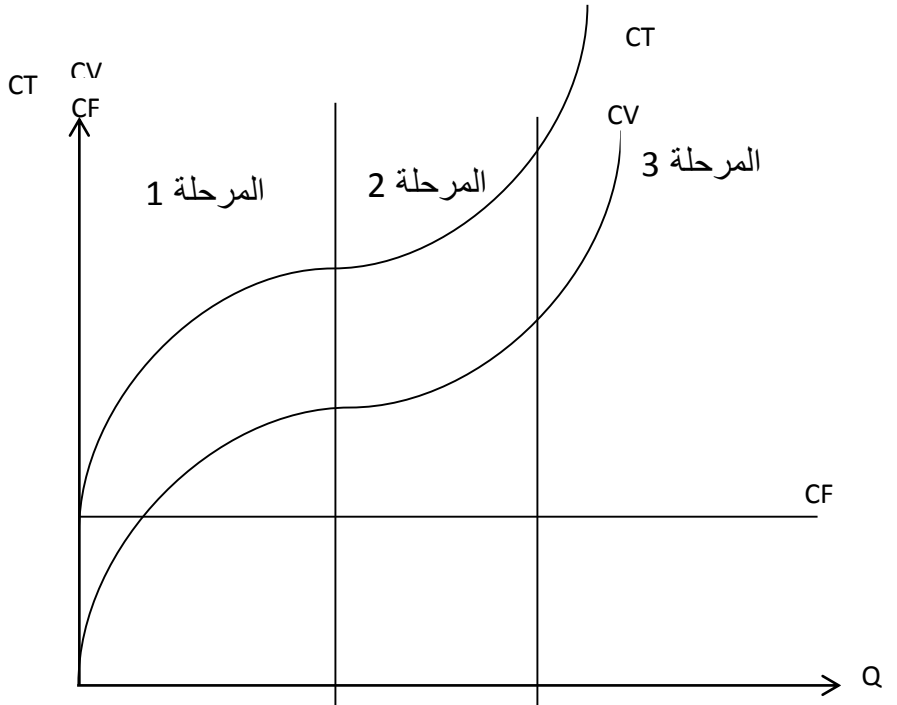
أو هي:

التكلفة الحدية =(التغير في التكلفة المتغيرة)/(التغير في الكمية المنتجة)

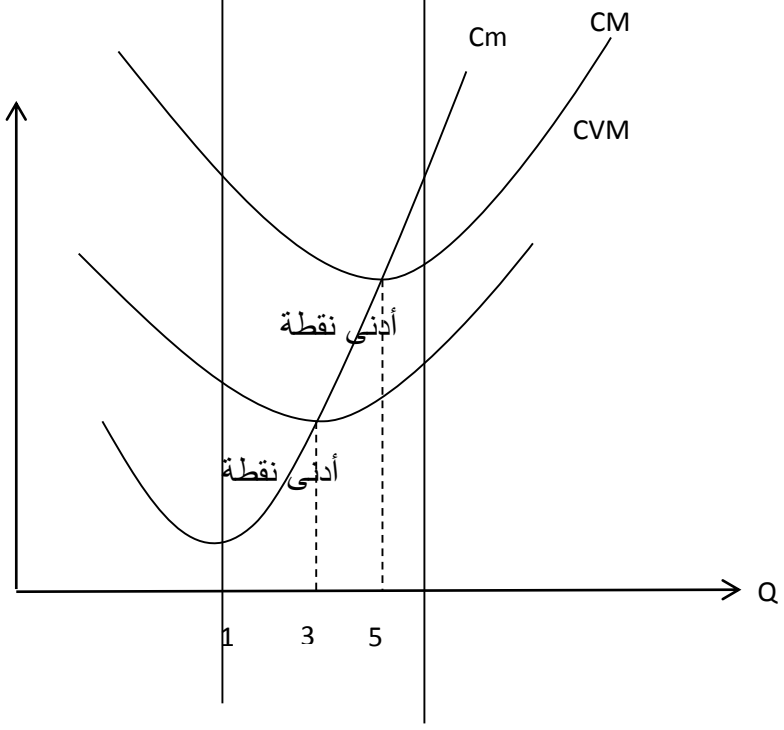
ويمكن صياغتها بالعلاقة التالية:

$$Cm = \frac{\Delta CV}{\Delta Q} = \frac{CV_1 - CV_2}{Q_1 - Q_2}$$

منحنى التكاليف الكلية والمتغيرة والثابتة



منحنى التكلفة المتوسطة الكلية والمتغيرة والحدية



في الفترة القصيرة فإن منحنى التكاليف الحدية يتناقص في البداية أين يكون منحنى التكاليف الكلية متزايد بمعدل متناقص إلى أن يصل إلى أدنى نقطة عند $Q = 1$ وهي النقطة الفاصلة بين الزيادة بمعدل متزايد ومعدل متناقص بعدها يتزايد منحنى التكلفة الحدية ويكون منحنى التكلفة الكلية متزايد بمعدل متزايد وعندما يكون متصاعد يقطع كل من منحنى التكلفة المتوسطة المتغيرة عند أدنى نقطة أي عند $Q = 3$ ومنحنى التكلفة المتوسطة الكلية عند أدنى نقطة لها أي عند $Q = 5$.

كما يكون منحنى التكلفة المتوسطة المتغيرة والكلية متناقص في البداية إلى أن تصل إلى أدنى نقطة وبعدها تتصاعد، أما منحنى التكلفة المتوسطة الثابتة فيتناقص كلما ارتفع حجم الانتاج.

التمرين 02:

التكلفة الكلية:

$$CT = CV + CF$$

التكلفة المتوسطة الثابتة:

$$CFM = \frac{CF}{Q}$$

التكلفة المتوسطة المتغيرة:

$$CVM = \frac{CV}{Q}$$

التكلفة المتوسطة الكلية:

$$CM = \frac{CT}{Q}$$

أو

$$CM = CVM + CFM$$

التكلفة الحدية:

$$Cm = \frac{\Delta CT}{\Delta Q} = \frac{CT_2 - CT_1}{Q_2 - Q_1}$$

أو

$$Cm = \frac{\Delta CV}{\Delta Q} = \frac{CV_2 - CV_1}{Q_2 - Q_1}$$

الانتاجية المتوسطة:

$$CVM = \frac{P_L}{PML} \Longrightarrow CVM \cdot PM_L = P_L \Longrightarrow PML = \frac{P_L}{CVM}$$

الانتاجية الحدية:

$$Cm = \frac{P_L}{Pm_L} \Longrightarrow Cm \cdot Pm_L = P_L \Longrightarrow Pm_L = \frac{P_L}{Cm}$$

PM_L	Pm_L	Cm	CM	CVM	CFM	CT	CV	CF	Q	L
–	–	–	–	–	–	60	0	60	0	0
2	2	4	64	4	60	64	4	60	1	1
2,66	4	2	33	3	30	66	6	60	2	2
2,66	2,66	3	23	3	20	69	9	60	3	3
2	1,14	7	19	4	15	76	16	60	4	4
1,14	0,42	19	19	7	12	95	35	60	5	5
0,66	0,21	37	22	12	10	132	72	60	6	6
0,42	0,13	61	27,57	19	8,57	193	133	60	7	7

العلاقة بين متوسط التكلفة المتغيرة والناتج المتوسط للعمل:

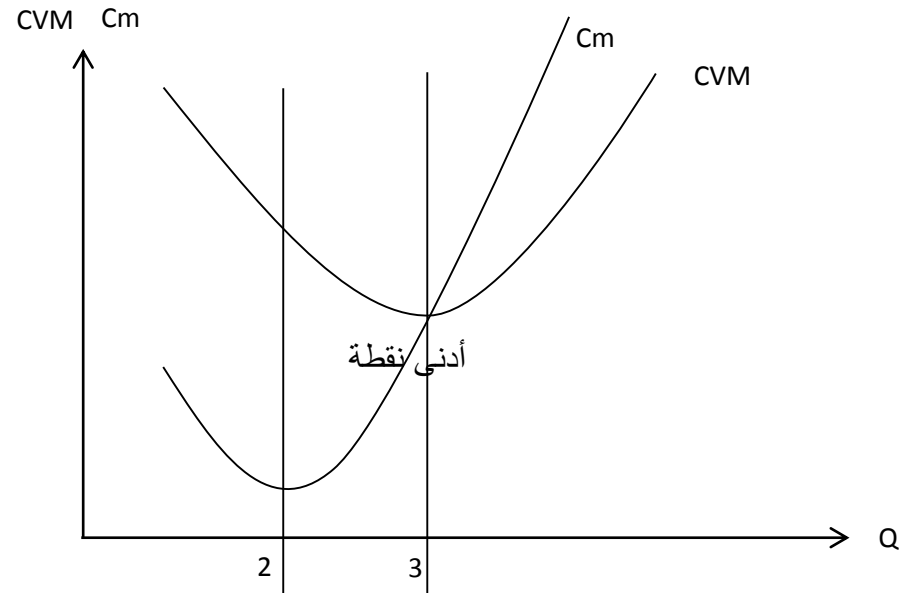
عندما يكون الناتج المتوسط لعنصر العمل عند أعلى مستوى له يكون متوسط التكلفة المتغيرة عند حده الأدنى، وذلك واضح عند تشغيل العامل الثالث حيث يكون $PM_L = 2{,}66$ وهو أعلى مستوى له، وتكون عندها $CVM = 3$ وهو أدنى مستوى لها. كما نلاحظ أنه عندما يكون الناتج المتوسط متزايدا يكون متوسط التكلفة المتغيرة متناقصا (والعكس صحيح).

العلاقة بين التكلفة الحدية والناتج الحدي لعنصر العمل:

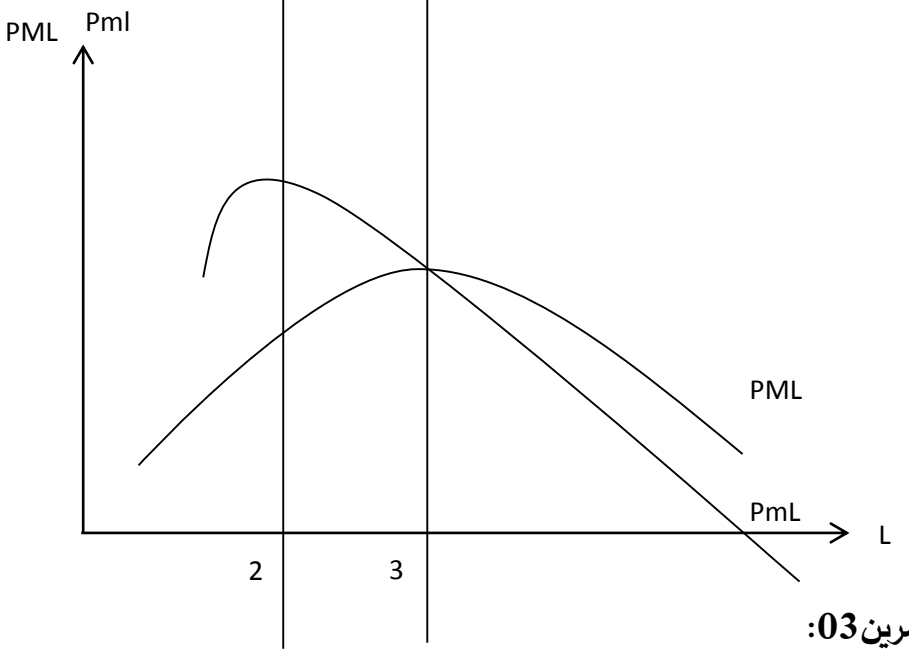
عندما يكون الناتج الحدي عند أعلى مستوى له وهو $Pm_L = 4$ عند تشغيل العامل الثاني تكون التكلفة الحدية عند حدها الأدنى $Cm = 2$ ويلاحظ كذلك أنه عندما يكون الناتج الحدي متزايدا تكون التكلفة الحدية متناقصة (والعكس صحيح)

التمثيل البياني:

العلاقة بين التكلفة المتوسطة والحدية



العلاقة بين الانتاجية المتوسطة والحدية



التمرين03:

التكلفة الكلية CT:

$$\boldsymbol{CT = 5000 - 3Q^3 + 2Q^2 + 4Q}$$

التكلفة الثابتة CF :

$$CF = 5000$$

التكلفة المتغيرة CV:

$$CV = \boldsymbol{-3Q^3 + 2Q^2 + 4Q}$$

التكلفة المتوسطة الثابتة :

$$CFM = \frac{CF}{Q} \Longrightarrow CFM = \frac{5000}{Q}$$

التكلفة المتوسطة المتغيرة CVM:

$$CVM = \frac{CV}{Q} = \frac{-3Q^3 + 2Q^2 + 4Q}{Q} \Longrightarrow CVM = -3Q^2 + 2Q + 4$$

التكلفة المتوسطة الكلية CM:

$$CM = \frac{CT}{Q} = \frac{5000 - 3Q^3 + 2Q^2 + 4Q}{Q} \Longrightarrow CM = \frac{5000}{Q} - 3Q^2 + 2Q + 4$$

أو

$$CM = CFM + CVM \Longrightarrow CM = \frac{5000}{Q} - 3Q^2 + 2Q + 4$$

التكلفة الحدية Cm:

$$Cm = \frac{\partial CT}{\partial Q} = -9Q^2 + 4Q + 4$$

أو

$$Cm = \frac{\partial CV}{\partial Q} = -9Q^2 + 4Q + 4$$

التمرين 04:

الدالة الأولى تمثل دالة التكاليف في الفترة الطويلة لأن الدالة تحتوي على التكاليف المتغيرة فقط، أما الدالة الثانية فهي تعبر عن دالة التكاليف في الفترة القصيرة والتي تحتوي على التكاليف الثابتة والمتغيرة بحيث التكاليف الكلية تساوي مجموع التكاليف المتغيرة والثابتة

بالنسبة لـ CT_2 دالة التكاليف الكلية في الفترة القصيرة:

التكلفة الثابتة CF :

$$CF = 19$$

التكلفة المتغيرة CV:

$$CV = Q^3 - 4Q^2 + 9Q$$

التكلفة المتوسطة الثابتةCFM :

$$CFM = \frac{CF}{Q} \Longrightarrow CFM = \frac{19}{Q}$$

التكلفة المتوسطة المتغيرة CVM:

$$CVM = \frac{CV}{Q} = \frac{Q^3 - 4Q^2 + 9Q}{Q} \Longrightarrow$$
$$CVM = Q^2 - 4Q + 9$$

التكلفة المتوسطة الكلية CM:

$$CM = \frac{CT}{Q} = \frac{Q^3 - 4Q^2 + 9Q + 19}{Q} \Longrightarrow$$

$$CM = \frac{19}{Q} + Q^2 - 4Q + 9$$

أو

$$CM = CFM + CVM \Longrightarrow CM = \frac{19}{Q} + Q^2 - 4Q + 9$$

التكلفة الحدية Cm:

$$Cm = \frac{\partial CT}{\partial Q} = 3Q^2 - 8Q + 9$$

أو

$$Cm = \frac{\partial CV}{\partial Q} = 3Q^2 - 8Q + 9$$

بالنسبة لـ CT_1 دالة التكاليف الكلية في الفترة الطويلة كل العناصر متغيرة:

التكلفة المتوسطة الكلية CM:

$$CM = \frac{CT}{Q} = \frac{Q^3 - 6Q^2 + 18Q}{Q} \Longrightarrow CM = Q^2 - 6Q + 18$$

التكلفة الحدية Cm:

$$Cm = \frac{\partial CT}{\partial Q} = 3Q^2 - 12Q + 18$$

التمرين 05:

الدالة الأولى تمثل دالة التكاليف في الفترة الطويلة لأن الدالة تحتوي على التكاليف المتغيرة فقط، أما الدالة الثانية فهي تعبر عن دالة التكاليف في الفترة القصيرة والتي تحتوي على التكاليف الثابتة والمتغيرة بحيث التكاليف الكلية تساوي مجموع التكاليف المتغيرة والثابتة

بالنسبة لـ CT_2:

التكلفة الثابتة CF :

$$CF = 400$$

التكلفة المتغيرة CV:

$$CV = 5Q^3 - 20Q^2 + 45Q$$

التكلفة المتوسطة الثابتةCFM :

$$CFM = \frac{CF}{Q} \Longrightarrow CFM = \frac{400}{Q}$$

التكلفة المتوسطة المتغيرة CVM:

$$CVM = \frac{CV}{Q} = \frac{5Q^3 - 20Q^2 + 45Q}{Q} \Longrightarrow$$
$$CVM = 5Q^2 - 20Q + 45$$

التكلفة المتوسطة الكلية CM:

$$CM = \frac{CT}{Q} = \frac{5Q^3 - 20Q^2 + 45Q + 400}{Q} \Longrightarrow$$
$$CM = \frac{400}{Q} + 5Q^2 - 20Q + 45$$

أو

$$CM = CFM + CVM \Longrightarrow CM = \frac{400}{Q} + 5Q^2 - 20Q + 45$$

التكلفة الحدية Cm:

$$Cm = \frac{\partial CT}{\partial Q} = 15Q^2 - 40Q + 45$$

أو

$$Cm = \frac{\partial CV}{\partial Q} = 15Q^2 - 40Q + 45$$

بالنسبة لـ CT_1:

التكلفة المتوسطة الكلية CM:

$$CM = \frac{CT}{Q} = \frac{5Q^3 - 20Q^2 + 45Q}{Q} \Longrightarrow CM = 5Q^2 - 20Q + 45$$

التكلفة الحدية Cm:

$$Cm = \frac{\partial CT}{\partial Q} = 15Q^2 - 40Q + 45$$

حدد حجم الانتاج الذي تتساوى عنده التكلفة المتوسطة والحدية:

$$CM = Cm \Longrightarrow 5Q^2 - 20Q + 45 = 15Q^2 - 40Q + 45$$

$$\Longrightarrow 5Q^2 - 20Q + 45 - 15Q^2 + 40Q - 45 = -10Q^2 + 20Q = 0$$

$$\Longrightarrow Q(-10Q + 20) = 0$$

ومنه:

اما $Q = 0$ مرفوضة

او

$$-10Q + 20 = 0 \Longrightarrow Q = \frac{20}{10} = 2$$

تتساوى التكلفة الحدية مع التكلفة المتوسطة عند $Q = 2$

حساب حجم الربح الذي تتحصل عليه المؤسسة عندما تتساوى التكلفة الحدية مع التكلفة المتوسطة إذا كان سعر المنتوج في السوق هو $P = 10$؟

$$\pi = RT - CT = PQ - CT \Longrightarrow \pi = (10 * 2) - (5Q^3 - 20Q^2 + 45Q)$$

$$\Longrightarrow \pi = (10 * 2) - 5(2)^3 + 20(2)^2 - 45(2)$$

$$\Longrightarrow \pi = 20 - 40 + 80 - 90$$

$$\pi = -30$$

وعليه فان المؤسسة تحقق خسارة قدرها 30

التمرين 06:

التكلفة الكلية:

$$CT = CV + CF$$

التكلفة المتوسطة الثابتة:

$$CFM = \frac{CF}{Q}$$

التكلفة المتوسطة المتغيرة:

$$CVM = \frac{CV}{Q}$$

التكلفة المتوسطة الكلية:

$$CM = \frac{CT}{Q}$$

أو

$$CM = CVM + CFM$$

التكلفة الحدية:

$$Cm = \frac{\Delta CT}{\Delta Q} = \frac{CT_2 - CT_1}{Q_2 - Q_1}$$

أو

$$Cm = \frac{\Delta CV}{\Delta Q} = \frac{CV_2 - CV_1}{Q_2 - Q_1}$$

Cm	CM	CVM	CFM	CT	CV	CF	Q
–	–	–	–	55	0	55	0
30	85	30	55	85	30	55	1
25	55	27.5	27.5	110	55	55	2
20	43.33	25	18.33	130	75	55	3
30	40	26.25	13.75	160	105	55	4
50	42	31	11	210	155	55	5
70	46.66	37.5	9.16	280	225	55	6
90	52.86	45	7.86	370	315	55	7
110	60	53.12	6.88	480	425	55	8

عندما يكون حجم الإنتاج $Q = 0$ فان $CV = 0$

$$CT = CF + CV \Longrightarrow CF = CT - CV \Longrightarrow CF = 55 - 0 = 55$$

$$CT = CF + CV \Longrightarrow CV = CT - CF = 110 - 55 = 55$$

$$CVM = \frac{CV}{Q} \Longrightarrow CV = CVM \cdot Q \Longrightarrow CV = (25)(3) = 75$$

$$CM = \frac{CT}{Q} \Longrightarrow CT = CM \cdot Q \Longrightarrow CT = (40)(4) = 160$$

$$CM = \frac{CT}{Q} \Longrightarrow CT = CM \cdot Q \Longrightarrow CT = (42)(5) = 210$$

$$Cm = \frac{\Delta CT}{\Delta Q} = \frac{CT_2 - CT_1}{Q_2 - Q_1}$$

وبما أن

$$Cm = 90 \Longrightarrow 90 = \frac{CT_2 - 225}{7 - 6} \Longrightarrow 90 = CT_2 - 225 \Longrightarrow CT_2 = 315$$

التمرين 07:

في الفترة القصيرة:

$$\begin{cases} L = \frac{Q^2}{4K} \\ CT = 4L + 10K \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} L = \frac{Q^2}{4(160)} \\ CT = 4L + 10(160) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} L = \frac{Q^2}{640} \dots\dots\dots\dots\dots\dots 1 \\ CT = 4L + 1600 \dots\dots\dots 2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow CT = 4\left(\frac{Q^2}{640}\right) + 1600 \Longrightarrow CT = \frac{Q^2}{160} + 1600$$

ومنه دالة التكاليف في الفترة القصيرة هي:

$$CT = \frac{Q^2}{160} + 1600$$

الدوال المشتقة هي:

التكلفة الثابتة CF :

$$CF = 1600$$

التكلفة المتغيرة CV:

$$CV = \frac{Q^2}{160}$$

التكلفة المتوسطة الثابتة CFM :

$$CFM = \frac{CF}{Q} \Longrightarrow CFM = \frac{1600}{Q}$$

التكلفة المتوسطة المتغيرة CVM:

$$CVM = \frac{CV}{Q} = \frac{\frac{Q^2}{160}}{Q} \Longrightarrow CVM = \left(\frac{Q^2}{160}\right)\left(\frac{1}{Q}\right)$$

$$CVM = \frac{Q}{160}$$

التكلفة المتوسطة الكلية CM:

$$CM = \frac{CT}{Q} = \frac{\frac{Q^2}{160} + 1600}{Q} \Longrightarrow CM = \frac{1600}{Q} + \frac{Q}{160}$$

أو

$$CM = CFM + CVM \Longrightarrow CM = \frac{1600}{Q} + \frac{Q}{160}$$

التكلفة الحدية Cm:

$$Cm = \frac{\partial CT}{\partial Q} = \frac{2Q}{160}$$

أو

$$Cm = \frac{\partial CV}{\partial Q} = \frac{2Q}{160}$$

في الفترة الطويلة:

يجب البحث في البداية عن الدوال التالية:

- معادلة المسار التوسعي
- دالة الإنتاج
- دالة التكاليف

إيجاد معادلة المسار التوسعي:

$$\boldsymbol{L = \frac{Q^2}{4K} \Longrightarrow Q^2 = 4LK \Longrightarrow Q = \sqrt{4LK} \Longrightarrow Q = 2\sqrt{L}\sqrt{K} \Longrightarrow}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow Q = 2L^{0.5}K^{0.5}}$$

$$Max\mathcal{L} = \mathrm{F}(L,K) + \lambda(\mathrm{CT} - P_L L - P_K K)$$
$$Max\mathcal{L} = 2L^{0,5}K^{0,5} + \lambda(\ CT - 4L - 10K)$$

وحل هذه الدالة يتمثل في:

الشرط اللازم:

ويتمثل في انعدام المشتقات الجزئية الأولى لدالة الهدف بالنسبة لجميع المتغيرات كما يلي:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0 \Rightarrow L^{-0,5}K^{0,5} - 4\lambda = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0 \Rightarrow L^{0,5}K^{-0,5} - 10\lambda = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow CT - 4L - 10K = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

بقسمة $\frac{1}{2}$ نتحصل على:

$$\frac{L^{-0,5}K^{0,5}}{L^{0,5}K^{-0,5}} = \frac{4\lambda}{10\lambda}$$

وبالاختزال نحصل على:

$$\frac{K^{0,5}K^{0,5}}{L^{0,5}L^{0,5}} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{2}{5}$$

ومنه معادلة المسار التوسعي هي:

$$K = \frac{2L}{5} \cdots\cdots\cdots (4)$$

ومنه:

- **معادلة المسار التوسعي:** $K = \frac{2L}{5}$ 1
- **دالة الإنتاج:** $\boldsymbol{Q = 2L^{0.5}K^{0.5}}$ **2**
- **دالة التكاليف:** $CT = 4L + 10K$ 3

بتعويض 1 في 2 نجد:

$$\boldsymbol{Q = 2L^{0.5}\left(\frac{2L}{5}\right)^{0.5} \Rightarrow Q = 2L^{0.5}L^{0.5}\left(\frac{2}{5}\right)^{0.5} \Rightarrow Q = 1.26L}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow L = \frac{Q}{1.26} \ldots\ldots\ldots\ldots 4}$$

بتعويض 1 في 3 نجد:

$$CT = 4L + 10K \Rightarrow CT = 4L + 10\left(\frac{2L}{5}\right) \Rightarrow CT = 4L + 4L$$

$$\Rightarrow CT = 8L \ldots\ldots\ldots.5$$

بتعويض 4 في 5 نجد:

$$CT = 8\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{1.26}}\right) \Rightarrow CT = 6.32Q$$

ومنه دالة التكاليف في الفترة الطويلة:

$$CT = 6.32Q$$

اشتقاق دوال التكاليف:

التكلفة المتوسطة الكلية CM:

$$CM = \frac{CT}{Q} = \frac{6.32Q}{Q} \Rightarrow CM = 6.32$$

التكلفة الحدية Cm:

$$Cm = \frac{\partial CT}{\partial Q} = 6.32$$

التمرين 08:

$$\boldsymbol{Max\pi = PQ - CT} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{Max\pi} = (3LK - L^2 - 2K^2)\boldsymbol{P} - 2L + 10K$$

وحل هذه الدالة يتمثل في:

الشرط اللازم:

ويتمثل في انعدام المشتقات الجزئية الأولى لدالة الهدف بالنسبة لجميع المتغيرات كما يلي:

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = 0 \Rightarrow (3K - 2L)P - 2 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = 0 \Rightarrow (3L - 4K)P - 10 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

بقسمة $\frac{1}{2}$ نتحصل على:

$$\frac{(3K - 2L)P}{(3L - 4K)P} = \frac{2}{10}$$

وبالاختزال نحصل على:

$$\frac{3K - 2L}{3L - 4K} = \frac{1}{5} \Rightarrow (3K - 2L)5 = 3L - 4K \Rightarrow 19K = 13L$$

ومنه

$$K = \frac{13L}{19} \cdots\cdots (3)$$

وبتعويض (3) في (1) نحصل على:

$$(3K - 2L)P = 2 \Rightarrow \left(3\left(\frac{13L}{19}\right) - 2L\right)10 = 2$$

$$\Rightarrow \frac{39}{19}L - \frac{38}{19}L = \frac{2}{10} \Rightarrow \frac{L}{19} = \frac{1}{5} \Rightarrow L = \frac{19}{5}$$

$$\Rightarrow L = 3.8$$

$$\Rightarrow K = \frac{13}{19}\left(\frac{19}{5}\right) \Rightarrow K = 2.6$$

$$\Rightarrow K = 2.6$$

مقدار الإعانة المالية للتوازن المقدمة من طرف الدولة

بما أن الدولة ستقدم اعانة للمؤسسة يعني ان المؤسسة حققت خسارة

$$\pi = \boldsymbol{PQ} - \boldsymbol{CT} \Longrightarrow \boldsymbol{\pi} = (3LK - L^2 - 2K^2)\boldsymbol{P} - 2L + 10K$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\pi} = (3(3.8)(2.6) - (3.8^2) - 2(2.6)^2)\mathbf{10} - \big(2(3.8) + 10(2.6)\big)$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\pi} = \mathbf{-31.92}$$

منه الاعانة التي تقدمها الدولة للمؤسسة هي : $\mathbf{31.92}$

تسعى دالة الهدف لتعظيم دالة الانتاج وتكتب من الشكل:

$$Max\mathcal{L} = \mathrm{F}(L,K) + \lambda(\mathrm{CT} - P_L L - P_K K)$$
$$Max\mathcal{L} = L^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{4}} + \lambda(\ 810 - L - 27K)$$

وحل هذه الدالة يتمثل في:

الشرط اللازم:

ويتمثل في انعدام المشتقات الجزئية الأولى لدالة الهدف بالنسبة لجميع المتغيرات كما يلي:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0 \Rightarrow \frac{3}{4}L^{-\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}} - \lambda = 0 \Longrightarrow \frac{3}{4}L^{-\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}} = \lambda \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}L^{\frac{3}{4}}K^{-\frac{3}{4}} - 27\lambda = 0 \Longrightarrow \frac{1}{4}L^{\frac{3}{4}}K^{-\frac{3}{4}} = 27\lambda \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow 810 - L - 27K = 0 \cdots\cdots\cdots (3)$$

بقسمة $\frac{1}{2}$ نتحصل على:

$$\frac{\frac{3}{4}L^{-\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}L^{\frac{3}{4}}K^{-\frac{3}{4}}} = \frac{\lambda}{27\lambda}$$

وبالاختزال نحصل على:

$$\frac{3K^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{4}}}{3L^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{27} \Rightarrow \frac{3K}{L} = \frac{1}{27}$$

ومنه

$$K = \frac{L}{81} \Longrightarrow L = 81K \cdots\cdots\cdots (4)$$

وبتعويض (4) في (3) نحصل على:

$$810 - 81K - 27K = 0$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على:

$$810 - 108K = 0 \Longrightarrow K = \frac{810}{108}$$

$$K = 7.5$$

ومنه

$$L = 81K = 607.5$$

وبتعويض قيمة L في (4) نجد:

$$L = 607.5$$

حساب حجم الانتاج الكلي:

$$Q = (607.5)^{\frac{3}{4}}(7.5)^{\frac{1}{4}} = 202.5$$

حساب قيمة أرباح المؤسسة:

$$\pi = \boldsymbol{PQ} - \boldsymbol{CT} \Longrightarrow \pi = 10(202.5) - 810$$

$$\Longrightarrow \pi = 1215$$

التمرين 09:

بالنسبة لـ *a*:

$$\pi = \boldsymbol{RT} - \boldsymbol{CT} \Longrightarrow \pi = \boldsymbol{PQ} - \boldsymbol{CT}$$

$$\Longrightarrow \pi = 8Q - (8Q - 6Q^2 + Q^3)$$

$$\Longrightarrow \pi = 8Q - 8Q + 6Q^2 - Q^3 \Longrightarrow \pi = 6Q^2 - Q^3$$

عند تعظيم الربح فان المشتقة الأولى لهذه الدالة بالنسبة لحجم الإنتاج تكون معدومة وعليه:

$$Max\pi \Longrightarrow \frac{\partial \pi}{\partial Q} = 0 \Longrightarrow 12Q - 3Q^2 = 0$$

$$\Longrightarrow Q(12 - 3Q) = 0$$

$$\begin{cases} Q = 0 \\ 12 - 3Q = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Q = 0 \\ Q = \dfrac{12}{3} = 4 \end{cases}$$

$Q = 0$ مرفوض و $Q = 4$ مقبول

ومنه

$$\pi = 6(4)^2 - (4)^3 \Longrightarrow \pi = 32$$

بالنسبة لـ *b*:

$$\pi = \boldsymbol{RT} - \boldsymbol{CT} \Longrightarrow \pi = \boldsymbol{PQ} - \boldsymbol{CT}$$

$$\Longrightarrow \pi = 8Q - (4Q - 3Q^2 + Q^3)$$

$$\Longrightarrow \pi = 4Q - 3Q^2 + Q^3$$

عند تعظيم الربح فان المشتقة الأولى لهذه الدالة بالنسبة لحجم الإنتاج تكون معدومة وعليه:

$$Max\pi \Longrightarrow \frac{\partial \pi}{\partial Q} = 0 \Longrightarrow 4Q - 3Q^2 + Q^3 = 0$$

وحل هذه المعادلة يكون المحدد وتحديد حلول هذه المعادلة:

حساب المحدد

$$\Delta = b^2 - ac \Longrightarrow \Delta = (6)^2 - 4(4)(-3) = 36 + 48 = 84$$
$$\sqrt{\Delta} = 9{,}16$$

حساب الحلين:

$$L_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Longrightarrow L_1 = \frac{-6 - 9{,}16}{2(-3)} \Longrightarrow L_1 = 2{,}53$$

$$L_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Longrightarrow L_2 = \frac{-6 + 9{,}16}{2(-3)} \Longrightarrow L_2 = -0{,}53 \left(\text{مرفوض}\right)$$

$$\pi = 4Q - 3Q^2 + Q^3 \Longrightarrow \pi = 4(2{,}53) - 3(2{,}53)^2 + (2{,}53)^3 = \mathbf{13.12}$$

$$\Longrightarrow \pi = 13.12$$

ومنه ربح المشروع **a** أكبر من ربح المشروع **b** لهذا المشروع **a** احسن من المشروع **b**

$$\pi_a = 32 > \pi_b = 13.12$$

التمرين 10:

أليك دالتي التكاليف المتغيرة والثابتة:

$CV = 4Q^2 + 6Q$ و $CF = 25$

المطلوب:

أحسب دالة التكاليف الكلية؟

حدد حجم الانتاج الذي تتساوى عنده التكلفة الحدية مع التكلفة المتوسطة

أرسم منحى التكلفة الحدية والمتوسطة واشرح العلاقة بينهما؟

ومنه دالة التكاليف في الفترة القصيرة هي:

$$CT = CV + CF \Longrightarrow CT = 4Q^2 + 6Q + 25$$

حجم الإنتاج الذي تتساوى عنده التكلفة الحدية والمتوسطة:

التكلفة المتوسطة الكلية CM:

$$CM = \frac{CT}{Q} = \frac{4Q^2 + 6Q + 25}{Q} \Longrightarrow CM = \frac{25}{Q} + 4Q + 6$$

التكلفة الحدية Cm:

$$Cm = \frac{\partial CT}{\partial Q} = 8Q + 6$$

$$CM = Cm \Longrightarrow \frac{25}{Q} + 4Q + 6 = 8Q + 6$$

$$\Longrightarrow \frac{25}{Q} + 4Q + 6 - 8Q - 6 = 0 \Longrightarrow \frac{25}{Q} - 4Q = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{25}{Q} = 4Q \Longrightarrow 4Q^2 = 25 \Longrightarrow Q = \sqrt{\frac{25}{4}} \Longrightarrow Q = \frac{5}{2} \Longrightarrow Q = 2.5$$

$$\Longrightarrow Q = 2.5$$

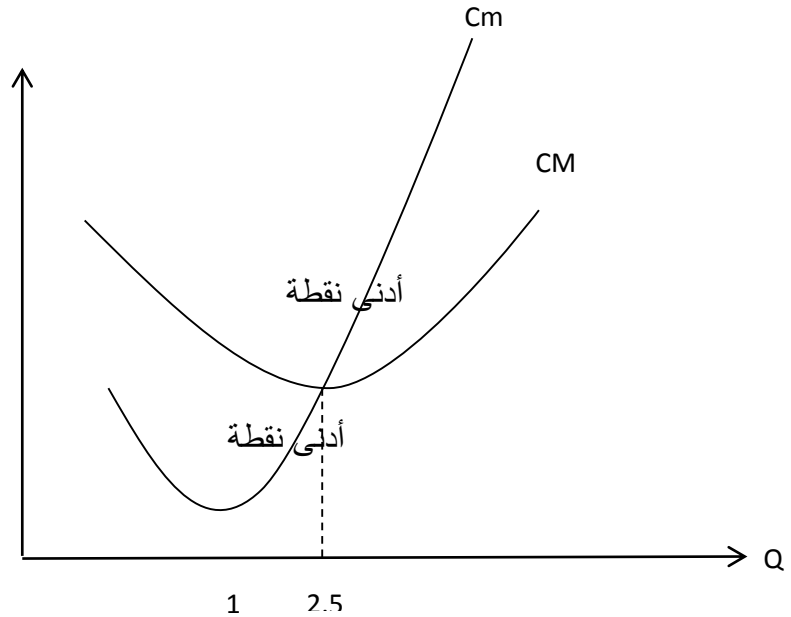
$$CM = \frac{25}{2.5} + 4(2.5) + 6 \Longrightarrow CM = 26$$

$$Cm = 8(2.5) + 6 \Longrightarrow Cm = 26$$

العلاقة بين التكلفة الحدية والمتوسط مع الرسم:

5	4	3	2.5	2	1	Q
31	28.25	26.33	26	26.5	35	CM
46	38	30	26	22	14	Cm

منحنى التكلفة المتوسطة الكلية والمتغيرة والحدية



منحنى التكاليف الحدية يتناقص في البداية إلى أن يصل إلى أدنى نقطة عند $Q = 1$ بعدها يتزايد منحنى التكلفة الحدية وعندما يكون متصاعد يقطع منحنى التكلفة المتوسطة عند أدنى نقطة لها عند $Q = 2.5$.

التمرين 11:

لمؤسسة امكانية لاختيار بين دالتي للإنتاج هما:

$$Q = L^{0,25}K^{0,25}$$
$$Q = LK$$

إذا علمت أن سعر وحدة من X يساوي P ودالة التكلفة للدالتين هي $CT = 10K + 4L$ أوجد التكلفة الكلية والحدية ثم بين أحسن دالة للإنتاج

في الفترة الطويلة:

يجب البحث في البداية عن الدوال التالية:

- معادلة المسار التوسعي
- دالة الإنتاج
- دالة التكاليف

إيجاد معادلة المسار التوسعي:

لا يجاد معادلة المسار التوسعي يمكن اختيار أي طريقة سواء تعظيم الربح او تقليل التكاليف او تعظيم دالة الإنتاج وفيما يلي سنختار طريقة تعظيم الربح:

$$\boldsymbol{Max\pi = PQ - CT} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{Max\pi} = (L^{0,25}K^{0,25})\boldsymbol{P} - 4L - 10K$$

وحل هذه الدالة يتمثل في:

الشرط اللازم:

ويتمثل في انعدام المشتقات الجزئية الأولى لدالة الهدف بالنسبة لجميع المتغيرات كما يلي:

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = 0 \Rightarrow (0.25L^{-0,75}K^{0,25})P - 4 = 0 \dots\dots\dots\dots (1)$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = 0 \Rightarrow (0.25L^{0,25}K^{-0,75})P - 10 = 0 \dots\dots\dots\dots (2)$$

بقسمة $\frac{1}{2}$ نتحصل على:

$$\frac{(0.25L^{-0,27}K^{0,25})P}{(0.25L^{0,25}K^{-0,27})P} = \frac{4}{10}$$

وبالاختزال نحصل على:

$$\frac{L^{-0,75}K^{0,25}}{L^{0,25}K^{-0,75}}=\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{K^{0,75}K^{0,25}}{L^{0,25}L^{0,75}}=\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{K}{L}=\frac{2}{5}\Rightarrow 5K=2L$$

ومنه

$$K=\frac{2L}{5}\dots\dots\dots(3)$$

- معادلة المسار التوسعي $K=\frac{2L}{5}$ 1
- دالة الإنتاج $Q=L^{0,25}K^{0,25}$ 2
- دالة التكاليف $CT=4L+10K$ 3

بتعويض 1 في 2 نجد:

$$Q=L^{0,25}\left(\frac{2L}{5}\right)^{0,25}\Rightarrow Q=L^{0,25}L^{0,25}\left(\frac{2}{5}\right)^{0,25}\Rightarrow Q=\left(\frac{2}{5}\right)^{0,25}L^{0.5}\Rightarrow L^{0.5}=\frac{Q}{\left(\frac{2}{5}\right)^{0,25}}$$

لكي نحذف الاس من L نضرب الطرفين في مقلوب الاس أي $\frac{1}{0.5}=2$

$$(L^{0.5})^{\frac{1}{0.5}}=\left(\frac{Q}{\left(\frac{2}{5}\right)^{0,25}}\right)^{\frac{1}{0.5}}\Rightarrow(L^{0.5})^2=\left(\frac{Q}{\left(\frac{2}{5}\right)^{0,25}}\right)^2$$

$$\Rightarrow L=\frac{Q^2}{\sqrt{\frac{2}{5}}}\dots\dots 4$$

بتعويض 1 في 3 نجد:

$$CT=4L+10\left(\frac{2L}{5}\right)\Rightarrow CT=4L+4L\Rightarrow CT=8L\dots\dots..5$$

$$CT=8L\dots\dots..5$$

بتعويض 4 في 5 نجد:

$$CT=8\left(\frac{Q^2}{\sqrt{\frac{2}{5}}}\right)\Rightarrow CT=8\sqrt{\frac{5}{2}}Q^2\Rightarrow CT=8\sqrt{\frac{5}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}Q^2\Rightarrow CT=8\frac{\sqrt{10}}{2}Q^2$$

$$\Rightarrow CT=4\sqrt{10}Q^2$$

بمعرفة صيغة التكلفة الكلية يمكن إيجاد الدوال المشتقة :

التكلفة المتوسطة الكلية CM:

$$CM = \frac{CT}{Q} = \frac{4\sqrt{10}Q^2}{Q} \Longrightarrow CM = 4\sqrt{10}Q$$

التكلفة الحدية Cm:

$$Cm = \frac{\partial CT}{\partial Q} = 8\sqrt{10}Q$$

يجب البحث في البداية عن الدوال التالية:

- معادلة المسار التوسعي
- دالة الإنتاج
- دالة التكاليف

إيجاد معادلة المسار التوسعي للدالة : $Q = LK$

وفيما يلي سنختار طريقة تعظيم الربح:

$$\boldsymbol{Max\pi = PQ - CT} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{Max\pi} = (\boldsymbol{LK})\boldsymbol{P} - 4L - 10K$$

وحل هذه الدالة يتمثل في:

الشرط اللازم:

ويتمثل في انعدام المشتقات الجزئية الأولى لدالة الهدف بالنسبة لجميع المتغيرات كما يلي:

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = 0 \Rightarrow (K)P - 4 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = 0 \Rightarrow (L)P - 10 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

بقسمة $\frac{1}{2}$ نتحصل على:

$$\frac{(K)P}{(L)P} = \frac{4}{10}$$

وبالاختزال نحصل على:

$$\Longrightarrow \frac{K}{L} = \frac{2}{5} \Longrightarrow 5K = 2L$$

ومنه

$$K = \frac{2L}{5} \cdots\cdots (3)$$

- معادلة المسار التوسعي $K = \frac{2L}{5}$ 1
- دالة الإنتاج $Q = LK$ 2

- دالة التكاليف $CT = 4L + 10K$ 3

بتعويض 1 في 2 نجد:

$$Q = L\left(\frac{2L}{5}\right) \Rightarrow Q = \frac{2}{5}L^2 \Rightarrow L^2 = \frac{Q}{\frac{2}{5}} \Rightarrow L^2 = \frac{5Q}{2} \Rightarrow L = \sqrt{\frac{5Q}{2}} \Rightarrow L = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\sqrt{Q}$$

$$\Rightarrow L = \frac{\sqrt{10}}{2}Q^{0.5} \dots\dots\dots 4$$

بتعويض 1 في 3 نجد:

$$CT = 4L + 10\left(\frac{2L}{5}\right) \Rightarrow CT = 4L + 4L \Rightarrow CT = 8L \dots\dots.5$$

$$CT = 8L \dots\dots.5$$

بتعويض 4 في 5 نجد:

$$CT = 8\frac{\sqrt{10}}{2}Q^{0.5} \Rightarrow CT = 4\sqrt{10}Q^{0.5}$$

$$\Rightarrow CT = 4\sqrt{10}Q^{0.5}$$

بمعرفة صيغة التكلفة الكلية يمكن إيجاد الدوال المشتقة :

التكلفة المتوسطة الكلية CM:

$$CM = \frac{CT}{Q} = \frac{4\sqrt{10}Q^{0.5}}{Q} \Rightarrow CM = 4\sqrt{10}Q^{-0.5}$$

التكلفة الحدية Cm:

$$Cm = \frac{\partial CT}{\partial Q} = 2\sqrt{10}Q^{-0.5}$$

التمرين 11:

هذه الدالة من دوال غوب دوغلاس لأنها من الشكل $Q = AK^{\beta}L^{\alpha}$، بحيث $E_L = \alpha$ و $E_K = \beta$ بما أن الدالة من دوال كوب دوغلاس فهي متجانسة من الدرجة الأولى $n = \alpha + \beta = 1$ والإنتاج يمر بمرحلة ثبات غلة الحجم.

ايجاد الكميات التوازنية:

$$Min\mathcal{L} = Min\left(LP_L + KP_K + \cdots + nP_n + \lambda\left(Q_0 - F(L, K, \dots\dots\dots, n)\right)\right)$$
$$Min\mathcal{L} = 2L + 6K + \lambda(5280 - 100L^{0.4}K^{0.6})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0 \Rightarrow 2 - 40\lambda L^{-0.6}K^{0.6} = 0 \Longrightarrow 2 = 40\lambda L^{-0.6}K^{0.6} \dots\dots\dots\dots (1)$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0 \Rightarrow 6 - 60\lambda L^{0.4}K^{-0.4} = 0 \Longrightarrow 6 = 60\lambda L^{0.4}K^{-0.4} \dots\dots\dots\dots (2)$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow 5280 - 100L^{0.4}K^{0.6} = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

بقسمة (1) على (2) نجد:

$$\frac{40\lambda L^{-0.6}K^{0.6}}{60\lambda L^{0.4}K^{-0.4}} = \frac{2}{6} \Longrightarrow \frac{2L^{-0.6}K^{0.6}}{3L^{0.4}K^{-0.4}} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \frac{K^{0.6}K^{0.4}}{L^{0.4}L^{0.6}} = \frac{1}{2}$$

بالاختزال نجد:

$$\frac{K}{L} = \frac{1}{2} \Longrightarrow K = \frac{L}{2} \dots\dots (4)$$

وبتعويض (4) في (3) نجد:

$$5280 - 100L^{0.4}\left(\frac{L}{2}\right)^{0.6} = 0 \Longrightarrow 5280 - 100L^{0.4}L^{0.6}\left(\frac{1}{2}\right)^{0.6} = 0$$
$$\Longrightarrow 5280 - 66.07L = 0 \Longrightarrow 5280 = 66.07L \Longrightarrow L = \frac{5280}{66.07}$$

ومنه:

$$L \approx 80$$

وعليه:

$$K = \frac{L}{2} \Longrightarrow K = \frac{80}{2} = 40$$

وبالتالي الموازنة المخصصة للإنتاج هي:

$$CT = LP_L + KP_K \Longrightarrow CT = 2L + 6K \Longrightarrow CT = 160 + 240 = 400$$

العلاقة بين $TMST_{LK}$ والانتاجية الحدية للعمل ورأس المال:

$$TMST_{LK} = -\frac{Pm_L}{Pm_K}$$

حساب المعدل الحدي للاحلال:

$$TMST_{L,K} = -\frac{P_L}{P_K} = -\frac{2}{4}$$

حساب المرونات الجزئية لكل عنصر انتاجي:

بما أن هذه الدالة من دوال غوب دوغلاس فإنها تكتب من الشكل $Q = AK^{\beta}L^{\alpha}$

بحيث $E_L = \alpha$ و $E_K = \beta$

إذن: $E_L = 0{,}4$ و $E_K = 0{,}6$

حساب المرونة الكلية:

$$E_T = E_L + E_K = 0{,}4 + 0{,}6 = 1$$

قدر زيادة الانتاج او نقصانه المتأتية من زيادة العمل بـ 10% ونقصان حجم راس المال بـ 5%:

من خلال قانون المرونات الجزئية لدينا:

$$E_L = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta L}{L}} = \frac{\Delta Q}{\Delta L}\ \frac{L}{Q}$$

$$E_K = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta K}{K}} = \frac{\partial Q}{\partial K}\ \frac{K}{Q}$$

بحيث زيادة العمل بـ *7* % معناه:

$$\frac{\Delta L}{L} = 7\%$$

ومنه نسبة زيادة الانتاج $\frac{\Delta Q}{Q}$ المتأتية من زيادة العمل بـ 10% تحسب كما يلي:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = E_L \cdot \frac{\Delta L}{L} \Longrightarrow \frac{\Delta Q}{Q} = (0{,}4)(7\%) \Longrightarrow \frac{\Delta Q}{Q} = 2.8\%$$

ومنه فإنتاج يزيد بـ 2.8% عند زيادة العمل بـ 7%

نقصان راس المال بـ 3% معناه:

$$\frac{\Delta K}{K} = -3\%$$

ومنه نسبة زيادة الانتاج $\frac{\Delta Q}{Q}$ المتأتية من نقصان رأس المال بـ 5% تحسب كما يلي:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = E_K \cdot \frac{\Delta K}{K} \Longrightarrow \frac{\Delta Q}{Q} = (0{,}6)(-3\%) \Longrightarrow \frac{\Delta Q}{Q} = -1{,}8\%$$

والتغير الحاصل في الانتاج الكلي المتأتي من زيادة العمل بـ*7* % ونقصان رأس المال بـ *3*% يحسب كما يلي:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \left(\frac{\Delta Q}{Q}\right)_L + \left(\frac{\Delta Q}{Q}\right)_K = 2{,}8\% - 1{,}8\% = 1\%$$

حساب الربح:

$$\boldsymbol{\pi = RT - CT \Longrightarrow \pi = PQ - CT \Longrightarrow \pi = 100(5280) - 400 \Longrightarrow \pi = 527600}$$

$\boldsymbol{K = 20}$ حدد دالة التكاليف في الفترة القصيرة وعين جميع الدوال المستقلة

في الفترة القصيرة:

دالة التكاليف في الفترة القصيرة:

$$Q = 100L^{0,4}(20)^{0,6} \Longrightarrow Q = 603.42L^{0,5}$$

$$\Longrightarrow (L^{0,4})^{\frac{1}{0.4}} = \left(\frac{Q}{603.42}\right)^{-0.4} \Longrightarrow L = \frac{Q^{-0.4}}{603.42}$$

وبما أن دالة التكاليف تكتب من الشكل:

$$CT = P_L L + P_K K \Longrightarrow CT = CV + CF$$

بحيث

$$CF = P_K K = (20)(2) = 40$$

وبتعويض قيمة L وCF في دالة التكاليف نجد:

$$CT = 6\left(\frac{Q^{-0.4}}{603.42}\right) + 40 \Longrightarrow CT = \frac{Q^{-0.4}}{100.67} + 40$$

ومنه دالة التكاليف في الفترة القصيرة هي:

$$CT = \frac{Q^{-0.4}}{100.67} + 40$$

التكلفة المتوسطة الكلية CM:

$$CM = \frac{CT}{Q} = \frac{CT = \frac{Q^{-0.4}}{100.67} + 40}{Q} \Longrightarrow CM = \frac{40}{Q} + \frac{Q^{-1.4}}{100.67}$$

أو

$$CM = CFM + CVM \Longrightarrow CM = \frac{40}{Q} + \frac{Q^{-1.4}}{100.67}$$

التكلفة الحدية Cm:

$$Cm = \frac{\partial CT}{\partial Q} = 0.4\frac{Q^{-1.4}}{100.67}$$

أو

$$Cm = \frac{\partial CV}{\partial Q} = 0.4\frac{Q^{-1.4}}{100.67}$$

في الفترة الطويلة:

يجب البحث في البداية عن الدوال التالية:

- معادلة المسار التوسعي $K = \frac{L}{2}$ تم حسابها سابقا.....1
- دالة الإنتاج $Q = 100L^{0.4}K^{0.6}$.....2
- دالة التكاليف $CT = 2L + 6K$.....3

بتعويض 1 في 2 نجد:

$$Q = 100L^{0.4}\left(\frac{L}{2}\right)^{\mathbf{0.6}} \Longrightarrow \boldsymbol{Q} = 100L^{0.4}\boldsymbol{L^{0.6}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathbf{0.6}} \Longrightarrow \boldsymbol{Q = 65.97L}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{L = \frac{Q}{65.97}} \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{4}$$

بتعويض 1 في 3 نجد:

$$CT = 2L + 6K \Longrightarrow CT = 2L + 6\left(\frac{L}{2}\right) \Longrightarrow CT = 2L + 3L$$

$$\Longrightarrow CT = 5L \dots\dots\dots 5$$

بتعويض 4 في 5 نجد:

$$CT = 5\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{\mathbf{65.97}}\right) \Longrightarrow CT = \frac{Q}{13.19}$$

ومنه دالة التكاليف في الفترة الطويلة:

$$CT = \frac{Q}{13.19}$$

اشتقاق دوال التكاليف:

التكلفة المتوسطة الكلية $\boldsymbol{CM}$:

$$CM = \frac{CT}{Q} = \frac{\frac{Q}{13.19}}{Q} \Longrightarrow CM = \frac{1}{13.19}$$

التكلفة الحدية $\boldsymbol{Cm}$:

$$Cm = \frac{\partial CT}{\partial Q} = \frac{1}{13.19}$$

التمرين 12:

التكاليف الثابتة

هي التكاليف التي لا تتغير بتغير حجم الانتاج، حيث تمثل تكاليف عناصر الانتاج الثابتة المستخدمة في العملية الانتاجية. وهي تكاليف تتحملها المؤسسة سواء أنتجت أم لم تنتج مثل: الإيجار، ثمن الآلات، فواتير الكهرباء...إلخ. وبالتالي هي التكاليف التي لابد على المؤسسة أن تتحملها حتى لو كان الانتاج معدوما. ونرمز لها $\boldsymbol{CF}$. ومنه حسب المثال

$$\boldsymbol{CF = 2}$$

التكاليف المتغيرة

وهي التكاليف المرتبطة بحجم الانتاج، فتزداد بزيادته وتنعدم بانعدامه. فإذا كان الانتاج يساوي صفر $Q = 0$ فإن التكاليف المتغيرة تكون معدومة$CV = 0$. لهذا فهناك علاقة طردية بين تغير حجم الانتاج والتكاليف المتغيرة، فكلما زاد الانتاج ارتفعت معه التكاليف المتغيرة، والعكس صحيح بحيث تعبر التكاليف المتغيرة عن العلاقة الموجودة بينها وبين حجم الانتاج بحيث تعير دالة التكاليف المتغيرة عن الدالة ذات تابع حجم الانتاج $CV = F(Q)$ وحسب المثال:

$$\boldsymbol{CV} = \frac{1}{2}Q^3 - 3Q^2 + 7Q$$

اثبات ان التكلفة المتوسطة متناقصة ثم متزايدة

$$\boldsymbol{CVM} = \frac{1}{2}Q^2 - 3Q + 7$$

حساب المشتقة الأولى لدالة التكلفة المتغيرة المتوسطة

$$CVM' = Q - 3 = 0 \Longrightarrow Q = 3$$

حساب المشتقة الثانية لدالة التكلفة المتوسطة المتغيرة

$$\boldsymbol{CVM'' = 1 > 0}$$

وبالتالي هناك نهاية صغرى

المطلب الثالث: تمارين للحل حول تكاليف الانتاج

التمرين01:

أكمل الجدول التالي بحساب جميع التكاليف المشتقة في الفترة القصيرة

Q	0	1	2	3	4	5	6
CF	120	120	120	120	120	120	120
CV	0	60	80	90	110	150	240

التمرين 02:

إذا كانت تغيرات التكلفة والانتاج لأحد المؤسسات الانتاجية معطاة حسب بيانات الجدول التالي:

Cm	CM	CVM	CFM	CT	CV	CF	Q
					0		0
		12		32			1
					20		2
4							3
	12						4
				60			5
					54		6
18							7
					89		8
		15.33					9

المطلوب: أتمم الجدول التالي بناءا على المعلومات المتوفرة فيه.

التمرين 03:

تقوم مؤسستين انتاجيتين بإنتاج السلعة Q وفق دوال التكاليف التالية:

$$CT_1 = 0{,}25Q^3 - 40Q^2 + 2500Q$$

$$CT_2 = 0{,}35Q^3 - 59{,}6Q^2 + 3420Q + 4000$$

احدى المؤسستين ليس بمقدورها في الوقت الحاضر تغيير كل عوامل الانتاج اما المؤسسة الاخرى فقد قامت بتغيير جميع عناصر الانتاج لديها: **المطلوب:**

1. أيهما تمثل دالة التكاليف للمدى القصير وأيهما تمثل دالة التكاليف للمدى الطويل؟ اشرح ذلك؟
2. احسب جميع التكاليف الجزئية، المتوسطة والحدية بالنسبة للدالتين؟

التمرين 04:

لتكن دالة التكاليف التالية

$$CT_2 = 5Q^3 - 20Q^2 + 45Q + 400$$

1. ما هي الفترة التي تمر بها هذه الدالة؟
2. احسب جميع التكاليف المشتقة، المتوسطة والحدية؟

التمرين 05:

لتكن دالة الانتاج من الشكل: $\boldsymbol{Q = 2LK}$ ، اذا كان لهذا المنتج ميزانية محددة بـ **600 ون** يريد انفاقها علىKوL ، واسعار عوامل الانتاج هي $P_L = 8$ و $P_K = 10$

1. اوجد معادلة المسار التوسعي لهذه المؤسسة؟ ثم اوجد الكميات المثلى التي تعظم الانتاج؟
2. احسب قيمة المعدل الحدي للإحلال التقني؟
3. احسب قيمة الناتج الحدي والمتوسط لكل عنصر من عناصر الانتاج؟
4. اوجد مرونة الانتاج بالنسبة لكل عنصر من عناصر الانتاج؟
5. حدد المرحلة التي يمر بها الناتج الكلي؟
6. إذا كان $P = 100$ احسب مقدار الربح الذي تحصل عليه المنتج؟

مع نفس الدالة السابقة:

إذا كان قيمة $K = 30$ أوجد دالة التكاليف بدلالة حجم الإنتاج في الفترة القصيرة؟

التمرين 06:

إذا كانت دالة الانتاج مبينة حسب الدالة التالية:

$$Q = 2L^{0,5}K^{0,5}$$

في الفترة القصيرة قدر حجم عنصر رأس المال $K = 10$ وسعري العنصريين الانتاجيين $P_L = 8$ و $P_K = 2$

- أوجد دالة التكاليف في الفترة القصيرة؟
- أوجد دالة التكاليف في الفترة الطويلة؟

الخلاصة

من خلال ما تقدم يمكن القول ان نظرية الانتاج بدراسة تصرفات الوحدة المنتجة باعتبارها الوحدة الاقتصادية المسؤولة عن العملية الانتاجية بغرض القيام بإنتاج كمية معينة من السلع والخدمات عن طريق استخدام مجموعة من عناصر الانتاج بالطريقة المثلى بهدف تحقيق أقصى ربح ممكن. ويطلق على العلاقة بين الانتاج والكميات المستخدمة من عناصر الانتاج بدالة الانتاج. والهدف النهائي من دراسة سلوك المنتج هو اشتقاق دالة العرض المتمثلة في الجانب الثاني المحدد لتوازن السوق.

كما تسعى المؤسسة لتعظيم أرباحها، والربح يأتي من الفرق بين قيمة المخرجات وقيمة المدخلات، فأما قيمة المخرجات فهي تمثل الايراد الذي يحصل عليه المشروع من بيع قيمة منتجاته، أما المدخلات فهي التكلفة التي يتحملها المشروع.

ولتسهيل استيعاب الطالب لنظرية الإنتاج والتكاليف وضعنا مجموعة من التمارين مع حلولها كما عززنا ذلك بمجموعة من التمارين لحلها من طرف الطلبة.

الفصل الثالث

تمهيد

يتعرض هذا الفصل لتمارين حول توازن السوق من خلال دراسة تمارين وحلولها حل العرض والطلب السوقي بصورة منفصلة وتمارين حول العلاقة بينهما من خلال توازن السوق.

ويتحدد هذا الرابط من طريق تفاعل قوى العرض والطلب فيتحدد كل من سعر وكمية التوازن في السوق.

وعليه قسمنا هذا الفصل إلى ثلاث مباحث:

المبحث 01: الطلب السوقي.

المبحث 02: العرض السوقي.

المبحث 03: التوازن في السوق.

المبحث الأول: الطلب ومرونته

يتعرض هذا المبحث لدراسة طلب المستهلك على سلعة أو خدمة ما لتحديد قانون الطلب، بالإضافة إلى معرفة فائض المستهلك من خلال طرح مجموعة من التمارين المتنوعة مع حلولها. وبتحديدنا لدالة الطلب يتحدد الجزء الأول الذي يحدد لنا توازن السوق.

المطلب الأول: تمارين حول الطلب

فيما يلي مجموعة من التمارين حول الطلب ومرونته.

التمرين 01:

ليكن جدول الطلب الفردي على السلعة X خلال فترة زمنية معينة يأخذ الشكل التالي:

P_X	1	2	3	4	5	6
Q_X	60	40	30	24	20	18

1. أرسم منحنى الطلب الفردي؟
2. على افتراض حدوث زيادة في الدخل النقدي لدة الفرد مع بقاء العوامل الأخرى ثابتة، أضبح جدول الطلب الفردي الجديد كالتالي:

P_X	1	2	3	4	5	6
Q_X	100	70	55	46	40	38

1. أرسم منحنى الطلب الفردي الجديد؟
2. ماذا يحدث لو انخفض السعر من 5 إلى 3 قبل أن يزيد دخل الفرد؟
3. ماذا يحدث لو ارتفع الدخل النقدي وفي نفس الوقت انخفض سعر السلعة من 5 إلى 3؟

التمرين 02:

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما لمستهلك صنف رجل على الشكل التالي: $Q_X = 3 - 0.25P_X$ ودالة الطلب على نفس السلعة من طرف مستهلك صنف امرأة من الشكل: $Q_X = 4 - 0.5P_X$ إذا كان السوق يحتوي على 10000 رجل وامرأة فما هو الطلب السوقي عندما يكون السعر السائد في السوق هو 6 ون؟

التمرين03:

انطلاقا من جدول الطلب على السلعة X :

P_X	1	2	3	4	5	6
Q_X	12	10	8	6	4	2

1. مثل بيانيا تغيرات الطلب على الساعة X؟
2. أوجد الصيغة الرياضية لدالة الطلب على السلعة X؟

3. أوجد قيمة المرونة عند $P_X = 6$ فسر النتيجة اقتصاديا؟
4. أحسب مرونة الطلب السعرية عن ارتفاع السعر من 2 إلى 4 ثم عند انخفاض السعر من 4 إلى 2 ماذا تلاحظ؟ ما هو الحل؟

التمرين 04:

يبين الجدول التالي الكميات المطلوبة من الشاي والسكر من طرف عائلة خلال فترة زمنية معينة .

	السعر	الكمية
السكر	5	20
الشاي	10	40

نفترض أ ن السكر قد ارتفع من 5 إلى 10 في حين بقي سعر الشاي ثابتا جميع العوامل الأخرى المحددة للطلب هي الأخرى ثابتة. والتغيرات الحالية نوجزها في الجدول التالي:

	السعر	الكمية
السكر	10	15
الشاي	10	35

وضح بيانيا هذه التغيرات مع تقديم الشرح؟

التمرين 05:

لتكن دالة الطلب لأحد المستهلكين من الشكل: $Q_X = P_X^{-0.5} P_Y^{-0.3} R^{0.75}$، بحيث P_X هو سعر السلعة X و P_Y هو سعر السلعة Y و R الدخل المخصص للإنفاق.

1. احسب مرونة الطلب السعرية مقدما تفسيرا اقتصاديا لها؟
2. احسب المرونة الدخلية مبينا نوع السلعة X مقدما تفسيرا اقتصاديا لها؟
3. احسب المرونة التقاطعية مبينا نوع العلاقة الموجودة بين السلعتين X و Y مقدما تفسيرا اقتصاديا لها؟
4. أوجد التغيرات التي تحدث على الطلب عند كل تغير مما يلي؟ زيادة P_X بنسبة 10% ، زيادة سعر P_Y بنسبة 30% ، زيادة الدخل بنسبة 20%؟

التمرين 06:

يخضع الطلب على السلعة X للعوامل التالية: سعر السلعة $p_X = 4$ وسعر السلعة الأخرى $P_Y = 10$ و الدخل $R = 140$ حيث يمكن كتابة دالة الطلب على الشكل التالي:

$$X = F(Px, P_Y, R) = 140 - 15p_X - 3P_Y + 2R$$

1. حدد طبيعة السلعة x؟
2. ماهي العلاقة التي تربط بين السلعتين Y و X؟
3. هل الطلب على السلعة X مرن؟

2. أوجد التغيرات النسبية التي تحدث على الطلب عند زيادة Px بـ 10% .

التمرين 07:

1. لتكن دالة الطلب التالية: $Q_X = \frac{R}{5P_X}$

أوجد مرونة الطلب السعرية؟

2. إذا كان دخل المستهلك 1500 دج وكان الطلب على السلعة X هو 20 وحدة عند ارتفاع الدخل إلى 1800 دج فإن الكمية التي يشتريها المستهلك 25 وحدة. أحسب مرونة الطلب الدخلية وحدد نوع السلعة X؟

3. لتكن دالة الطلب من الشكل: $Q_X = P_X^{-0.1} P_Y^{0.4}$ أحسب مرونة الطلب التقاطعية وحدد العلاقة بين السلعتين X و Y ؟

التمرين 08:

يمثل الجدول التالي تغير الكميات المطلوبة للسلعة X عند تغير السعر

PX	0	1	2	3	4	5	6	7
QX	8000	7000	6000	5000	4000	3000	2000	1000

المطلوب:

1. أحسب مرونة الطلب السعرية عندما يرتفع السعر من 5 إلى 7؟ وفسر النتيجة؟
2. أحسب مرونة الطلب السعرية عندما ينخفض السعر من 7 إلى 5؟ وفسر النتيجة؟
3. ماذا تلاحظ؟ ما هي طريقة حساب المرونة التي تمكن من الحصول على نتيجة أفضل؟
4. اعد حساب المرونة بهذه الطريقة عند ارتفاع السعر من 5 إلى 7 وعند انخفاض السعر؟

التمرين09:

اذا كانت دالة الطلب السوقي من الشكل: $Q = 100 - 5P$

1. أوجد سعر الطلب اذا كانت الكمية المطلوبة 12.5 ثم 25 وحدة؟
2. أوجد الكمية المطلوبة اذا كان السعر 2 ثم 7 ثم 15 ون؟

التمرين 10:

اشرح العبارة التالية:

1. زيادة في الطلب واعطي مثالا على ذلك؟
2. انخفاض في الطلب واعطي مثال على ذلك؟
3. زيادة في الكمية المطلوبة واعطي مثال على ذلك؟

التمرين 11:

1. اشرح المعنى الاقتصادي لقيم مرونة الطلب السعرية التالية: (-0.5) ، (∞)، (-6)، 0

2. أوجد مرونة الطلب السعرية عند انخفاض الكمية المطلوبة من سلعة X بمقدار 35%، عندما يرتفع السعر بنسبة 20% ؟

التمرين 12:

اذا كانت دالة الطلب على الأسماك هي $Q = 180 + 0.5P$، بفرض ان متوسط أسعار هذه الأسماك قد ارتفع من $P = 250$ الى $P = 350$

1. احسب مرونة الطلب على هذه الأسماك؟

التمرين 13:

يتكون الطلب على السلعة X من ثلاث مستهلكين والكمية المشتراة من طرف كل مستهلك معطاة حسب الجدول التالي:

0	2	4	8	10	12	P_X
30	25	20	10	5	0	Q_{D1}
75	62.5	50	25	10	0	Q_{D2}
15	12.5	10	5	5	0	Q_{D3}

1. احسب الطلب السوقي للسلعة X؟
2. أرسم منحنى الطلب السوقي على السلعة X؟
3. اكتب العبارة الجبرية لدالة الطلب؟
4. عرف مرونة الطلب السعرية للسلعة واحسب قيمتها عند سعر 8 ون مع تفسير النتيجة؟
5. بين بصفة عامة ان مرونة الطلب السعرية لا تساوي ميل دالة الطلب؟
6. اذا تغير سعر السلعة X من 8 الى 6 احسب مرونة القوس؟
7. إذا كانت القيم التالية لسعر السلعة X هي 10، 8، 6، 4، 2 احسب الانفاق الكلي للمستهلكين عند هذه الأسعار وذلك في الجدول؟
8. وضح العلاقة بين تغير الانفاق الكلي وقيمة مرونة الطلب؟
9. لنفترض ان المستهلكين الثلاثة ينفقون كل دخلهم في شراء السلعة X ولنفرض ان دخلهم اليومي يتغير من 200 الى 320 الة 360 ون كما نفترض أن سعر السلعة X ثابت يساوي 8 ون، ماهي الكميات المشتراة من السلعة X عند مستويات الدخل المختلفة؟ احسب مرونة الطلب الدخلية عند $R_1 = 200$ ، $R_2 = 320$ وما هي الطبيعة الاقتصادية للسلعة X؟

التمرين 14:

ترى المصلحة التجارية للمؤسسة المنتجة للسلعة X أن ارتفاع حجم مبيعاتها مرتبط ببيع السلعتين Y و Z المنتجين من طرف مؤسسة أخرى، لذا قامت بدراسة للسوق بهدف تحديد تأثيرات ارتفاع السعر بـ 1% بالنسبة لكل سلعة على الكميات المطلوبة من السلعة نفسها والكميات المطلوبة من السلع الأخرى وكانت نتائج الدراسة موضحة في الجدول التالي:

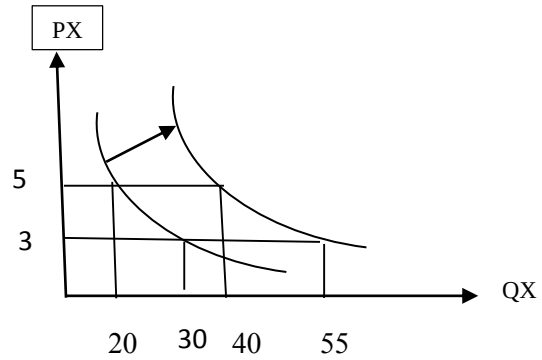
ارتفاع السعر بـ 1%	معامل المرونة		
	X	Y	Z
X	−2	1.5	0.02
Y	1.2	−1.9	0.2
Z	0.5	0.2	−0.7

استخرج من الجدول المرونات المتقاطعة التالية: $E_{Z,X}$، $E_{Z,Y}$، $E_{X,Y}$، $E_{X,Z}$، $E_{Y,X}$، $E_{Y,Z}$ موضحا العلاقة بين السلعتين المتقاطعتين؟

المطلب الثاني: حلول التمارين حول الطلب

سنستعرض فيما يلي حلول للتمارين السابقة حول الطلب السوقي ومرونته.

التمرين01:



- قبل زيادة الدخل الفردي لو انخفض السعر من 5 إلى 3 فإن المستهلك سينتقل على منحنى الطلب الأول نزولا حيث تزداد المية المطلوبة من 20 إلى 30 وحدة وهذا الانخفاض يبين لنا العلاقة العكسية الموجودة بين سعر السلعة والكمية المطلوبة (قانون الطلب) فكلما انخفض السعر زادت الكمية المطلوبة.
- عند ارتفاع الدخل مع بقاء السعر عند 5 فإن الطلب على السلعة X سيرتفع من 20 إلى 40 وحدة أي ينتقل المستهلك من الجدول الأول إلى الجدول الثاني ونقول في هذه الحالة أن الطلب

على السلعة X قد زاد وهذا ما نلاحظه من خلال الرسم البياني حيث انتقل منحنى الطلب إلى الأعلى.

- عند ارتفاع الدخل النقدي وفي نفس الوقت انخفض الدخل من 5 إلى 3 ون فالمستهلك على المنحنى 2 (الجدول الثاني) حيث ينتقل نزولا حسب قانون الطلب بحيث عند انخفاض السعر فأن الكمية المطلوبة سترتفع وعليه عند انخفاض السعر من 5 إلى 3 ون فإن الكمية المطلوبة سترتفع من 40 إلى 55 وحدة.

التمرين 02:

دالة الطلب على سلعة ما لمستهلك رجل من الشكل: $Q = 3 - 0.25\mathrm{P}$

دالة الطلب لـ 10000 رجل هي $10000Q \Longrightarrow Q_H = (3 - 0.25\mathrm{P})10000$

ودالة الطلب على نفس السلعة من طرف مستهلك مرأة على الشكل: $Q = 4 - 0.5\mathrm{P}$

دالة الطلب لـ 10000 امرأة هي $10000Q \Longrightarrow Q_F = (4 - 0.5\mathrm{P})10000$

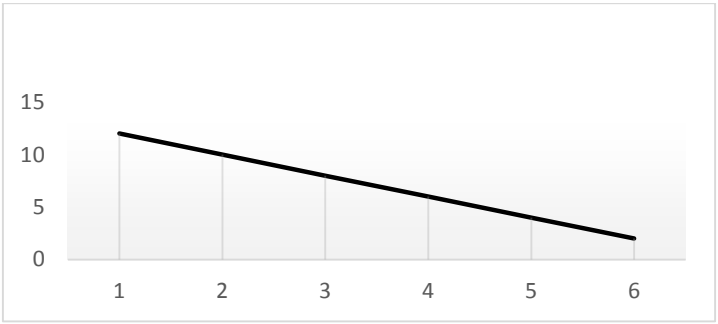
دالة الطلب السوقي للرجال والنساء هي

$$Q_M = Q_H + Q_F = (3 - 0.25\mathrm{P})10000 + (4 - 0.5\mathrm{P})10000 \Longrightarrow$$
$$Q_M = (3 - 0.25\mathrm{P} + 4 - 0.5\mathrm{P})10000 \Longrightarrow$$
$$Q_M = (7 - 0.75\mathrm{P})10000 \Longrightarrow Q_M = 70000 - 7500\mathrm{P}$$

- إذا كان السعر $P = 6$ فان الكمية المطلوبة هي:

$$Q_M = 70000 - 7500\mathrm{P} \Longrightarrow Q_M = 70000 - 7500(6) \Longrightarrow Q_M = 25000$$

التمرين03:



منحنى الطلب عبارة عن خط مستقيم وبالتالي دالة الطلب خطية من الشكل: $Q_X = a - bP_X$

ولتحديد الصيغة الرياضية نختار نقطتين عشوائيتين من الجدول لنكون جملة معادلتين

$$\begin{cases} 12 = a - b(1) \\ 2 = a - b(6) \end{cases}$$

نضرب المعادلة الأولى في (-1) نجد:

$$\begin{cases} -12 = -a + b(1) \end{cases}$$

$$2 = a - b(6)$$

ومنه بجمع المعادلتين نجد:

$$-10 = -5b \Longrightarrow b = \frac{-10}{-5} \Longrightarrow b = 2$$

ولحساب a يكفي تعويض b في إحدى المعادلتين نجد : $12 = a - 2 \Longrightarrow a = 14$ أو

$$2 = a - 2(6) \Longrightarrow a = 14$$

ومنه دالة الطلب تكتب من الشكل: $Q_X = 14 - 2P_X$

حساب قيمة المرونة عند $P_X = 6$

$$E_X = \frac{\partial Q_X}{\partial P_X} \cdot \frac{P_X}{Q_X} \Longrightarrow E_X = -2\frac{6}{14 - 2(6)} \Longrightarrow E_X = -6$$

حساب مرونة الطلب السعرية عن ارتفاع السعر من 2 إلى 4:

$$E_{PX} = \frac{\Delta Q_X}{\Delta P_X} \cdot \frac{P_X}{Q_X} = \frac{Q_{X2} - Q_{X1}}{P_{X2} - P_{X1}} \cdot \frac{P_{X1}}{Q_{X1}} = \frac{6 - 10}{4 - 2} \cdot \frac{2}{10} = -0.4$$

النتيجة: عندما يرتفع السعر بنسبة 1%، فإن الكمية المطلوبة ستنخفض بنسبة 0.4%.

حساب المرونة السعرية عند انخفاض السعر من 4 إلى 25:

$$E_{PX} = \frac{\Delta Q_X}{\Delta P_X} \cdot \frac{P_X}{Q_X} = \frac{Q_{X2} - Q_{X1}}{P_{X2} - P_{X1}} \cdot \frac{P_{X1}}{Q_{X1}} = \frac{10 - 6}{2 - 4} \cdot \frac{4}{6} = -1.33$$

النتيجة: عند انخفاض السعر بنسبة 1%، فإن الكمية المطلوبة سترتفع بنسبة 1.33%.

من خلال هذا المثال السابق يتبين لنا أن قيمة المرونة تختلف عند ارتفاع السعر وانخفاضه بنفس القيمة ويرجع السبب في ذلك إلى اختلاف الأساس عند حساب التغيرات النسبية في كل حالة فعند ارتفاع السعر كان الأساس $\left(\frac{2}{10}\right)$ وعند انخفاض السعر أصبح $\left(\frac{4}{6}\right)$. ولتجنب هذا الاختلاف يمكن استخدام مرونة القوس التي تستخدم متوسط السعرين ومتوسط الكميتين في حساب الأساس والتي تعرف بمرونة القوس ويمكن حسابها كما يلي:

$$E_P == \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{\frac{P_1 + P_2}{2}}{\frac{Q_1 + Q_2}{2}} = \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1} \cdot \frac{P_1 + P_2}{Q_1 + Q_2}$$

وتحسب المرونة السعرية كما يلي:

عند ارتفاع السعر من 2 إلى 4:

$$E_{PX} = \frac{\Delta Q_X}{\Delta P_X} \cdot \frac{P_X}{Q_X} = \frac{Q_{X2} - Q_{X1}}{P_{X2} - P_{X1}} \cdot \frac{P_{X1+}P_{X2}}{Q_{X1} + Q_{X2}} = \frac{6 - 10}{4 - 2} \cdot \frac{2 + 4}{6 + 10} = -0.75$$

النتيجة: عندما يرتفع السعر بنسبة 1%، فإن الكمية المطلوبة ستنخفض بنسبة 0.75%.

عند انخفاض السعر من 4 إلى 2:

$$E_{PX} = \frac{\Delta Q_X}{\Delta P_X} \cdot \frac{P_X}{Q_X} = \frac{Q_{X2} - Q_{X1}}{P_{X2} - P_{X1}} \cdot \frac{P_{X1+}P_{X2}}{Q_{X1} + Q_{X2}} = \frac{10 - 6}{2 - 4} \cdot \frac{2 + 4}{10 + 16} = -0.75$$

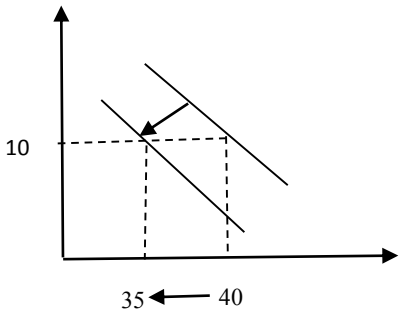
النتيجة: عند انخفاض السعر بنسبة 1%، فإن الكمية المطلوبة سترتفع بنسبة 0.75%.

وعليه نلاحظ أنه عند ارتفاع السعر أو انخفاضه فإن نسبة التغير في الكمية المطلوبة هي نفسها.

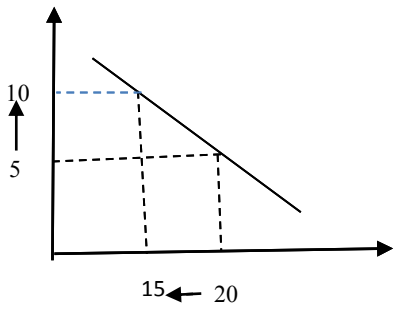
تمرين 04:

عند ارتفاع سعر السكر من 5 إلى 10ون فإن المستهلك وفق قانون الطلب سيقلل من استهلاكه للسكر فينتقل على المنحنى السكر من 20 إلى 15 وحدة ومع بقاء سعر الشاي ثابتا فإن الطلب على الشاي سينخفض وينتقل منحنى الطلب بالكامل إلى الأسفل من 40 إلى 35 .

ويرجع سبب انتقال منحنى الطلب على الشاي إلى الأسفل كون أن السكر والشاي هما سلعتين متكاملتين وبما أن السكر هو سلعة مكملة للشاي فإن أي زيادة في سعر السكر سيؤدي إلى انخفاض الطلب على الشاي. الشكل البياني التالي يبين ذلك:



منحنى الشاي



منحنى السكر

تمرين 05:

حساب المرونة السعرية:

$$E_{X,Y} = \frac{\partial Q_X}{\partial P_X} \cdot \frac{P_X}{Q_X} = -0.5 P_X^{-1.5} P_Y^{-0.3} R^{0.75} \frac{P_X}{P_X^{-0.5} P_Y^{-0.3} R^{0.75}} = -0.5$$

النتيجة: عند تغير سعر السلعة X بنسبة 1% فإن الكمية المطلوبة سيتغير بنسبة 0.5 %.

حساب المرونة الدخلية:

$$E_{X,Y} = \frac{\partial Q_X}{\partial R} \cdot \frac{R}{Q_X} = 0.75 P_X^{-0.5} P_Y^{-0.3} R^{0.75} \frac{R}{P_X^{-0.5} P_Y^{-0.3} R^{0.75}} = 0.75$$

بما أن $0 < E_R \leq 1$ فإن X سلعة عادية أو ضرورية.

النتيجة: عند تغير الدخل بنسبة 1% فإن الطلب سيتغير بنسبة 0.75 %.

حساب المرونة التقاطعية:

$$E_{X,Y} = \frac{\partial Q_X}{\partial P_Y} \cdot \frac{P_Y}{Q_X} = -0.3 P_X^{-0.5} P_Y^{-1.3} R^{0.75} \frac{P_Y}{P_X^{-0.5} P_Y^{-0.3} R^{0.75}} = -0.3$$

بما أن $E_{X,Y} < 0$ فالسلعتان X و Y هما سلعتان بديلتان.

النتيجة: عند تغير سعر السلعة Y بنسبة 1% فإن الطلب على السلعة X سيتغير بنسبة 0.3 % في اتجاهان متعاكسان.

التغيرات التي تحدث على الطلب:

عند زيادة P_X بنسبة 10%:

عند زيادة سعر السلعة X بنسبة 10% فإن الكمية المطلوبة ستنخفض بنسبة 0.5*10 %=5%.

زيادة الدخل بنسبة 20%:

عند زيادة الدخل بنسبة 10% فإن الطلب سيرتفع بنسبة 0.75*20%=15%.

زيادة سعر P_Y بنسبة 30%:

عند زيادة سعر السلعة Y بنسبة 30 % فإن الطلب على السلعة X سينخفض بنسبة 0.3*30%=9%.

التمرين 06:

1. طبيعة السلعة X أي حساب المرونة الدخلية:

$$E_R = \frac{\partial X}{\partial R} \cdot \frac{R}{X} = 2.\frac{R}{140 - 15p_X \ -3P_Y \ +2R}$$

$$E_R = 2.\frac{R}{140 - 15p_X \ -3P_Y \ +2R} \Longrightarrow E_R = 2.\frac{140}{140 - 15(4) - 3\ (10) \ +2(140)}$$

$$\Longrightarrow E_R = 2\frac{140}{330} \Longrightarrow E_R = 0.84$$

- اذا كانت $E_R > 1$ السلعة كمالية
- اذا كانت $0 < E_R \leq 1$ السلعة ضرورية (عادية)
- اذا كانت $E_R < 0$ السلعة رديئة
- بمأن $0 < E_R = 0.84 \leq 1$ ، فإن السلعة X هي سلعة عادية او ضرورية

2. العلاقة بين السلعة X و Y أي حساب المرونة التقاطعية:

$$E_{X,Y} = \frac{\partial X}{\partial P_Y} \cdot \frac{P_Y}{X} = (-3)\frac{10}{330} \Longrightarrow E_{X,Y} = -\frac{30}{330}$$

$$\Longrightarrow E_{X,Y} = -0.09$$

- اذا كانت $E_{X,Y} > 0$ السلعتان متبادلتان
- اذا كانت $E_{X,Y} < 0$ السلعتان متكاملتان
- اذا كانت $E_{X,Y} = 0$ السلعتان مستقلتان

بما أن $E_{X,Y} < 0$ فالسلعتان X و Y هما سلعتان متكاملتان

3. هل الطلب على السلعة X مرن حساب مرونة الطلب السعرية:

$$E_{PX} = \frac{\partial X}{\partial P_X} \cdot \frac{P_X}{X} \Longrightarrow E_{PX} = (-15)\frac{4}{330}$$

$$\Longrightarrow E_{PX} = -0.18$$

- **اذا كانت $|E_{PX}| < 1$** الطلب غير مرن

- **اذا كانت** $|E_{PX}| > \mathbf{1}$ الطلب مرن
- **اذا كانت** $|E_{PX}| = \mathbf{1}$ الطلب متكافئ المرونة

بما أن $|E_{PX} = -0.18| = 0.18 < \mathbf{1}$ الطلب غير مرن

4. التغيرات التي تحدث على الطلب عند زيادة السعر بـ 10%:

عند تغير السعر بنسبة 1%، فإن الكمية المطلوبة ستتغير بنسبة 0.18%.

وعليه عند تغير السعر بنسبة 10%، فإن الكمية المطلوبة ستتغير بنسبة 1.8%.

التمرين 07:

حساب مرونة الطلب السعرية:

$$E_P = \frac{\partial Q}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial P} = \frac{R'(5P_X) - R(5P_X)'}{(5P_X)^2} = \frac{-5R}{25(P_X)^2} = \frac{-R}{5(P_X)^2}$$

$$E_P = \frac{-R}{5(P_X)^2} \cdot \frac{P_X}{\frac{R}{5P_X}} = -1$$

وعليه نستنتج أنه عند تغير السعر بمقدار 1%، فإن الكمية المطلوبة ستتغير بمقدار 1% .

حساب مرونة الطلب الدخلية:

$$E_R = \frac{\Delta Q}{\Delta R} \cdot \frac{R}{Q} = \frac{Q_2 - Q_1}{R_2 - R_1} \cdot \frac{R_1}{Q_1} = \frac{25 - 20}{1800 - 1500} \cdot \frac{1500}{20} = 1.25$$

السلعة X هي سلعة كمالية لأن $E_R > 1$

النتيجة: عند ارتفاع الدخل بنسبة 1% فأن الطلب سيرتفع بنسبة 1.25%.

حساب المرونة التقاطعية:

$$E_{X,Y} = \frac{\partial Q_X}{\partial P_Y} \cdot \frac{P_Y}{Q_X} = 0.4P_X^{-0.1}P_Y^{-0.6}\frac{P_Y}{P_X^{-0.1}P_Y^{0.4}} = 0.4$$

بما أن $E_{X,Y} > 0$ فالسلعتان X و Y هما سلعتان متكاملتان.

النتيجة: عند تغير سعر السلعة X بنسبة 1% فإن الطلب على السلعة Y سيتغير بنسبة 0.4% .

التمرين 08:

الحل:

حساب المرونة السعرية عند ارتفاع السعر من 5 إلى 7:

$$E_{PX} = \frac{\Delta Q_X}{\Delta P_X} \cdot \frac{P_X}{Q_X} = \frac{Q_{X2} - Q_{X1}}{P_{X2} - P_{X1}} \cdot \frac{P_{X1}}{Q_{X1}} = \frac{1000 - 3000}{7 - 5} \cdot \frac{5}{3000} = -1.67$$

النتيجة: عندما يرتفع السعر بنسبة 1%، فإن الكمية المطلوبة ستنخفض بنسبة 1.67%.

حساب المرونة السعرية عند انخفاض السعر من 7 إلى 5:

$$E_{PX} = \frac{\Delta Q_X}{\Delta P_X} \cdot \frac{P_X}{Q_X} = \frac{Q_{X2} - Q_{X1}}{P_{X2} - P_{X1}} \cdot \frac{P_{X1}}{Q_{X1}} = \frac{3000 - 1000}{5 - 7} \cdot \frac{7}{1000} = -7$$

النتيجة: عند انخفاض السعر بنسبة 1%، فإن الكمية المطلوبة سترتفع بنسبة 7%.

من خلال هذا المثال السابق يتبين لنا أن قيمة المرونة تختلف عند ارتفاع السعر وانخفاضه بنفس القيمة ويرجع السبب في ذلك إلى اختلاف الأساس عند حساب التغيرات النسبية في كل حالة فعند ارتفاع السعر كان الأساس $\left(\frac{5}{3000}\right)$ وعند انخفاض السعر أصبح $\left(\frac{7}{1000}\right)$. ولتجنب هذا الاختلاف يمكن استخدام مرونة القوس التي تستخدم متوسط السعرين ومتوسط الكميتين في حساب الأساس والتي تعرف بمرونة القوس ويمكن حسابها كما يلي:

$$E_P == \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{\frac{P_1 + P_2}{2}}{\frac{Q_1 + Q_2}{2}} = \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1} \cdot \frac{P_1 + P_2}{Q_1 + Q_2}$$

وبالعودة إلى المثال السابق، فإن المرونة السعرية تحسب كما يلي:

عند ارتفاع السعر من 5 إلى 7:

$$E_{PX} = \frac{\Delta Q_X}{\Delta P_X} \cdot \frac{P_X}{Q_X} = \frac{Q_{X2} - Q_{X1}}{P_{X2} - P_{X1}} \cdot \frac{P_{X1+}P_{X2}}{Q_{X1} + Q_{X2}} = \frac{1000 - 3000}{7 - 5} \cdot \frac{5 + 7}{3000 + 1000} = -3$$

النتيجة: عندما يرتفع السعر بنسبة 1%، فإن الكمية المطلوبة ستنخفض بنسبة 3%.

عند انخفاض السعر من 7 إلى 5:

$$E_{PX} = \frac{\Delta Q_X}{\Delta P_X} \cdot \frac{P_X}{Q_X} = \frac{Q_{X2} - Q_{X1}}{P_{X2} - P_{X1}} \cdot \frac{P_{X1+}P_{X2}}{Q_{X1} + Q_{X2}} = \frac{3000 - 1000}{5 - 7} \cdot \frac{5 + 7}{3000 + 1000} = -3$$

النتيجة: عند انخفاض السعر بنسبة 1%، فإن الكمية المطلوبة سترتفع بنسبة 3%.

وعليه نلاحظ أنه عند ارتفاع السعر أو انخفاضه فإن نسبة التغير في الكمية المطلوبة هي نفسها.

التمرين09:

- إذا كانت الكمية المطلوبة $Q = 12.5$ فان سعر السوق هو:

$$Q = 100 - 5\mathrm{P} \implies 12.5 = 100 - 5\mathrm{P} \implies P = \frac{87.5}{5}$$
$$\implies P = 17.5$$

- إذا كانت الكمية المطلوبة $Q = 25$ فان سعر السوق هو :

$$Q = 100 - 5\mathrm{P} \implies 25 = 100 - 5\mathrm{P} \implies P = \frac{75}{5}$$
$$\implies P = 15$$

- إذا كان السعر $P = 2$ فان الكمية المطلوبة هي:

$$Q = 100 - 5\mathrm{P} \implies Q = 100 - 5(2) \implies Q = 90$$

- إذا كان السعر $P = 7$ فان الكمية المطلوبة هي:

$$Q = 100 - 5\mathrm{P} \implies Q = 100 - 5(7) \implies Q = 65$$

- إذا كان السعر $P = 15$ فان الكمية المطلوبة هي:

$$Q = 100 - 5\mathrm{P} \implies Q = 100 - 5(15) \implies Q = 25$$

التمرين 10:

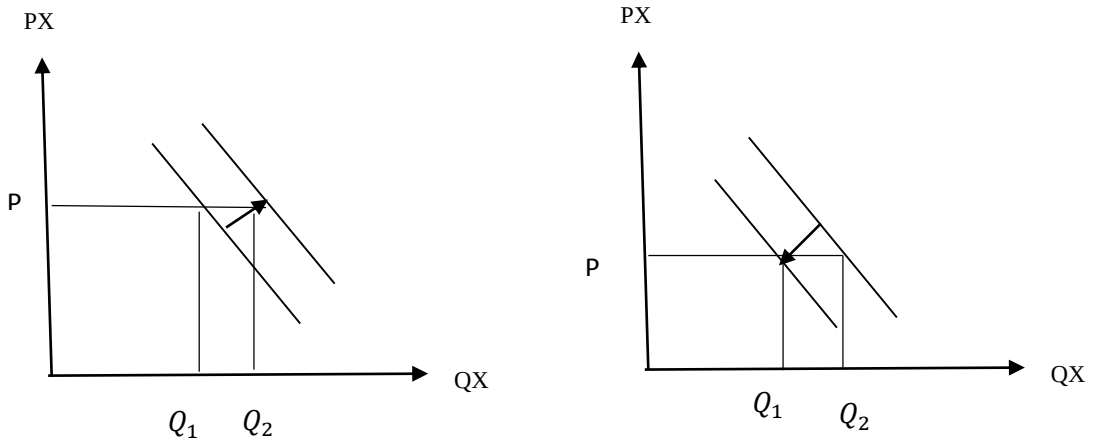
يطلق الاقتصاديون على تغير في الكميات المطلوبة بخلاف السعر لفظ زيادة او نقصان الطلب

- فزيادة الطلب: تعني زيادة الكمية المطلوبة مع عدم تغير السعر
- ونقصان الطلب: يعني انخفاض الكمية المطلوبة مع عدم تغير السعر

انتقال منحنى الطلب (التغير في الطلب)

إذا بقي سعر السلعة ثابتا وتغيرت العوامل الأخرى فهذا يؤدي إلى انتقال منحنى الطلب بالكامل نحو الأعلى ونقول في هذه الحالة أن الطلب قد زاد ويكون منحنى الطلب موازيا للمنحنى الأصلي، أو يكون الانتقال نحو الأسفل بصفة موازية للوضعية الأصلية ونقول في هذه الحالة أن الطلب على السلعة قد انخفض. وهذا الانتقال صعودا أو نزولا يسمى تغير الطلب وهو موضح في الشكل الموالي:

التمثيل البياني لتفير الطلب



مثال لتغير الطلب: الشاي والقهوة

- عندما يرتفع سعر الشاي فانه يزداد الطلب على القهوة؛
- عندما ينخفض سعر الشاي فانه ينخفض الطلب على القهوة؛

الكمية المطلوبة: هو التغير في الكميات المطلوبة عندما يكون السعر هو المتغير الوحيد وجميع العوامل الأخرى ثابتة.

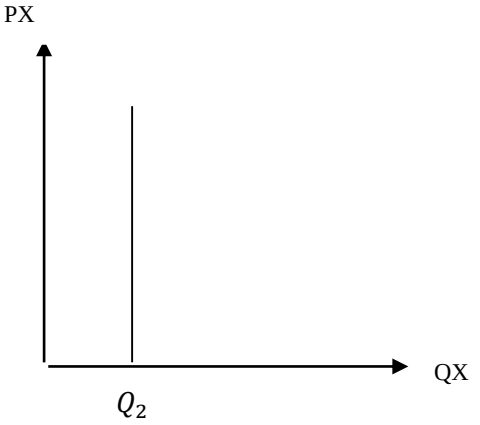
مثال لتغير الكمية المطلوبة:

- عند زيادة سعر الألبسة الشتوية تنخفض الكمية المطلوبة عليها.

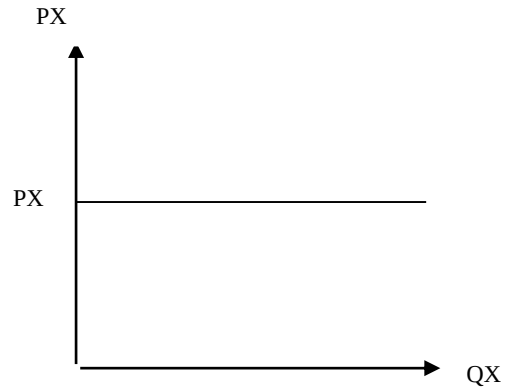
التمرين 11:

المعنى الاقتصادي لقيم مرونة الطلب السعرية التالية:$(0.5-)$ ، (∞)، $(6-)$، 0

- نستنتج أنه عند تغير السعر بمقدار 1%، فإن الكمية المطلوبة ستتغير بمقدار0.5 %.
- نستنتج أنه عند تغير السعر بمقدار 1%، فإن الكمية المطلوبة ستتغير بمقدار 6% .
- طلب عديم المرونة $E_P = 0$ مهما تغير السعر فان الكمية المطلوبة لا تتغير مثال دواء مرضى السكر فعند ارتفاع سعر الدواء فان ذلك لن يؤدي الى تغير الكمية المطلوبة. والشكل التالي يوضح ذلك



- طلب لانهائي المرونة $E_P = \infty$ مهما تغيرت الكمية المطلوبة فان السعر لا يتغير هذا النوع من المرونة يحدث في حالة وجود عدت بدائل مثل المشروبات الغازية او أنواع الصابون فلو ارتفع أحد أنواع المشروبات الغازية الذي يوجد له بديل فان المستهلك سيتجه الى البديل الذي لم يتغير سعره فيزيد الطلب عليه والشكل الموالي يوضح ذلك:



2. ايجاد مرونة الطلب السعرية عند انخفاض الكمية المطلوبة من سلعة X بمقدار $\Delta Q\% = {}^{\Delta Q}/_{Q} = -\%35$، عندما يرتفع السعر بنسبة $\Delta P\% = {}^{\Delta P}/_{P} = \%20$

$$E_P = \frac{\Delta Q\%}{\Delta P\%} = \frac{-35\%}{20\%} = -1.75$$

التمرين 12:

اذا كانت دالة الطلب على الأسماك هي $Q = 180 + 0.5\mathrm{P}$، بفرض ان متوسط أسعار هذه الأسماك قد ارتفع من $\mathrm{P} = 250$ الى $\mathrm{P} = 350$

احسب مرونة الطلب على هذه الأسماك؟

- إذا كان السعر $P = 250$ فان الكمية المطلوبة هي:

$$Q = 180 + 0.5\mathrm{P} \Longrightarrow Q = 180 + 0.5(250) \Longrightarrow Q = 305$$

- إذا كان السعر $P = 350$ فان الكمية المطلوبة هي:

$$Q = 180 + 0.5\mathrm{P} \Longrightarrow Q = 180 + 0.5(350) \Longrightarrow Q = 355$$

$$E_P = \frac{\Delta Q\%}{\Delta P\%} = \frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1} \cdot \frac{P_1}{Q_1} = \frac{355 - 305}{350 - 250} \cdot \frac{250}{305}$$

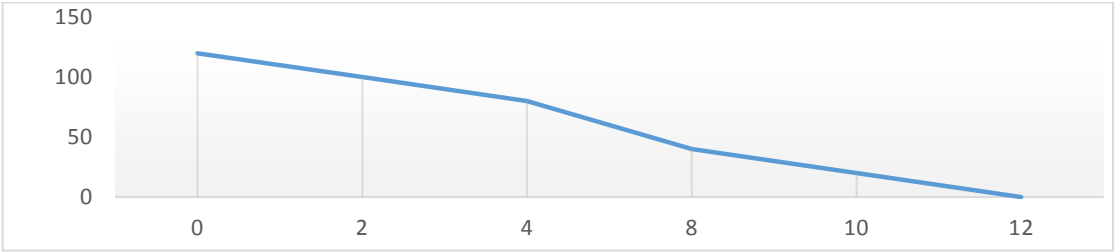
$$E_P = 0.41$$

التمرين 13:

1. حساب الطلب السوقي:

P_X	0	2	4	8	10	12
Q_{D1}	120	100	80	40	20	0

2. رسم منحنى الطلب السوقي:



3. كتابة عبارة دالة الطلب السوقي:

منحنى الطلب عبارة عن خط مستقيم وبالتالي دالة الطلب خطية من الشكل: $Q_X = a - bP_X$

ولتحديد الصيغة الرياضية نختار نقطتين عشوائيتين من الجدول لنكون جملة معادلتين

$$\begin{cases} 120 = a - b(0) \\ 0 = a - b(12) \end{cases}$$

نضرب المعادلة الأولى في (-1) نجد:

$$\begin{cases} -120 = -a + b(0) \\ 0 = a - b(12) \end{cases}$$

ومنه بجمع المعادلتين نجد:

$$-120 = -12b \Longrightarrow b = \frac{-120}{-12} \Longrightarrow b = 10$$

ولحساب a يكفي نعوض $P_X = 0$ في المعادلة نجد : $120 = a - b(0) \Longrightarrow a = 120$ أو

ومنه دالة الطلب السوقي تكتب من الشكل: $Q_X = 120 - 10P_X$

4. حساب قيمة المرونة عند $P_X = 8$

$$E_X = \frac{\partial Q_X}{\partial P_X} \cdot \frac{P_X}{Q_X} \Longrightarrow E_X = -10\frac{8}{120 - 10(8)} \Longrightarrow E_X = -2$$

بما ان $|E_X| = |-2| = 2 > 1$ ومنه الطلب مرن.

النتيجة: عندما يرتفع السعر بنسبة 1%، فإن الكمية المطلوبة ستنخفض بنسبة 2% .

5. البرهان ان ميل دالة الطلب السوقي لا يساوي مرونة الطلب السعرية $E_X \neq b$

نحسب ميل دالة الطلب b باشتقاق دالة الطلب السوقي بالنسبة للسعر:

$$Q_X = a - bP_X \Longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial P_X} = b$$

$$b = \frac{\partial Q}{\partial P_X} \dots\dots\dots 1$$

ومرونة الطلب السعرية تكتب من الشكل:

$$E_X = \frac{\partial Q_X}{\partial P_X} \cdot \frac{P_X}{Q_X} \dots\dots\dots 2$$

ومن 1 و 2 فان

$$E_X \neq b$$

6. اذا انخفاض السعر من 8 الى 6 حساب مرونة القوس:

$$Q_X = 120 - 10P_X$$
$$P_1 = 8 \Longrightarrow Q_{X1} = 40$$
$$P_2 = 6 \Longrightarrow Q_{X2} = 60$$

$$E_{PX} = \frac{\partial Q_X}{\partial P_X} \cdot \frac{\frac{P_{X1}+P_{X2}}{2}}{\frac{Q_{X1}+Q_{X2}}{2}} = \frac{\partial Q_X}{\partial P_X} \cdot \frac{P_{X1}+P_{X2}}{Q_{X1}+Q_{X2}} = -10 \cdot \frac{8+6}{40+60} = -1.4$$

7. حساب الانفاق الكلي:

$$C_X = P_X * Q_D$$

P_X	10	8	6	4	2
Q_D	20	40	60	80	100
C_X	200	320	360	320	200

8. العلاقة بين تغير الانفاق الكلي ومرونة الطلب:

- ان الانفاق الكلي للمستهلكين هو ايراد كلي للمنتجين ومعامل مرونة الطلب السعرية تسمح للمنتجين بمعرفة ارتفاع ايراداتهم ومن الجدول السابق نلاحظ ان الانفاق الكلي في تزايد $(200، 320، 360)$عندما يكون الطلب مرن أي $|E_X| > 1$.
- اما اذا كان الطلب غير مرن أي$|E_X| < 1$ فان الانفاق الكلي في انخفاض $(360، 320، 300)$

9. بمان المستهلكين ينفقون دخلهم بالكامل على شراء Xالسلعة فان

$$R = Q_D * P_X \Longrightarrow Q_D = \frac{R}{P_X}$$

8	8	8	P_X
45	40	25	Q_D
360	320	200	R

مرونة الطلب الدخلية عند $R_1 = 200$ و $R_2 = 320$:

$$E_R = \frac{\Delta Q\%}{\Delta R\%} = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta R}{R}} = \frac{\Delta Q}{\Delta R} \cdot \frac{R}{Q} = \frac{Q_2 - Q_1}{R_2 - R_1} \cdot \frac{R_1}{Q_1}$$

$$E_R = \frac{40 - 25}{320 - 200} * \frac{200}{25} = \frac{15}{120} * \frac{200}{25} = 1$$

$$E_R = 1$$

- بما ان $0 \leq E_R \leq 1$ تكون في هذه الحالة السلع عادية أو ضرورية.

التمرين 14:

استخرج من الجدول المرونات المتقاطعة التالية:

- $E_{Z,X} = 0.5$،
- $E_{Z,Y} = 0.2$،
- $E_{X,Y} = 1.5$،
- $E_{X,Z} = 0.02$،
- $E_{Y,X} = 1.2$،
- $E_{Y,Z} = 0.2$

- اذا ارتفع سعر السلعة X بنسبة 1% فان الكمية المطلوبة من السلعة Y سترتفع بنسبة 1.5% ومن السلعة Z بـ 0.02%.
- اذا ارتفع سعر السلعة Y بنسبة 1% فان الكمية المطلوبة من السلعة X سترتفع بنسبة 1.2% ومن السلعة Z بـ 0.2%

- اذا ارتفع سعر السلعة Z بنسبة 1% فان الكمية المطلوبة من السلعة Y سترتفع بنسبة 0.2% ومن السلعة Y بـ 0.05%

المطلب الثالث: تمارين للحل حول الطلب والمرونة

التمرين 01:

يخضع الطلب على السلعة X للعوامل التالية: سعر السلعة P_X وسعر السلعة الأخرى P_Y و الدخل R حيث يمكن كتابة دالة الطلب على الشكل التالي:

$$X = F(P_X, P_Y, R) = {P_X}^{-0.3} {P_Y}^{-0.5} R^{0.6}$$

1. أحسب مرونة الطلب السعرية، مرونة الطلب الدخلية ومرونة الطلب التقاطعية؟
2. أوجد التغيرات النسبية التي تحدث على الطلب عند كل تغيير مما يلي: زيادة P_X بـ 10%، زيادة P_Y بـ 5%، زيادة R بـ 10%؟

التمرين 02:

يعطي الجدول التالي تغيرات الكمية المطلوبة من السلعة Q وفقا لتغيرات السعر P_X

P_X	1	2	3	4	5
Q	80	60	50	40	10

المطلوب:

1. أحسب مرونة الطلب السعرية عندما يرتفع السعر من 3 إلى 4؟ وفسر النتيجة؟
2. أحسب مرونة الطلب السعرية عندما ينخفض السعر من 4 إلى 3؟ وفسر النتيجة؟
3. ماذا تلاحظ؟ ما هي طريقة حساب المرونة التي تمكن من الحصول على نتيجة أفضل؟
4. اعد حساب المرونة بهذه الطريقة عند ارتفاع السعر من 3 إلى 4 وعند انخفاض السعر؟

التمرين 03:

لتكن دوال الطلب التالية: $Q = (\mathrm{a} - \mathrm{bP})^{\frac{1}{2}}$، $Q = (\mathrm{a} - \mathrm{bP})^2$، $Q = P(\mathrm{a} - \mathrm{bP})^2$:

1. احسب مرونة الطلب السعرية عند كل دالة؟
2. ماهي العلاقة التي يجب توفرها بين P و b و a حتى تصبح المرونة مساوية للواحد؟

المبحث الثاني: العرض ومرونته

يتعرض هذا المبحث لدراسة الجانب الثاني للسوق والذي يمثل ما تعرضه المؤسسة المنتجة أو البائع، وبتحديد العرض نتمكن من تحديد توازن السوق. وهذا من خلال مجموعة من تمارين المتنوعة مع حلولها.

المطلب الأول: تمارين حول العرض ومرونته

فيما يلي مجموعة من التمارين حول العرض ومرونته.

التمرين 01:

ليكن الجدول التالي الذي يبين لنا الكميات المعروضة من سلعة عند مستويات مختلفة من الأسعار خلال فترة زمنية معينة

P_X	3	6	9	12	15	18
Q_X	2	4	6	8	10	12

1. أوجد الصيغة الرياضية لدالة العرض على السلعة X؟
2. أوجد قيمة المرونة عند $P_X = 9$ فسر النتيجة اقتصاديا؟
3. أحسب مرونة العرض السعرية عن ارتفاع السعر من 6 إلى 9؟

التمرين 02:

لنكن دالة العرض لأحد المستهلكين من الشكل : $Q_X = -40 + 20P_X$

1. أنشئ جدول العرض ثم أرسم منحنى العرض؟
2. ما هو أدنى سعر يبدأ المنتج من خلاله في عرض سلعته في السوق؟
3. إذا كان في السوق 3 منتجين أوجد دالة العرض السوقي؟

التمرين 03:

الجدول التالي يبين لنا ذلك:

سعر السلعة P_X	1	2	3	4	5	6
الكمية المعروضة Q_X	2	4	6	8	10	12

اشرح العلاقة بين السعر والكمية المعروضة؟

التمرين 04:

نفرض وجود 3 منتجين في السوق ينتجون نفس السلعة عند مستويات مختلفة من السعر حسب الجدول التالي:

Q_{X3}	Q_{X2}	Q_{X1}	P_X
8	8	7	5
7	7	6	4
6	6	5	3
5	5	4	2

اوجد العرض السوقي؟

التمرين 05:

لتكن دالة العرض الفردي لـ 5 منتجين ينتجون نفس السلعة $Q_X = 14 + \frac{2}{3}P_X$ أوجد دالة عرض السوق

$$Q_N = 5Q_X = 5\left(14 + \frac{2}{3}P_X\right) = 42 + \frac{10}{3}P_X$$

التمرين 06:

إذا كان سعر السلعة في السوق هو 20 ون والكمية المعروضة تقدر بـ 300 وحدة، وعند انخفاض سعر السلعة في السوق إلى 10 ون أضطر المنتج إلى تقليص الكمية المعروضة إلى 200 وحدة. أحسب مرونة العرض السعرية عند ارتفاع السعر وعند انخفاضه بنفس القيمة؟

المطلب الثاني: حلول تمارين حول العرض

ستستعرض في هذا المطلب حلول لتمارين السابقة حول العرض السوقي ومرونته.

التمرين01:

دالة العرض تكتب من الشكل: $Q_X = a + bP_X$

ولتحديد الصيغة الرياضية نختار نقطتين عشوائيتين من الجدول لنكون جملة معادلتين

$$\begin{cases} 6 = a + b(9) \\ 4 = a - b(6) \end{cases}$$

نضرب المعادلة الأولى في (-1) نجد:

$$\begin{cases} -6 = -a - b(9) \\ 4 = a + b(6) \end{cases}$$

ومنه بجمع المعادلتين نجد:

$$-2 = -3b \Longrightarrow b = \frac{-2}{-3} \Longrightarrow b = \frac{2}{3}$$

ولحساب a يكفي تعويض b في إحدى المعادلتين نجد : $6 = a + 9\frac{2}{3} \Longrightarrow a = 0$ أو

ومنه دالة العرض تكتب من الشكل: $Q_X = \frac{2}{3}P_X$

حساب قيمة المرونة عند $P_X = 9$

$$E_X = \frac{\partial Q_X}{\partial P_X} \cdot \frac{P_X}{Q_X} \Longrightarrow E_X = \frac{2}{3}\frac{9}{\frac{2}{3}(9)} \Longrightarrow E_X = 1$$

التفسير: عند تغير السعر بنسبة 1% فإن الكمية المعروضة ستتغير بنسبة 1%.

حساب مرونة الطلب السعرية عن ارتفاع السعر من 6 إلى 9:

$$E_{PX} = \frac{\Delta Q_X}{\Delta P_X} \cdot \frac{P_X}{Q_X} = \frac{Q_{X2} - Q_{X1}}{P_{X2} - P_{X1}} \cdot \frac{P_{X1}}{Q_{X1}} = \frac{6-4}{9-6} \cdot \frac{6}{4} = 1$$

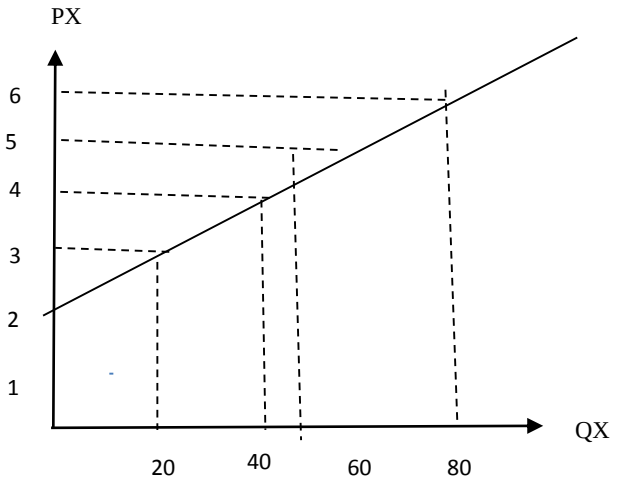
النتيجة: عندما يرتفع السعر بنسبة 1%، فإن الكمية المعروضة سترتفع بنسبة 1%.

التمرين 02:

جدول العرض

P_X	0	1	2	3	4	5	6
Q_X	40−	20−	0	20	40	60	80

التمثيل البياني:



السعر الأدنى الذي يبدأ المنتج في عرض سلعته عنده هو $P_X = 2$

دالة عرض السوقي:

$$Q_N = 3Q_X = 3(-40 + 20P_X) = -120 + 60P_X$$

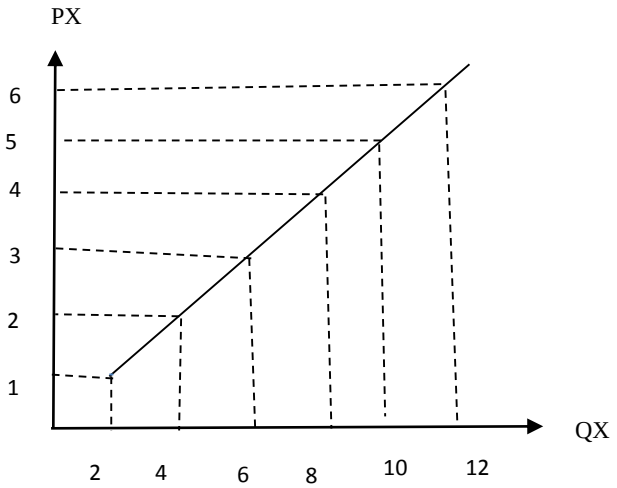
التمرين 03:

الجدول التالي يبين لنا ذلك:

سعر السلعة P_X	1	2	3	4	5	6
الكمية المعروضة Q_X	2	4	6	8	10	12

فمن خلال هذا الجدول يتبين لنا أنه لما ارتفع السعر أدى ذلك إلى زيادة الكمية المعروضة، فعندما كان سعر السلعة في السوق هو 2 ون كانت الكمية المعروضة 4 وحدات وعندما ارتفع السعر إلى 4 ون رفع المنتج من الكمية المعروضة فأصبحت 8 وحدات وباستمرار ارتفاع سعر السلعة في السوق، فإن المنتج يزيد من الكمية المعروضة بحثا عن الربح، وهذا ما يبين لنا العلاقة الطردية الموجودة بين الكمية المعروضة وسعرها في السوق. وعند تمثيل نقاط هذا الجدول نتحصل

على منحنة يعرف بمنحى العرض والذي يبين لنا العلاقة الطردية الموجودة بين سعر السلعة والكمية المعروضة منها، حيث يمثل المحور الأفقي الكميات المعروضة والمحور العمودي أسعار السلعة في السوق.



فكل نقطة واقعة على منحنى العرض تتمثل في الثنائية (الكمية، السعر)، وهو منحنة ينطلق من الأسفل إلى الأعلى ومن اليسار إلى اليمين ذو ميل موجب يعكس لنا العلاقة الطردية الموجودة بين الكمية المعروضة واسعرها في السوق (وهو عكس منحنى الطلب تماما).

فكلما ارتفع سعر السلعة في السوق أدى ذلك إلى زيادة المعروض منها، وكلما انخفض سعر السلعة في السوق أدى ذلك إلى انخفاض المعروض منها، وبالتالي فإن المنتج يعمل على التحكم في الكمية المعروضة حسب السعر الموجود في السوق بحثا عن الربح

التمرين 04:

نفرض وجود 3 منتجين في السوق ينتجون نفس السلعة عند مستويات مختلفة من السعر حسب الجدول التالي:

Q_N	Q_{X3}	Q_{X2}	Q_{X1}	P_X
25	8	8	7	5
22	7	7	6	4
19	6	6	5	3
16	5	5	4	2

بحيث أن

$$Q_N = \sum_{i=1}^{n} Q_{Xi} = Q_{X1} + Q_{X2} + Q_{X3}$$

العرض السوقي هو الذي يهم الباحثين الاقتصاديين لأنه يعكس لنا جميع عوض المنتجين في السوق، وعليه فخواص منحنى العرض السوقي هي نفسها خواص منحنى العرض الفردي فهو

منحنى ينطلق من الأسفل إلى الأعلى ومن اليسار إلى اليمين ذو ميل موجب يعكس العلاقة الطردية بين الكمية المعروضة وسعرها.

التمرين 05:

لتكن دالة العرض الفردي لـ 5 منتجين ينتجون نفس السلعة $Q_X = 14 + \frac{2}{3}P_X$ ايجاد دالة عرض السوق

$$Q_N = 5Q_X = 5\left(14 + \frac{2}{3}P_X\right) = 42 + \frac{10}{3}P_X$$

التمرين 06:

حساب مرونة العرض السعرية عند ارتفاع السعر من 10 إلى 20:

$$E_{PX} = \frac{\Delta Q_X}{\Delta P_X} \cdot \frac{P_X}{Q_X} = \frac{Q_{X2} - Q_{X1}}{P_{X2} - P_{X1}} \cdot \frac{P_{X1}}{Q_{X1}} = \frac{300 - 200}{20 - 10} \cdot \frac{10}{200} = \frac{1}{2}$$

النتيجة: عندما يرتفع السعر بنسبة 1%، فإن الكمية المعروضة سترتفع بنسبة 0.5%.

حساب المرونة السعرية عند انخفاض السعر من 20 إلى 10:

$$E_{PX} = \frac{\Delta Q_X}{\Delta P_X} \cdot \frac{P_X}{Q_X} = \frac{Q_{X2} - Q_{X1}}{P_{X2} - P_{X1}} \cdot \frac{P_{X1}}{Q_{X1}} = \frac{200 - 300}{10 - 20} \cdot \frac{20}{300} = \frac{2}{3}$$

النتيجة: عند انخفاض السعر بنسبة 1%، فإن الكمية المعروضة ستنخفض بنسبة $\frac{2}{3}$%.

من خلال هذا المثال السابق يتبين لنا أن قيمة المرونة تختلف عند ارتفاع السعر وانخفاضه بنفس القيمة ويرجع السبب في ذلك إلى اختلاف الأساس عند حساب التغيرات النسبية في كل حالة فعند ارتفاع السعر كان الأساس $\left(\frac{10}{200}\right)$ وعند انخفاض السعر أصبح $\left(\frac{20}{300}\right)$. ولتجنب هذا الاختلاف يمكن استخدام مرونة القوس التي تستخدم متوسط السعرين ومتوسط الكميتين في حساب الأساس والتي تعرف بمرونة القوس ويمكن حسابها كما يلي:

$$E_P == \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{\frac{P_1 + P_2}{2}}{\frac{Q_1 + Q_2}{2}} = \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1} \cdot \frac{P_1 + P_2}{Q_1 + Q_2}$$

وبالعودة إلى المثال السابق، فإن مرونة العرض السعرية تحسب كما يلي:

عند ارتفاع السعر من 10 إلى 20:

$$E_{PX} = \frac{\Delta Q_X}{\Delta P_X} \cdot \frac{P_X}{Q_X} = \frac{Q_{X2} - Q_{X1}}{P_{X2} - P_{X1}} \cdot \frac{P_{X1+}P_{X2}}{Q_{X1} + Q_{X2}} = \frac{300 - 200}{20 - 10} \cdot \frac{10 + 20}{200 + 300} = \frac{3}{5}$$

النتيجة: عندما يرتفع السعر بنسبة 1%، فإن الكمية المعروضة سترتفع بنسبة $\frac{3}{5}$%.

عند انخفاض السعر من 20 إلى 10:

$$E_{PX} = \frac{\Delta Q_X}{\Delta P_X} \cdot \frac{P_X}{Q_X} = \frac{Q_{X2} - Q_{X1}}{P_{X2} - P_{X1}} \cdot \frac{P_{X1+}P_{X2}}{Q_{X1} + Q_{X2}} = \frac{200 - 300}{10 - 20} \cdot \frac{10 + 20}{200 + 300} = \frac{3}{5}$$

النتيجة: عند انخفاض السعر بنسبة 1%، فإن الكمية المعروضة ستنخفض بنسبة $\frac{3}{5}$%.

وعليه نلاحظ أنه عند ارتفاع السعر أو انخفاضه فإن نسبة التغير في الكمية المعروضة هي نفسها.

المطلب الثالث: تمارين للحل حول العرض

التمرين01:

ترتبط الكمية المعروضة لسلعة ما بمجموعة من العوامل

1. حدد أهم هذه العوامل المؤثرة في الكمية المعروضة مع صياغة ذلك رياضيا؟
2. بافتراض أن سعر السلعة X هو P_X هو المتغير الوحيد الذي يؤثر على العرض، أكتب الشكل العام لدالة العرض مع الشرح؟

التمرين 02:

لتكن دالة العرض من الشكل: $Q = P - 1$

1. مثل دالة العرض عن تغير السعر من 1 الى 6؟

التمرين 03:

اليك الجدول التالي الذي يبين الكميات المعروضة و المطلوبة من سلعو ما عند مختلف الأسعار:

P	3	6	9	12	15	18
Q_O	2	4	6	8	10	12

1. أوجد دالتي العرض؟
2. احسب مرونة العرض عن ارتفاع السعر من 6 الى 9 ثم عند انخفاض السعر من 9 الى 6 ماذا تلاحظ؟ فسر النتيجة في كل حالة؟
3. احسب مرونة القوس؟

المبحث الثالث: توازن السوق وتطبيقاته

لا يحدث التوازن في السوق إلا بتفاعل قوى العرض والطلب معا معلنة عن رغبة البائعين والمشترين في تحديد حاجاتهم عند سعر محدد يعرف بسعر السوق وعند كمية معينة تعرف بكمية التوازن.

ويقصد بتوازن السوق الحالة التي يتعادل فيها قوى متعاكسة، وهي تبين لنا حالة السوق والتي إذا تحققت فإنها تميل إلى الاستمرار، ويحدث ذلك في علم الاقتصاد عندما تتلاقى قوى العرض والطلب حيث تتساوى الكمية المطلوبة من سلعة ما في السوق مع الكمية المعروضة منها خلال فترة زمنية معينة. كما يتساوى سعر البيع مع سعر الشراء، وتسمى عنها القيم التوازنية في السوق بسعر وكمية التوازن.

ولفهم توازن السوق وضعنا في متناول الطالب مجموعة من التمارين المبسطة مع حلولها.

المطلب الأول: تمارين حول توازن السوق وتطبيقاته

نتناول فيما يلي مجموعة من التمارين حول توازن السوق

التمرين 01:

إذا كانت دالة العرض والطلب محددة بالصيغتين التاليتين:

$$\begin{cases} Q_O = -40 + 20P_X \\ Q_D = 80 - 10P_X \end{cases}$$

حدد سعر وكمية التوازن في السوق؟

التمرين 02:

وسنبين ذلك من خلال الجدول التالي:

P_X	الكمية المعروضة	الكمية المطلوبة
10	150	50
8	120	80
6	100	100
4	70	140
2	50	170

1. بين سعر وكمية التوازن؟
2. بين فائض الطلب والعرض؟

التمرين 03:

ليكن الجدول التالي الذي يبين الكميات المعروضة والمطلوبة من السلعة X عند مستويات مختلفة من الأسعار

P	3	6	9	12	15	18
Q_D	2	4	6	8	10	12
Q_O	34	28	22	16	10	4

1. مثل بيانيا دالتي العرض والطلب وأوجد الكمية التوازنية والسعر التوازني؟
2. أوجد دوال العرض والطلب وأوجد الوضع التوازني جبريا؟
3. عند سعر $P = 9$، أوجد مرونة الطلب السعرية ومرونة العرض السعرية؟
4. بفرض الدولة ضريبة قيمية بمقدار $t = 20\%$ أوجد الوضع التوازني؟
5. بفرض الدولة ضريبة نوعية بقيمة $t = 2$ أوجد الوضع التوازني؟
6. ما هو مبلغ الذريبة النوعية اللازم للحصول على أكبر مبلغ ضريبي ممكن؟

التمرين 04:

ليكن النموذج السوقي التالي:

$$\begin{cases} P_X = 10 + 0.01Q \\ P_X = 100 - 0.01Q \end{cases}$$

حيث P_X يمثل سعر الوحدة و Q تمثل الكميات

1. أوجد سعر وكمية التوازن في السوق؟
2. إذا حددت الحكومة سعر البيع بـ 40 ون هل هناك عجز أم فائض؟

التمرين 05:

في دراسة لسوق الألبان، وجد أن دالة الطلب الكلي للسوق ممثلة بالعبارة التالية:

$Q_D = 80 - 10P_X$ حيث P_X يمثل سعر لتر اللبن أما Q فتمثل الكميات المطلوبة ويوجد في السوق 200 منتج مماثل بحيث تأخذ دالة العرض الفردية الشكل التالي:

$$Q_O = -40 + 20P_X$$

1. أوجد سعر وكمية توازن في السوق؟
2. ما هي الكمية المعروضة من طرف كل منتج عند التوازن؟

التمرين 06:

ليكن الجدول التالي الذي يبين الكميات المعروضة والمطلوبة من السلعة X عند مستويات مختلفة من الأسعار

P	20	40	60	80	100
Q_D	110	100	90	80	70
Q_O	70	80	90	100	110

1. ما هي الوضعية التوازنية حسب الجدول؟
2. مثل بيانيا دالتي العرض والطلب وأوجد الكمية التوازنية والسعر التوازني؟
3. إذا كان السعر 40 هل هناك فائض أم عجز في العرض بكم؟
4. إذا كان السعر 80 هل هناك فائض في الطلب أم فائض في العرض وبكم؟

التمرين 07:

في دراسة قام بها صاحب قاعة سينما لتحديد أفضل سعر تذكرة الدخول تبين أن دالة الطلب على تذاكر الدخول من الشكل: $Q_D = \frac{a}{P} - b$، حيث عدد المتفرجين Q_D وسعر التذكرة P و a و b ثوابت. علما أن عدد المقاعد في هذه القاعة محدد بـ 500 مقعد، لقد تبين لصاحب قاعة السينما بإنه عندما يكون سعر التذكرة 40 ون فإن عدد المتفرجين يصل إلى 250 متفرج أما عند 35 ون فيصل عدد المتفرجين الى 350 متفرجا

1. أوجد الثوابت a و b؟
2. أوجد السعر المناسب لتمتلئ القاعدة بالمتفرجين؟
3. يتوقع صاحب قاعة السينما بأنه عند $P = 30$ تستقبل قاعة السينما بنسبة 80% هل هذا التوقع صحيح؟

التمرين 08:

نفترض أن الطلب على لحوم البقر يتكون من الطلب المحلي والطلب الخارجي حيث دوال الطلب تكتب من الشكل: $Q_{D_{\text{داخلي}}} = 3882 - 0.1P_X$ و $Q_{D_{\text{داخلي}}} = 1118 - 0.4P_X$ بحيث P_X هو السعر و Q_X هي الكمية المطلوبة، أما دالة العرض على لحوم البقر تكتب على الشكل التالي: $Q_O = 3570 + 1.5P_X$

1. أوجد الوضع التوازني على لحوم البقر الكندية؟
2. حدد المرونة السعرية للطلب المحلي والمرونة السعرية للطلب الداخلي وهل الطلب الداخلي والخارجي مرن؟
3. بعد اكتشاف حالة داء جنون البقر في كندا تم حظر استيراد اللحوم الكندية مما أدى الى خسارة لدى المنتجين الكنديين للحوم البقر. أوجد سعر وكمية التوازن الجديدة؟

4. طالب المنتجون للحوم البقر الكندية من الحكومة تحديد حد أدنى للسعر من أجل حماية منتجاتهم، وبعد استجابة الحكومة تم تحديد السعر عند 500 وحدة نقدية، ما هو أثر ذلك على السوق بدلالة الكمية المتبادلة؟ أوضح ذلك بيانيا؟

التمرين 09:

اذا توفرت لديك دالتي الطلب والعرض السوقي للسلعة X :

$$\begin{cases} P_O = 5 + Q \\ P_D = 50 - 2Q \end{cases}$$

1. ما نوع توزن السوق لهذه السلعة ولماذا؟
2. احسب فائض المنتج وفائض المستهلك؟

اذا قررت الحكومة فرض ضريبة على كل وحدة مباعة من السلعة X مقدارها t بهدف وفع سعر التوازن بمقدار 5 ون.

1. احسب مقدار t؟

2. من الذي يتحمل الجزء الأكبر من العبء الضريبي المنتج ام المستهلك ولماذا؟

3. احسب حصيلة إيرادات الدولة من جراء فرض الضريبةt

التمرين 10:

اذا توفرت لديك دالتي الطلب والعرض السوقي للسلعة X :

$$\begin{cases} P_D = 20 - 2Q \\ P_O = 4 + 2Q \end{cases}$$

إذا علمت أنه بعد فرضت الدولة ضريبة على كل وحدة مباعة فان العبء الضريبي الذي يتحمله البائع هو 2ون

1. احسب السعر الذي يستلمه البائع؟
2. احسب الكمية التوازنية بعد فرض ضريبة؟
3. أحسب السعر الذي يستلمه المشتري؟
4. ماهو مقدار العبء الضريبي الذي يتحمله؟
5. ما هي حصيلة إيرادات الدولة من جراء فرض ضريبة؟
6. من المعطيات السابقة، احسب فائض المنتج و فائض المستهلك؟ موضحا ذلك بيانيا؟

التمرين 11:

اذا كان تابع الطلب على سلعة ما $P_D = 9 - Q$

1. ارسم منحنى الطلب؟
2. احسب انفاق المستهلك وفائضه عند السعر $P = 5$ ؟
3. اذا كان تابع العرض على نفس السلعة هو $Q_O = 6P - 1$ اذا فرضت الدولة ضريبة نوعية قدرها 2ون.احسب سعر وكمية التوازن ثم أحسب سعر المستهلك وسعر المنتج؟
4. احسب فائض المنتج عند التوازن الاولي؟
5. ما هي حصيلة الإيرادات الدولة؟
6. حدد مرونة السعرية لهذه السلعة؟
7. من يتحمل أكثر العبء الضريبي؟

التمرين 12:

في سوق السلعة Q يخضع العرض الفردي الى الصيغة $Q_O = 5P - 10$ ويخضع الطلب الى الصيغة $Q_D = 2 - \frac{1}{4}$، يوجد في السوق 400 مؤسسة عارضة لنفس السلعة كما يوجد 4000 مستهلك طالب عليها

1. أوجد سعر وكمية التوازن للسوق هذه السلعة؟
2. نتيجة لسياسة الحكومة اتجاه إعادة توزيع الدخل ارتفعت دخول المستهلكين مما أدى الى نقل دالة الطلب الى الصيغة $Q_D{}' = \frac{11}{4} - \frac{1}{4}P$ أدرس تأثير هذا التغيير على القيم التوزنية في السوق؟
3. ارادت الحكومة زيادة الإنتاج فقررت منح اعانات للمنتجين بمعدل 0.5 ون لكل وحدة منتجة فما هو مجموع انفاق الحكومة من أجل هذا الدعم؟
4. ما هي التغيرات التي أحدثتها هذا الدعم على مستوى استهلاك، العرضن والسعر التوازني مقارنة بوضعية التوازن

التمرين 13:

اذا كان نموذج السوق يأخذ الشكل التالي:

$$\begin{cases} Q_O = -5 + 2P_X \\ Q_D = 10 - P_X \end{cases}$$

1. أوجد قيم توازن للنموذج السابق
2. تفرض الدولة ذريبة بمقدار 3 وحدات نقدية على كل وحدة منتجة، ما هي قيم التوازن الجديدة؟
3. ما هو معدل الضريبة الذي يعظم حصيلة إيرادات الدولة؟ وما قيمة هذه الحصيلة؟

التمرين 14:

إذا كان نموذج السوق يأخذ الشكل التالي:

$$\begin{cases} P = -4 + Q_O \\ P = 10 - Q_D \end{cases}$$

1. اوجد سعر وكمية التوازن؟
2. من اجل تخفيض الاستهلاك الوطني وزيادة ايرادات الحكومة تقرر فرض ضريبة نوعية بمعدل 1 ون على كل وحدة مباعة؟ اوجد قيم التوازن الجديدة؟
3. حدد السعر الذي يدفعه المشتري والذي يستلمه البائع؟

من أجل تدعيم القدرة الشرائية قررت الدولة منح اعانة بـ 1 ون لكل وحدة مباعة، أوجد قيم التوازن الجديدة؟ ملهو السعر الذي يدفعه المستهلك وما هو السعر الذي يستلمه البائع؟ ماهي التكلفة الكلية التي تتحملها الحكومة؟

التمرين 15:

إذا كان نموذج السوق يأخذ الشكل التالي:

$$\begin{cases} P = 9 + 9Q_O \\ P = 39 - 3{Q_D}^2 \end{cases}$$

1. اوجد سعر وكمية التوازن؟
2. ماهو معدل الضريبة الذي يسمح برفع سعر السلعة السوقي بـ 3 ون؟

التمرين 16:

إذا كان نموذج السوق يأخذ الشكل التالي:

$$\begin{cases} Q_X = 120000 - 20000P \\ Q_X = 20000P \end{cases}$$

1. ميز دالة الطلب عن دالة العرض، ثم حدد الكمية التوازنية بيانيا ورياضيا؟
2. انطلاقا من الوضعية التوازنية السابقة حدث ارتفاع في المداخيل الفردية مما أدى الى تغيير دالة الطلب السوقي لتصبح من الشكل: $Q_X = 140000 - 20000P$
أنشئ جدول الطلب السوقي الجديد ثم مثله بيانيا على نفس المعلم السابق محددا سعر و كمية التوازن الجديدة؟
3. فتراض حدوث تطور تقني تغير حجم الإنتاج مما أدى الى تغير دالى العرض لتصبح من الشكل: $Q_X = 40000 + 20000P$ وعلى افتراض بقاء العوامل الأخرى ثابتة أنشئ جدول العرض للسوق الجديد، ارسم نحنى العرض الجديد على نفس المعلم السابق؟ محددا سعر وكمية التوازن؟

4. ماذا يحدث لمنحني العرض والطلب وكيف كان أثر ذلك على سعر وكمية التوازن؟

المطلب الثاني: حلول تمارين حول توازن السوق وتطبيقاته

فيما يلي حلول للتمارين السابقة حول توازن السوق

التمرين 01:

يحدد توازن السوق بتساوي العرض والطلب معا على النحو التالي:

$$Q_O = Q_D \Longrightarrow -40 + 20P_X = 80 - 10P_X \Longrightarrow 80 + 40 = (10 + 20)P_X \Longrightarrow 120 = 30P_X$$

$$\Longrightarrow 120 = 30P_X \Longrightarrow P_X = 4$$

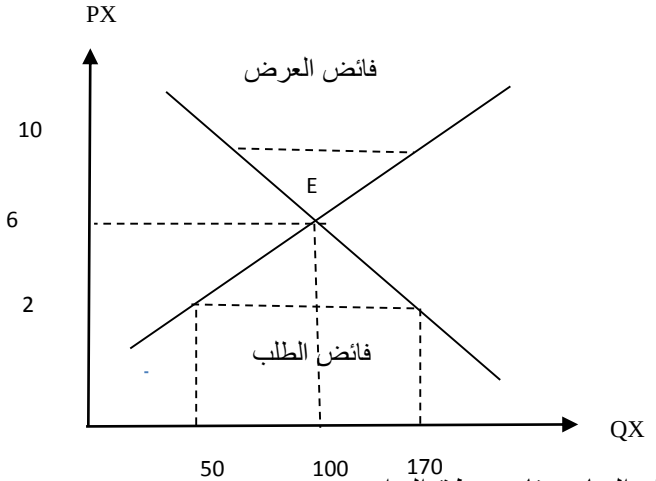
وبتعويض هذا السعر في أحد الدوال سواء العرض أو الطلب نتحصل على الكمية التوازنية كما يلي:

$$Q_D = 80 - 10(4) \Longrightarrow Q_X = 40$$

التمرين 02:

وسنبين ذلك من خلال الجدول التالي:

P_X	الكمية المعروضة	الكمية المطلوبة	الفائض أو العجز
10	150	50	100
8	120	80	40
6	100	100	0
4	70	140	−70
2	50	170	−120



من خلال الجدول السابق فإن نقطة التوازن تتحدد عند $P_E = 6$ وعند $Q_E = 100$ فعند أي سعر أقل من 6 ون مثلا فإن أي كمية للطلب أكبر من العرض أي أن هناك فائض في الطلب مما يدفع بالسعر نحو الارتفاع تدريجيا للوصول إلى $P_E = 6$.

وعند أي سعر أكبر من 6 ون فإن أي كمية للعرض تكون أكبر من الطلب حيث أن هناك فائض في العرض مما يدفع المنتجين إلى تخفيض التدريجي في السعر للوصول إلى $P_E =$ 6.

التمرين 03:

إيجاد دوال الطلب والعرض جبريا:

دالة الطلب خطية تكتب من الشكل: $Q_X = a - bP_X$

ولتحديد الصيغة الرياضية نختار نقطتين عشوائيتين من الجدول لنكون جملة معادلتين

$$\begin{cases} 28 = a - b(6) \\ 34 = a - b(3) \end{cases}$$

نضرب المعادلة الأولى في (-1) نجد:

$$\begin{cases} 28 = a - b(6) \\ -34 = -a + b(3) \end{cases}$$

ومنه بجمع المعادلتين نجد:

$$-6 = -3b \Longrightarrow b = \frac{-6}{-3} \Longrightarrow b = 2$$

ولحساب a يكفي تعويض b في إحدى المعادلتين نجد : $28 = a - 6(2) \Longrightarrow a = 40$ أو

ومنه دالة الطلب تكتب من الشكل: $Q_D = 40 - 2P_X$

دالة الطلب تكتب من الشكل: $Q_X = a - bP_X$

دالة العرض:

ولتحديد الصيغة الرياضية نختار نقطتين عشوائيتين من الجدول لنكون جملة معادلتين

$$\begin{cases} 2 = a + b(3) \\ 4 = a + b(6) \end{cases}$$

نضرب المعادلة الأولى في (-1) نجد:

$$\begin{cases} 2 = a + b(3) \\ -4 = -a - b(6) \end{cases}$$

ومنه بجمع المعادلتين نجد:

$$2 = 3b \Longrightarrow b = \frac{2}{3}$$

ولحساب a يكفي تعويض b في إحدى المعادلتين نجد : $2 = a + 3\left(\frac{2}{3}\right) \Longrightarrow a = 0$ أو

ومنه دالة العرض تكتب من الشكل: $Q_O = \frac{2}{3}P_X$

يحدد توازن السوق بتساوي العرض والطلب معا على النحو التالي:

$$Q_O = Q_D \Longrightarrow \frac{2}{3}P_X = 40 - 2P_X \Longrightarrow 40 = \left(2 + \frac{2}{3}\right)P_X \Longrightarrow 40 = \frac{8}{3}P_X$$

$$\Longrightarrow P_X = \frac{40 * 3}{8} \Longrightarrow P_X = 15$$

وبتعويض هذا السعر في أحد الدوال سواء العرض أو الطلب نتحصل على الكمية التوازنية كما يلي:

$$Q_D = 40 - 2(15) \Longrightarrow Q_X = 10$$

مرونة الطلب السعرية:

- إذا كان السعر $P = 9$ فان الكمية المطلوبة هي:

$$E_P = \frac{\partial Q_D}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q} = (-2)\frac{9}{40 - 2(9)} = \frac{-18}{22}$$

مرونة العرض السعرية:

- إذا كان السعر $P = 9$ فان الكمية المطلوبة هي:

$$E_P = \frac{\partial Q_O}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q} = \left(\frac{2}{3}\right)\frac{9}{\frac{2}{3}(9)} = 1$$

1.2. فرض ضريبة نوعية

تكون هذه الضريبة في صورة مبلغ ثابت على كل وحدة منتجة أو مباعة من السلعة أو الخدمة بغض النظر عن سعرها أو الكمية المشترات منها، وبالتالي تتأثر دالة العرض حيث ينتقل منحنى العرض إلى اليسار بسبب ارتفاع السعر وانخفاض العرض ويكون توازن السوق كالتالي:

وبفرض ضريبة نوعية t أصبح نموذج السوق كما يلي:

$$\begin{cases} Q_O = c + \mathrm{d}(P_X - t) \\ Q_D = a - bP_X \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_O = \frac{2}{3}(P_X - 2) \\ Q_D = 40 - 2P_X \end{cases}$$

وعند توازن فإن الكمية المطلوبة تساوي الكمية المعروضة كما يلي:

$$Q_O = Q_D \Longrightarrow \frac{2}{3}(P_X - 2) = 40 - 2P_X \Longrightarrow \frac{2}{3}P_X - \frac{2}{3}(2) = 40 - 2P_X$$

$$\Longrightarrow \frac{2}{3}P_X + 2P_X = 40 + \frac{4}{3} \Longrightarrow \frac{124}{3} = \left(\frac{8}{3}\right)P_X \Longrightarrow 124 = 8P_X$$

$$P_{XE} = 15.5$$

وبتعويض هذا السعر في دالة العرض أو الطلب نتحصل على الكمية التوازنية

$$Q_E = \frac{2}{3}(15.5 - 2)$$

$$\Longrightarrow \ Q_E = 9$$

أما حصيلة الضريبة التي نرمز لها بـ T فتساوي:

$$T = tQ_E \Longrightarrow \ T = 9 * 2 = 18$$

1.2. فرض ضريبة قيمية

وتكون هذه الضريبة في صورة نسبة مئوية من السعر وعليه تتأثر دالة العرض حيث ينتقل منحنى العرض إلى اليسار متأثرا بارتفاع الأسعار

وبفرض ضريبة قيمية t أصبح نموذج السوق كما يلي:

$$\begin{cases} Q_O = c + \mathrm{d}P_X(1-t) \\ Q_D = a - bP_X \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_O = \frac{2}{3}P_X(1-0.2) \\ Q_D = 40 - 2P_X \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_O = \frac{1.6}{3}P_X \\ Q_D = 40 - 2P_X \end{cases}$$

وعند توازن فإن الكمية المطلوبة تساوي الكمية المعروضة كما يلي:

$$Q_O = Q_D \Longrightarrow \frac{1.6}{3}P_X = 40 - 2P_X \Longrightarrow 40 = \left(\frac{1.6}{3} + 2\right)P_X$$

$$\Longrightarrow\Longrightarrow 40 = \left(\frac{1.6}{3} + \frac{6}{3}\right)P_X \Longrightarrow 40 = \left(\frac{7.6}{3}\right)P_X$$

$$P_{XE} = 15.79$$

وبتعويض هذا السعر في دالة العرض أو الطلب نتحصل على الكمية التوازنية

$$Q_E = \frac{1.6}{3}(15.79)$$

$$\Longrightarrow \ Q_E = 8.42$$

أما حصيلة الضريبة التي نرمز لها بـ T فتساوي:

$$T = t.P_{XE}.Q_E \Longrightarrow \ T = 0.2 * 15.79 * 8.42 = 26.59$$

مبلغ الضريبة الأمثل:

$$Q_O = \frac{2}{3}(P_X - t) \Longrightarrow Q_O = \frac{2}{3}P_X - \frac{2}{3}t$$

وبمساوات دالة العرض والطلب نجد:

$$Q_O = Q_D \Longrightarrow \frac{2}{3}(P_X - t) = 40 - 2P_X \Longrightarrow \frac{2}{3}P_X - \frac{2}{3}t = 40 - 2P_X$$

$$\Longrightarrow \frac{2}{3}P_X + 2P_X = 40 - \frac{2}{3}t \Longrightarrow \frac{8}{3}P_X = \frac{120}{3} - \frac{2}{3}t \Longrightarrow P_X = \frac{120 - 2t}{8}$$

$$\Longrightarrow . P_{XE} = \frac{60 - t}{4}$$

نعوض في دالة العرض:

$$Q_O = \frac{2}{3}\left(\left(\frac{60-t}{4}\right)-t\right) \Rightarrow Q_O = \frac{2}{3}\left(\frac{60-t-4t}{4}\right)$$
$$\Rightarrow Q_O = \frac{2}{3}\left(\frac{60-5t}{4}\right) \Rightarrow Q_O = 10-\frac{5}{6}t$$
$$Q_E = 10-\frac{5}{6}t$$
$$T = tQ_E \Rightarrow T = t\left(10-\frac{5}{6}t\right) \Rightarrow T = 10t-\frac{5}{6}t^2$$

الشرط اللازم:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{10}-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{t} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{10} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{t} \Rightarrow \boldsymbol{t} = \frac{\mathbf{30}}{\mathbf{5}} \Rightarrow \boldsymbol{t} = \mathbf{6}$$

الشرط الكافي:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial^2 t} = \left(\mathbf{10}-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{t}\right)' = -\frac{5}{3} < 0$$

التمرين 04:

وعند توازن فإن الكمية المطلوبة تساوي الكمية المعروضة كما يلي:

$$Q_O = Q_D \Rightarrow 10+0.01Q = 100-0.01Q \Rightarrow 90 = 40-0.02Q$$
$$\Rightarrow Q_E = \frac{40}{0.02} \Rightarrow Q_E = 4500$$

بالتعويض في احدى الدالتين نجد:

$$P_X = 10+0.01(4500) \Rightarrow P_X = 55$$

عند تحديد سعر البيع بـ 40 ون فإن:

$$P_X = 10+0.01Q \Rightarrow 40 = 10+0.01Q$$
$$\Rightarrow Q = \frac{30}{0.01} \Rightarrow Q = 3000$$
$$\Rightarrow \Delta Q = Q_2 - Q_1 = 3000-4500$$
$$\Rightarrow \Delta Q = -1500$$

هناك عجز في الطلب بـ 1500

$$P_X = 10+0.01Q \Rightarrow 40 = 100-0.01Q$$
$$\Rightarrow Q = \frac{60}{0.01} \Rightarrow Q = 6000$$
$$\Rightarrow \Delta Q = Q_2 - Q_1 = 6000-4500$$
$$\Rightarrow \Delta Q = 1500$$

هناك فائض في العرض بـ 1500

وعليه هناك فائض بالعرض وعجز بالطلب

التمرين 05:

في دراسة لسوق الألبان، وجد أن دالة الطلب الكلي للسوق ممثلة بالعبارة التالية:

$Q_D = 1760 - 8P_X$ حيث P_X يمثل سعر لتر اللبن أما Q فتمثل الكميات المطلوبة ويوجد في السوق 200 منتج مماثل بحيث تأخذ دالة العرض الفردية الشكل التالي:

$$Q_O = -8 + 0.8P_X$$

1. أوجد سعر وكمية توازن في السوق؟
2. ما هي الكمية المعروضة من طرف كل منتج عند التوازن؟

أخذ دالة العرض السوقي الشكل التالي:

$$Q_O = 200(-8 + 0.8P_X) \Longrightarrow Q_O = -1600 + 160P_X$$

وعليه نموذج السوق يأخذ الشكل التالي:

$$\begin{cases} Q_O = -1600 + 160P_X \\ Q_D = 1760 - 8P_X \end{cases}$$

وعند توازن فإن الكمية المطلوبة تساوي الكمية المعروضة كما يلي:

$$Q_O = Q_D \Longrightarrow -1600 + 160P_X = 1760 - 8P_X \Longrightarrow 3360 = 168P_X$$
$$\Longrightarrow P_{XE} = 20$$

وللحصول على الكمية التوازنية يكفي التعويض في احدى معادلتي العرض والطلب:

$$Q_O = -1600 + 160(20) \Longrightarrow Q_E = 1600$$

الكمية المعروضة عند كل منتج عند التوازن هي:

$$Q_E = \frac{1600}{200} \Longrightarrow Q_E = 8$$

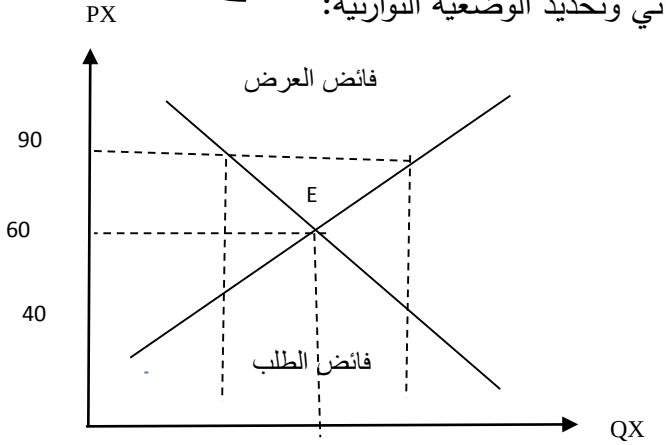
التمرين 05:

1. الوضعية التوازنية من الجدول تبين أن:

وعليه نموذج السوق يأخذ الشكل التالي:

$$\begin{cases} Q_O = Q_D \Longrightarrow \\ Q_E = 90 \\ P_{XE} = 60 \end{cases}$$

2. التمثيل البياني وتحديد الوضعية التوازنية:



---

80 90 100

- عند سعر 40 فإن الكمية المعروضة $Q_O = 80$ اقل من الكمية المطلوبة $Q_D = 100$ وبالتالي فهناك فائض في الطلب بمقدار $\Delta Q = Q_D - Q_O = 100 - 80 = 20$ هذا يدفع السعر الى الارتفاع بالتدريج حتى الوصول الى السعر التوازني $P_{XE} = 60$
- عند سعر 80 فإن الكمية المطلوبة $Q_D = 80$ والكمية المعروضة $Q_O = 100$ وبالتالي هناك فائض في العرض حيث $Q_O > Q_D$ هذا ما يدفع بالسعر الى الانخفاض التدريجي حتى الوصول الى السعر التوازني عند $P_{XE} = 60$

التمرين 07:

1. ايجاد الثوابت a و b

$$\begin{cases} 250 = \frac{a}{40} - b \\ 350 = \frac{a}{35} - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -100 = \frac{a}{40} - \frac{a}{35} \\ -100 = \frac{28000 - 40a}{1400} \end{cases}$$

$$a = 28000$$

$$\left\{250 = \frac{28000}{40} - b \Rightarrow \left\{\frac{28000 - 40b}{40} \Rightarrow \{10000 = 28000 - 40b\right.\right.$$

$$b = 450$$

$$Q_D = \frac{28000}{P} - 450$$

$$Q_D = \frac{28000}{35} - 450 \Rightarrow Q_D = 350$$

السعر الذي تمتلئ عنده القاعة:

$$Q_D = 500$$

$$500 = \frac{28000}{P} - 450 \Rightarrow 500 = \frac{28000 - 450P}{P} \Rightarrow 500P = 28000 - 450P$$

$$950P = 28000 \Rightarrow P = \frac{28000}{950} \Rightarrow P = 29.47$$

عند سعر 30 فان عدد المتفرجين المتوقع هو:

$$Q_D = \frac{28000}{30} - 450 \Rightarrow Q_D = 483.33$$

هل توقع صاحب السينما صحيح:

$$500 \longrightarrow 100\%$$
$$483.33 \longrightarrow X\%$$
$$X = \frac{483.33 * 100\%}{500} = 96.66\%$$

توقع صاحب القاعة غير صحيح

التمرين 08:

1. دالة الطلب الكلي للسوق للحوم البقر الكندية تكتب كالتالي:

$$Q_D = Q_{D_{\text{داخلي}}} + Q_{D_{\text{داخلي}}} = 3882 - 0.1P_X + 1118 - 0.4P_X$$

$$Q_D = 5000 - 0.5P_X$$

يحدد توازن السوق بتساوي العرض والطلب معا على النحو التالي:

$$Q_O = Q_D \Longrightarrow 3570 + 1.5P_X = 5000 - 0.5P_X \Longrightarrow 1430 = 2P_X \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow P_X = \frac{1430}{2} \Longrightarrow P_{XE} = 715$$

وبتعويض هذا السعر في أحد الدوال سواء العرض أو الطلب نتحصل على الكمية التوازنية كما يلي:

$$Q_D = 5000 - 0.5(715) \Longrightarrow Q_E = 4642.5$$

2. حساب مرونة الطلب السعرية للطلب الداخلي والخارجي:

$$E_X = \frac{\partial Q_X}{\partial P_X} \cdot \frac{P_X}{Q_X} = (-0.5)\frac{715}{4642.5} = -0.077$$

بما أن $|E_{PX} = -0.077| = 0.077 < \mathbf{1}$ الطلب غير مرن

3. بعد حظر اللحوم الكندية يصبح طلب السوق يعتمد فقط على الطلب المحلي وعليه فإن كمية وسعر التوازن تتغير كما يلي:

يحدد توازن السوق بتساوي العرض والطلب معا على النحو التالي:

$$Q_O = Q_D \Longrightarrow 3570 + 1.5P_X = 3882 - 0.1P_X \Longrightarrow 312 = 1.6P_X \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow P_X = \frac{312}{1.6} \Longrightarrow P_{XE} = 195$$

وبتعويض هذا السعر في أحد الدوال سواء العرض أو الطلب نتحصل على الكمية التوازنية كما يلي:

$$Q_D = 3882 - 0.1(715) \Longrightarrow Q_E = 3862.5$$

4. عند تحديد السعر الأدنى بـ 500 ون فان أثر ذلك على السوق:

حجم الطلب:

$$Q_D = 3882 - 0.1(500) = 3832$$

حجم العرض:

$$Q_O = 3570 + 1.5(500) = 4320$$

وعليه فإن مستوى العرض أكبر من الطلب

$$Q_D = 3832 < Q_O = 4320$$

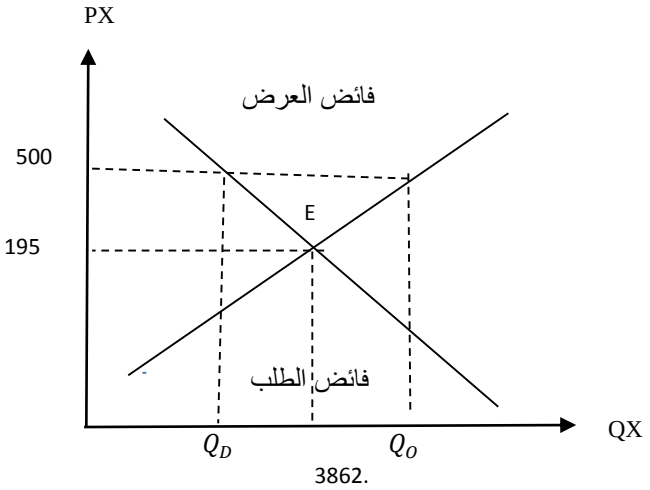
ومن هناك فائض في العرض بمقدار:

$$\Delta Q_O = Q_{O_2} - Q_{O_1} = 4320 - 3862.5 = 457.5$$

وعجز بمقدار:

$$\Delta Q_D = Q_{D_2} - Q_{D_1} = 3832 - 3862.5 = -30.5$$

التمثيل البياني وتحديد الوضعية التوازنية:



التمرين 09:

1. نوع التوازن

السوق هو توازن مستقر لان الكميات المعروضة عند الأسعار التي سعر التوازن اكبر من الكميات المطلوبة وعند الأسعار الأقل من سعر التوازن فان الكميات المعروضة أقل من الكميات المطلوبة وبالتالي هناك قوتين متضادتين متعاكستين نعمل نحو سعر التوازن ويمكن تكوين جدول الطلب والعرض لهذه السلعة لنبين ذلك التوازن الذي اذا حدث في توازن السوق والانحراف عن التوازن الأصلي والناتج عن بعض التغيرات يحدث تنشيط قوى سوقية تعمل على إعادة السوق الى حالة التوازن

حساب سعر وكمية التوازن:

يحدد توازن السوق بتساوي العرض والطلب معا على النحو التالي:

$$P_O = P_D \Longrightarrow 5 + Q_X = 50 - 2Q_X \Longrightarrow 45 = 3Q_X$$
$$\Longrightarrow Q_E = 15$$

وبتعويض الكمية التوازنية في أحد الدوال سواء العرض أو الطلب نتحصل على السعر التوازني كما يلي:

$$P_D = 50 - 2(15) \Longrightarrow P_E = 20$$

جدول الطلب والعرض

- بعد التوازن $Q_O > Q_D$
- قبل التوازن $Q_O < Q_D$

P	5	10	20	30	40
Q_D	22.5	10	15	10	50
Q_O	0	5	15	25	35

حساب فائض المنتج وفائض المستهلك عند التوازن:

- نرمز لفائض المنتج P_S
- نرمز لفائض المستهلك C_S

فائض المستهلك:

$$C_s = \int_0^Q F(Q_D)d_Q - P_e^* Q_e^* \Longrightarrow C_s = \int_0^{15} (50 - 2Q_X)d_Q - \big((20)(15)\big)$$

$$C_s = \left[50Q - \frac{2Q^2}{2} + C\right]_0^{15} \text{-300}$$

$$C_s = \left((50 * 15) - \frac{2(15)^2}{2} + c\right) - \left((50 * 0) - \frac{2(0)^2}{2} + c\right) - 300$$

$$C_s = 225$$

فائض المنتج:

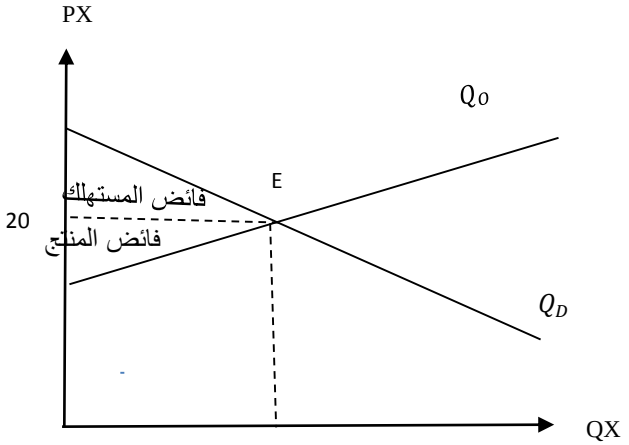
$$P_s = P_e^* Q_e^* - \int_0^Q F(Q_O)d_Q \Longrightarrow P_s = \big((20)(15)\big) - \int_0^Q (Q + 5)d_Q$$

$$P_s = 300 - \left[\frac{Q^2}{2} + 5Q + C\right]_0^{15}$$

$$P_s = 300 - \left(\frac{(15)^2}{2} + 5(15) + C\right) - \left(\frac{(0)^2}{2} + 5(0) + C\right)$$

$$P_s = 112.5$$

أما بيانيا فائض المنتج والمستهلك كالتالي:



فرض ضريبة قدرها t من طرف الحكومة يهدف برفع سعر قدره 5 ون

سعر التوازن القديم هو 20ون لكن بعد فرض ضريبة قدرها t يرتفع بمقدار 5 ون أي سعر بعد فرض ضريبة هو $P_E = 25$ ومنه الكمية التوازنية تصبح

$$P_D = 50 - 2Q_X \Longrightarrow 25 = 50 - 2Q_X \Longrightarrow 2Q_X = 25 \Longrightarrow Q_X = \frac{25}{2}$$

$$Q_E = 12.5$$

$$P_O - \mathrm{t} = 5 + Q_X \Longrightarrow t = P_E - 5 - Q_E \Longrightarrow t = 25 - 5 - 12.5 \Longrightarrow t = 7.5$$

ومنه مقدار الضريبة هو $t = 7.5$

حساب العبء الضريبي:

العبء الضريبي الذي يتحمله المشتري هو:

العبء الضريبي الذي يتحمله المشتري= سعر توازني بعد فرض ضريبة – سعر التوازني قبل فرض ضريبة
= سعر التوازني للطلب بعد فرض ضريبة– سعر التوازني قبل فرض ضريبة

$$P_E^{'} - P_E = P_D - P_E = 25 - 20 = 5$$

العبء الضريبي الذي يتحمله البائع هو:

$$P_O = P_D - t = 25 - 7.5 = 17.5$$

$$P_E - P_O = 20 - 17.5 = 2.5$$

عبء المشتري هو $\frac{5}{7.5} = 0.66 \Longrightarrow 66\%$

عبء البائع هو: $\frac{2.5}{7.5} = 0.33 \Longrightarrow 33\%$

وبالتالي المستهلك هو الذي يتحمل العبء الأكبر

حصيلة إيرادات الدولة:

$$TR = Q_E t \Longrightarrow TR = 12.5(7.5) = 93.75$$

التمرين 10:

1. بعد فرض ضريبة t فان عبء الضريبي الذي يتحمله البائع هو 2ون أي

$$P_E - P_O = 2$$

علما أن P_E هو سعر التوازن قبل فرض ضريبة t ومنه سنحسب أولا توازن السوق قبل فرض ضريبة t

حساب سعر وكمية التوازن:

يحدد توازن السوق بتساوي العرض والطلب معا على النحو التالي:

$$P_O = P_D \Longrightarrow 4 + 2Q_X = 20 - 2Q_X \Longrightarrow 16 = 4Q_X$$
$$\Longrightarrow Q_E = 4$$

وبتعويض الكمية التوازنية في أحد الدوال سواء العرض أو الطلب نتحصل على السعر التوازني كما يلي:

$$P_D = 20 - 2(4) \Longrightarrow P_E = 12$$

ومنه

$$P_E - P_O = 2 \Longrightarrow P_O = P_E - 2 = 10$$

2. حساب الكمية التوازنية بعد فرض ضريبة:

$$P_D = 20 - 2Q \Longrightarrow Q_D = 10 - 0.5P$$
$$P_O = 4 + 2Q \Longrightarrow Q_O = -2 + 0.5(P - t)$$

ولدينا

$$t = P_D - P_O$$

بحيث P_D هو سعر التوازن بعد فرض ضريبة نوعية t حيث $P_D = P_O + t$ و P_O هو سعر البائع هو $P_O = P_D - t$ وبعد فرض ضريبة نوعية بحيث يصبح النموذج هو :

$$\begin{cases} Q_D = 10 - 0.5(P_O + t) \\ Q_O = -2 + 0.5P_O \end{cases}$$

عند التوازن : لدينا حسب السؤال السابق $P_O = 10$

$$Q_O = Q_D \Longrightarrow -2 + 0.5P_O = 10 - 0.5(P_O + t) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 0.5P_O + 0.5(P_O + t) = 10 + 2 \Longrightarrow P_O + 0.5t = 12$$

$$\Longrightarrow t = \frac{12-10}{0.5} \Longrightarrow t = 4$$

وبالتعويض في دالة الطلب نجد كمية التوازن بعد فرض ضريبة:

$$Q_D = 10 - 0.5(10+4) \Longrightarrow Q_E = 3$$

3. اما سعر التوازن فهو:

$$P_E = P_D = P_O + t = 10 + 4 = 14$$

$$P_E = 14$$

4. العبء الضريبي الذي يتحمله المشتري هو:

$$P_E^{,,} - P_E = P_D - P_E = 14 - 2 = 2$$

وبالتالي المشتري يتحمل $\frac{2}{4} = 0.5 = 50\%$

والبائع يتحمل $\frac{2}{4} = 0.5 = 50\%$

5. حصيلة إيرادات الدولة:

$$TR = Q_E t \Longrightarrow TR = (3)(4) = 12$$

6. فائض المستهلك وفائض المنتج:

فائض المستهلك:

$$C_s = \int_0^Q F(Q_D)d_Q - P_e^* Q_e^* \Longrightarrow C_s = \int_0^4 (20 - 2Q_X)d_Q - \big((4)(12)\big)$$

$$C_s = [20Q - Q^2 + C]_0^4\text{-}48$$

$$C_s = \big((20*4) - 4^2 + c\big) - \big((40*0) - 0^2 + c\big) - 48$$

$$C_s = 16$$

فائض المنتج:

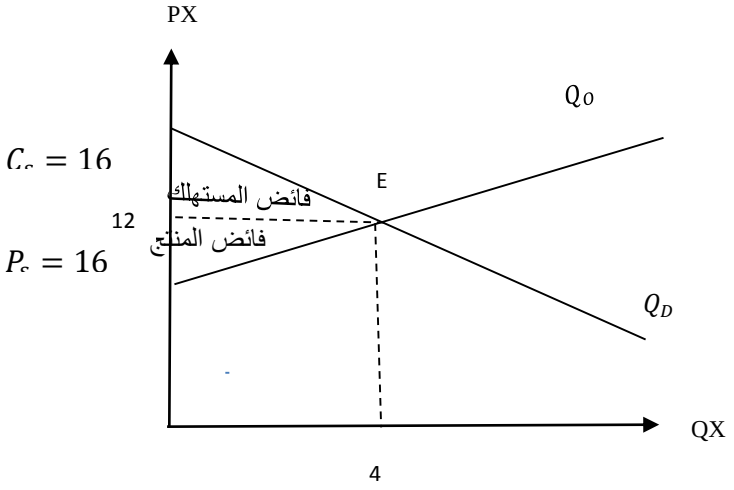
$$P_s = P_e^* Q_e^* - \int_0^Q F(Q_O)d_Q \Longrightarrow P_s = \big((4)(12)\big) - \int_0^4 (Q+5)d_Q$$

$$P_s = 48 - [4Q + Q^2 + C]_0^{15}$$

$$P_s = 300 - (4*4 + (4^2) + C) - (4*0 + (0^2) + C)$$

$$P_s = 16$$

أما بيانيا فائض المنتج والمستهلك كالتالي:



التمرين 11:

1. رسم منحنى الطلب:

نعطي قيم افتراضية للسعر لايجاد الكمية المطلوبة والكميات والاسعار مبينة في الجدول التالي:

$$P_D = 9 - Q \quad \Longrightarrow Q_X = 9 - P_X$$

6	5	4	3	2	1	P_X
3	4	5	6	7	8	Q_X

2. انفاق المستهلك عند السعر $P_X = 5$:

$$C_X = P_X Q_X = 5 * 4 = 20$$

3. فائض المستهلك:

$$C_s = \int_0^Q F(Q_D)d_Q - P_0^* Q_0^* \Longrightarrow C_s = \int_0^4 (9 - Q_X)d_Q - \big((5)(4)\big)$$

$$C_s = \left[9Q - \frac{Q^2}{2} + C\right]_0^4 - 20$$

$$C_s = \left((9 * 4) - \frac{4^2}{2} + c\right) - \left((9 * 0) - \frac{0^2}{2} + c\right) - 20$$

$$C_s = 8$$

4. حساب انفاق المستهلك عندما يرتفع السعر الى $P_X = 6$:

$$C_X = P_X Q_X = 6 * 3 = 18$$

5. فائض المستهلك:$P_0 = 6 \Longrightarrow Q_X = 3$

$$C_s = \int_0^Q F(Q_D)d_Q - P_0^* Q_0^* \Longrightarrow C_s = \int_0^4 (9 - Q_X)d_Q - \big((6)(3)\big)$$

$$C_s = \left[9Q - \frac{Q^2}{2} + C\right]_0^4 - 18$$

$$C_s = \left((9 * 3) - \frac{3^2}{2} + c\right) - \left((9 * 0) - \frac{0^2}{2} + c\right) - 18$$

$$C_s = \frac{9}{2}$$

6. دالة العرض $Q_O = 6P - 1$

عند فرض الدولة قدرها 2 ون لدينا جملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} Q_X = 9 - P \\ Q_O = 6(P-2) - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_X = 9 - P \\ Q_O = 6P - 12 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_X = 9 - P \\ Q_O = 6P - 13 \end{cases}$$

يحدد توازن السوق بتساوي العرض والطلب معا على النحو التالي:

$$Q_O = Q_D \Rightarrow 6P - 13 = 9 - P \Rightarrow 22 = 7P_X \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P_X = \frac{22}{3} \Rightarrow P_{XE} = 3.14$$

وبتعويض هذا السعر في أحد الدوال سواء العرض أو الطلب نتحصل على الكمية التوازنية كما يلي:

$$Q_D = 9 - (3.15) \Rightarrow Q_E = 5.86$$

7. سعر المنتج وسعر المستهلك:

سعر المستهلك:

$$P_D = \mathrm{P}_E = 3.14$$

سعر المنتج

$$P_O = P_D - t = 3.14 - 2 = 1.14$$

8. فائض المنتج عند سعر التوازن الاولي:

التوازن الاولي هو قبل تدخل الدولة لفرض ضريبة أي جملة المعادلة تكون:

$$\begin{cases} Q_X = 9 - P \\ Q_O = 6P - 1 \end{cases}$$

يحدد توازن السوق بتساوي العرض والطلب معا على النحو التالي:

$$Q_O = Q_D \Rightarrow 6P - 1 = 9 - P \Rightarrow 10 = 7P_X \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P_X = \frac{10}{3} \Rightarrow P_{XE} = 1.42$$

وبتعويض هذا السعر في أحد الدوال سواء العرض أو الطلب نتحصل على الكمية التوازنية كما يلي:

$$Q_D = 9 - (1.42) \Rightarrow Q_E = 7.58$$

9. فائض المنتج: $P_O = \frac{Q_X + 1}{6}$

فائض المنتج:

$$P_s = P_0^* Q_0^* - \int_0^Q F(Q_O) d_Q \Rightarrow P_s = \big((1.42)(7.58)\big) - \int_0^{7.58} \left(\frac{Q+1}{6}\right) d_Q$$

$$P_S = 10.76 - \left[\frac{Q^2}{12} + \frac{1}{6}Q + C\right]_0^{7.58}$$

$$P_s = 10.76 - \left(\frac{7.58^2}{12} + \frac{1}{6}7.58 + C\right) - \left(\frac{0^2}{12} + \frac{1}{6}0 + C\right)$$

$$P_s = 4.72$$

10. حصيلة إيرادات الدولة:

$$T = tQ_E = 2 * 5.86 = 11.72$$

11. مرونة الطلب السعرية:

$$E_X = \frac{\partial Q_X}{\partial P_X} \cdot \frac{P_X}{Q_X} = (-1)\frac{5}{4} = -1.25$$

بما ان $|E_X| = |-1.25| = 1.25 > 1$ فان الطلب مرن

مرونة العرض السعرية"

$$E_X = \frac{\partial Q_X}{\partial P_X} \cdot \frac{P_X}{Q_X} = 6\frac{5}{29} = 1.03 > 1$$

منه العرض مرن

التمرين 12:

1. حساب سعر وكمية التوازن

يحدد توازن السوق بتساوي العرض والطلب معا على النحو التالي:

$$Q_O = Q_D \Longrightarrow 400(5P - 10) = 4000\left(2 - \frac{1}{4}P\right) \Longrightarrow$$
$$2000P - 4000 = 8000 - 1000P \Longrightarrow 12000 = 3000P_X \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow P_X = \frac{12000}{3000} \Longrightarrow P_{XE} = 4$$

وبتعويض هذا السعر في أحد الدوال سواء العرض أو الطلب نتحصل على الكمية التوازنية كما يلي:

$$Q_D = 8000 - 1000(4) \Longrightarrow Q_E = 4000$$

2. اذا اصبحت دالة الطلب الجديدة $Q_D{}' = \frac{11}{4} - \frac{1}{4}P$

يحدد توازن السوق بتساوي العرض والطلب معا على النحو التالي:

$$Q_O = Q_D \Longrightarrow 400(5P - 10) = 4000\left(\frac{11}{4} - \frac{1}{4}P\right) \Longrightarrow$$
$$2000P - 4000 = 11000 - 1000P \Longrightarrow 15000 = 3000P_X \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow P_X = \frac{15000}{3000} \Longrightarrow P_{XE} = 5$$

وبتعويض هذا السعر في أحد الدوال سواء العرض أو الطلب نتحصل على الكمية التوازنية كما يلي:

$$Q_D = 11000 - 1000(5) \Longrightarrow Q_E = 6000$$

هذا يعني زيادة في السعر بوحدة نقدية واحدة $P' = 5 > P = 4$، وزيادة الكمية المطلوبة بمقدار 2000وحدة.

عند تقرير الحكومة منح اعانة للمنتجين فان معطيات السوق تصبح:

$$Q_O = 400(5(P + 0.5) - 10)$$

يحدد توازن السوق بتساوي العرض والطلب معا على النحو التالي:

$$Q_O = Q_D \Longrightarrow 400(5(P + 0.5) - 10) = 4000\left(2 - \frac{1}{4}P\right) \Longrightarrow$$
$$2000P + 200 - 4000 = 8000 - 1000P \Longrightarrow 11800 = 3000P_X \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow P_X = \frac{11800}{3000} \Longrightarrow P_{XE} = 3.66$$

وبتعويض هذا السعر في أحد الدوال سواء العرض أو الطلب نتحصل على الكمية التوازنية كما يلي:

$$Q_D = 8000 - 1000(3.66) \Longrightarrow Q_E = 4320$$

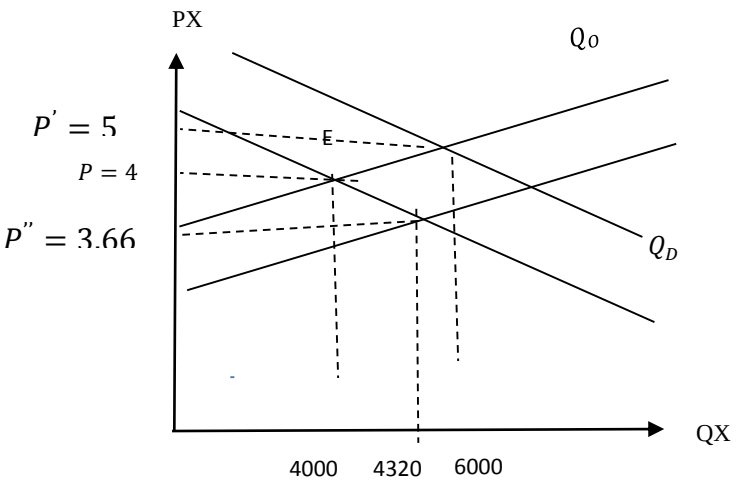
مجموع الانفاق الحكومي:

$$T = t * Q_E = 0.5 * 4320 = 2160$$

أثر هذا الدعم على معطيات السوق تكون كالتالي:

- زيادة مستوى الاستهلاك حيث انتقل حجم الطلب من 4000 الى 4320
- انخفاض السعر بمقدار $4 - 3.66 = 0.34$

أما بيانيا كالتالي:



التمرين 13:

يحدد توازن السوق بتساوي العرض والطلب معا على النحو التالي:

$$Q_O = Q_D \Longrightarrow = -5 + 2P_X = 10 - P_X \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow P_X = \frac{15}{3} \Longrightarrow P_{XE} = 5$$

وبتعويض هذا السعر في أحد الدوال سواء العرض أو الطلب نتحصل على الكمية التوازنية كما يلي:

$$Q_D = 10 - (5) \Longrightarrow Q_E = 5$$

عند فرض ضريبة على كل وحدة منتجة يتغير العرض ويبقى الطلب على حاله وتصبح دالة العرض الجديدة

$$Q_O = -5 + 2(P_X - 3) \Longrightarrow Q_O = -11 + 2P_X$$

يصبح سعر التوازن والكمية التوازنية كالاتي:

$$Q_O = Q_D \Longrightarrow = -11 + 2P_X = 10 - P_X \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow P_X = \frac{21}{3} \Longrightarrow P_{XE} = 7$$

وبتعويض هذا السعر في أحد الدوال سواء العرض أو الطلب نتحصل على الكمية التوازنية كما يلي:

$$Q_D = 10 - (7) \Longrightarrow Q_E = 3$$

عند منح اعانة تصبح دالة العرض الجديدة:

$$Q_O = -5 + 2(P_X + 3) \Longrightarrow Q_O = 1 + 2P_X$$

يصبح سعر التوازن والكمية التوازنية كالاتي:

$$Q_O = Q_D \Longrightarrow = 1 + 2P_X = 10 - P_X \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow P_X = \frac{11}{3} \Longrightarrow P_{XE} = 3.66$$

وبتعويض هذا السعر في أحد الدوال سواء العرض أو الطلب نتحصل على الكمية التوازنية كما يلي:

$$Q_D = 10 - (3.66) \Longrightarrow Q_E = 6.34$$

معدل الضريبة الذي يعطي حصيلة إيرادات الدولة $T = t * Q_E$، ولكي تكون T أعظمية فان $T' = 0$

نستنتج أولا سعر التوازني P_{XE}

$$Q_O = Q_D \Longrightarrow = -5 + 2(P_X - t) = 10 - P_X \Longrightarrow -5 + 2P_X - 2t = 10 - P_X$$
$$\Longrightarrow P_X = \frac{15 + 2t}{3} \Longrightarrow P_{XE} = 5 + \frac{2}{3}t$$

وبتعويض هذا السعر في أحد الدوال سواء العرض أو الطلب نتحصل على الكمية التوازنية كما يلي:

$$Q_D = 10 - \left(5 + \frac{2}{3}t\right) \Longrightarrow Q_E = 5 - \frac{2}{3}t$$

اذن حصيلة الضريبة

$$T = t * Q_E = t\left(5 - \frac{2}{3}t\right) \Longrightarrow T = 5t - \frac{2}{3}t^2$$

ولكي تكون T أعظمية فان

$$T' = 0 \Longrightarrow 5 - \frac{4}{3}t = 0 \Longrightarrow t = 3.75$$

وهو المعدل الذي يعظم الإيرادات

قيمة حصيلة الضريبة:

$$Q_E = 5 - \frac{2}{3}t = 5 - \frac{2}{3}(3.75) = 2.5$$

$$T = t * Q_E = 3.75 * 2.5 = 9.375$$

التمرين 14:

1. إيجاد سعر وكمية التوازن

يحدد توازن السوق بتساوي العرض والطلب معا على النحو التالي:

$$P_O = P_D \Longrightarrow -4 + Q_X = 10 - Q_X \Longrightarrow 14 = 2Q_X$$
$$\Longrightarrow Q_E = 7$$

وبتعويض الكمية التوازنية في أحد الدوال سواء العرض أو الطلب نتحصل على السعر التوازني كما يلي:

$$P_D = 10 - (7) \Longrightarrow P_E = 3$$

2. تحديد الكمية التوازنية بعد فرض ضريبة

$$\begin{cases} P = 10 - Q_D \\ P = -4 + Q_O \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Q_D = 10 - P \\ Q_O = 4 + P \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Q_D = 10 - P \\ Q_O = 4 + (P - 1) \end{cases}$$

يحدد توازن السوق بتساوي العرض والطلب معا على النحو التالي:

$$Q_O = Q_D \Longrightarrow = 4 + (P - 1) = 10 - P_X \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow P_X = \frac{7}{2} \Longrightarrow P_{XE} = 3.5$$

وبتعويض هذا السعر في أحد الدوال سواء العرض أو الطلب نتحصل على الكمية التوازنية كما يلي:

$$Q_D = 10 - (3.5) \Longrightarrow Q_E = 6.5$$

3. تحديد السعر الذي يدفعه البائع والسعر الذي يدفعه المشتري

- السعر الذي يدفعه المشتري: $P_D = 10 - Q_E = 10 - 6.5 = 3.5$
- السعر الذي يدفعه البائع: $P_O = 10 - Q_E = -4 + 6.5 = 2.5$

الفرق بين السعرين يساوي مقدار الضريبة: $P_D - P_O = t \Longrightarrow 3.5 - 2.5 = 1$

4.

$$\begin{cases} P = 10 - Q_D \\ P = -4 + Q_O \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Q_D = 10 - P \\ Q_O = 4 + P \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Q_D = 10 - P \\ Q_O = 4 + (P + 1) \end{cases}$$

يحدد توازن السوق بتساوي العرض والطلب معا على النحو التالي:

$$Q_O = Q_D \Longrightarrow = 4 + (P + 1) = 10 - P_X \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow P_X = \frac{5}{2} \Longrightarrow P_{XE} = 2.5$$

وبتعويض هذا السعر في أحد الدوال سواء العرض أو الطلب نتحصل على الكمية التوازنية كما يلي:

$$Q_D = 10 - (2.5) \Longrightarrow Q_E = 7.5$$

5. تحديد السعر الذي يدفعه البائع والسعر الذي يدفعه المشتري

- السعر الذي يدفعه المشتري: $P_D = 10 - Q_E = 10 - 7.5 = 2.5$
- السعر الذي يدفعه البائع: $P_O = 10 - Q_E = -4 + 7.5 = 3.5$

6. التكلفة الكلية التي تتحملها الحكومة: مقدار الاعانة مضروبة في الكمية التوازنية بعد الاعانة

$$S = t * Q_E = 1 * 7.5 = 7.5$$

التمرين 15:

1. يحدد توازن السوق بتساوي العرض والطلب معا على النحو التالي:

$$P_O = P_D \Longrightarrow 9 + 9Q_O = 39 - 3{Q_D}^2 \Longrightarrow -30 + 9Q_X + 3{Q_X}^2 = 0$$

وحل هذه المعادلة يكون بحساب المحدد وتحديد حلول هذه المعادلة:

حساب المحدد

$$\Delta= b^2 - ac \implies \Delta= (9)^2 - 4(3)(-30) = 81 + 360 = 441$$
$$\sqrt{\Delta}= 21$$

حساب الحلين:

$$Q_{E_1} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \implies Q_{E_1} = \frac{-9 - 21}{2(3)} \implies Q_{E_1} = -5 \ (\text{مرفوض})$$

$$Q_{E_2} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \implies Q_{E_2} = \frac{-9 + 21}{2(3)} \implies Q_{E_2} = 2$$

$$\implies Q_E = 2$$

وبتعويض الكمية التوازنية في أحد الدوال سواء العرض أو الطلب نتحصل على السعر التوازني كما يلي:

$$P_D = 39 - 3(2)^2 \implies P_E = 27$$

2. إيجاد t من أجل زيادة P_E بـ 3 ون

$$P_E = 27 + 3 = 30$$

نستنتج أولا دالتي العرض والطلب

.1

$$\begin{cases} P = 39 - 3{Q_D}^2 \\ P = 9 + 9Q_O \end{cases} \implies \begin{cases} Q_D = \sqrt{\frac{-39 + P}{-3}} \\ Q_O = \frac{-9 + P}{9} \end{cases} \implies \begin{cases} Q_D = \sqrt{13 - \frac{1}{3}P} \\ Q_O = -1 + \frac{1}{9}P \end{cases}$$

إيجاد معدل الضريبة

$$\implies \begin{cases} Q_D = \sqrt{13 - \frac{1}{3}P} \\ Q_O = -1 + \frac{1}{9}P \end{cases} \implies \begin{cases} Q_D = \sqrt{13 - \frac{1}{3}P} \\ Q_O = -1 + \frac{1}{9}(P - t) \end{cases}$$

يحدد توازن السوق بتساوي العرض والطلب معا على النحو التالي:

$$Q_O = Q_D \implies= -1 + \frac{1}{9}(P - t) = \sqrt{13 - \frac{1}{3}P} \implies$$

عند سعر $P_E = 27 + 3 = 30$

$$Q_O = Q_D \implies= -1 + \frac{1}{9}(30 - t) = \sqrt{13 - \frac{1}{3}30} \implies$$

$$\Longrightarrow \frac{7}{3}-\frac{t}{3}=\sqrt{3} \Longrightarrow \frac{t}{9}=\sqrt{3}-\frac{7}{3} \Longrightarrow t=-9\sqrt{3}+21$$
$$\Longrightarrow t=5.41$$

التمرين 16:

1. دالة الطلب السوقي لان ميلها سالب: $Q_X = 120000 - 20000P$

دالة العرض السوقي لان ميلها موجب: $Q_X = 20000P$

يحدد توازن السوق بتساوي العرض والطلب معا على النحو التالي:

$$Q_O = Q_D \Longrightarrow = 20000P = 120000 - 20000P \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow P_X = \frac{120000}{40000} \Longrightarrow P_{XE} = 3$$

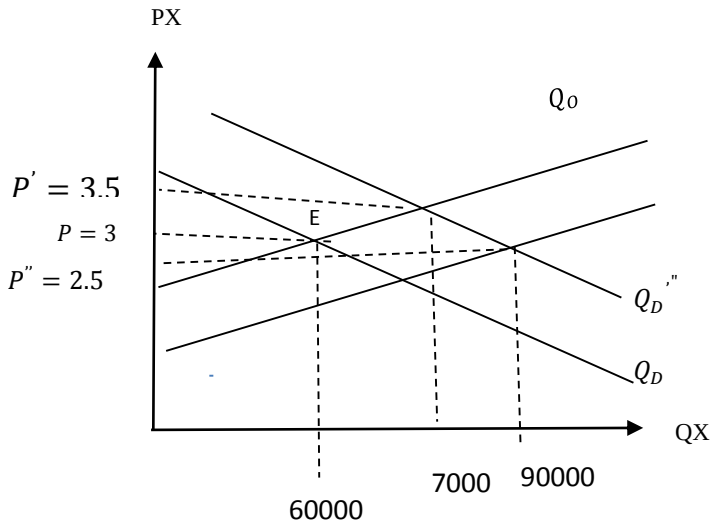
وبتعويض هذا السعر في أحد الدوال سواء العرض أو الطلب نتحصل على الكمية التوازنية كما يلي:

$$Q_D = 120000 - 20000(3) \Longrightarrow Q_E = 60000$$

جدول الطلب السوقي:

P	Q_D	Q_O
0	120000	0
1	80000	20000
3	60000	60000
4	40000	80000
5	20000	100000
6	0	120000

أما بيانيا كالتالي:



2. انشاء جدول الطلب السوقي الجديد للدالة $Q_X = 140000 - 20000P$

P	Q_D	Q_O
0	140000	0
1	120000	20000
2	10000	40000
3	80000	60000
3.5	70000	70000
4	60000	80000
5	40000	100000
6	10000	120000

يحدد توازن السوق بتساوي العرض والطلب معا على النحو التالي:

$$Q_O = Q_D \Longrightarrow = 20000P = 140000 - 20000P \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow P_X = \frac{140000}{40000} \Longrightarrow P_{XE} = 3.5$$

وبتعويض هذا السعر في أحد الدوال سواء العرض أو الطلب نتحصل على الكمية التوازنية كما يلي:

$$Q_D = 120000 - 20000(3.5) \Longrightarrow Q_E = 70000$$

3. انشاء جدول العرض السوقي الجديد للدالة $Q_X = 40000 + 20000P$

P	0	1	2	2.5	3	4	5	6
Q_D	140000	120000	10000	90000	80000	60000	40000	10000
Q_O	40000	60000	80000	90000	100000	120000	140000	160000

يحدد توازن السوق بتساوي العرض والطلب معا على النحو التالي:

$$Q_O = Q_D \Longrightarrow = 40000 + 20000P = 140000 - 20000P \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow P_X = \frac{120000}{40000} \Longrightarrow P_{XE} = 2.5$$

وبتعويض هذا السعر في أحد الدوال سواء العرض أو الطلب نتحصل على الكمية التوازنية كما يلي:

$$Q_D = 120000 - 20000(2.5) \Longrightarrow Q_E = 90000$$

3. منحنى الطلب انتقل الى اليمين للدلالة على زيادة الطلب مما جعل سعر التوازن يرتفع الى 3.5 وارتفاع الكمية التوازن الى 70000 ثم انتقل منجنى العرض الى اليمين للدلالة على زيادة العرض فكان أثر ذلك انخفاض سعر التوازن الى 2.5 وارتفاع كمية التوازن الى 90000.

المطلب الثالث: تمارين للحل حول توازن السوق وتطبيقاته

لتطبيق ما جاء في التمارين السابق وضعنا مجموعة من التمارين لحلها من طرف الطلبة

التمرين 01:

إذا كان نموذج السوق يأخذ الشكل التالي:

$$\begin{cases} Q_X = 2 - P \\ Q_X = -1 + P \end{cases}$$

1. ميز دالة الطلب عن دالة العرض،
2. حدد الكمية التوازنية بيانيا ورياضيا؟

التمرين 02:

إذا كان نموذج السوق يأخذ الشكل التالي:

$$\begin{cases} Q_{X1} = 10 - 2P_1 + P_2 \\ Q_{X1} = -2 + 3P_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_{X2} = 15 + P_1 - P_2 \\ Q_{X2} = -1 + 2P_2 \end{cases}$$

حدد سعري السلعتين عند التوازن وكذا الكمية المعروضة والمطلوبة من السلعتين؟

التمرين 03:

إذا كان نموذج السوق يأخذ الشكل التالي:

$$\begin{cases} Q_D = a - bP \\ Q_O = c + dP \end{cases}$$

بحيث $b > 0$، $d > 0$، $P > 0$، $Q > 0$

1. حدد سعر وكمية التوازن؟
2. ما هو الشرط الكافي للحصول على القيم التوازنية؟

التمرين 04:

بفرض أن دالتي الطلب والعرض معطاة كما يلي:

$$\begin{cases} Q_D = 8 - 2P \\ Q_O = 1 + 3P \end{cases}$$

1. أوجد سعر وكمية التوازن؟
2. اذا قامت الدولة بفرض سعر أقصى قدره 1.5ون للموحدة، بين بيانيا ماذا يحدث؟ نفس السؤال اذا قامت بفرض سعر أدنى قدره 3 ون للوحدة الواحدة؟
3. اذا فرضت الحكومة ضريبة نوعية بـ 1 ون على الوحدة الواحدة المباعة، أوجد سعر وكمية التوازن الموافقة؟ وأحسب معدل الضريبة الأمثل والسعر والكمية المناسبين وكذا حصيلة الحكومة من الضريبة؟

4. بمقارنة سعري البيع قبل وبعد فرض ضريبة حدد حصة العبء الضريبي التي يتحملها كل من البائع والمشتري مع التعليق عليها
5. إذا منحت اعانة بـ 1.5 ون للوحدة الواحدة المباعة فأوجد سعر التوازن وكمية التوازن؟ ثم حدد جزء الاعانة العائد لكل من البائع والمشتري؟
6. بفرض أن الحكومة قد قامت بفرض ضريبة قيمية بمعدل 20% على سعر الوحدة المباعة حدد سعر وكمية التوازن ومعدل الضريبة القيمية؟

التمرين 05:

في فرع انتاج النسيج تشغل 100 مؤسسة ذات دوال تكلفة مماثلة معطاه كما يلي:

$CT = \frac{1}{2}q^2 + 8q + 50$ بحيث $i = 1 \dots \dots \dots \dots \dots 100$. و q تعبر عن أطنان النسيج

1. عين دالة العرض الخاصة بكل مؤسسة ودالة العرض الكلية؟
2. عين سعر وكمية التوازن السائدين في فرع النسيج اذا علمت أن دالة الطلب من الشكل: $Q_D = 5000 - 150P$
3. اذا فرضت الدولة ضريبة نوعية قدرها 5 ون لكل وحدة منتجة، أحسب سعروكمية التوازن ومن يتحمل عبء الضريبي؟

التمرين 06:

بفرض أن دالتي الطلب والعرض معطاة كما يلي:

$$\begin{cases} Q_D = 8 - 2P \\ Q_O = 1 + 3P \end{cases}$$

1. ميز دالة الطلب ودالة العرض، اذا كان في السوق 400 طالب و 240 عارض لها؟

2. مثل دالة الطلب ودالة العرض عند تغير السعر من 1 الى 6؟

3. احسب سعر وكمية التوازن حسابيا وبيانيا؟

4. عرف مرونة الطلب السعرية واحسبها عند 4 وفسر النتيجة؟

5. احسب المرونة عند ارتفاعها من 4 الى 5 ثم من 5 الى 4 ماذا تلاحظ؟ ماهو الحل؟

6. وضح العلاقة بين الانفاق الكلي ومرونة الطلب السعرية؟

التمرين 07:

اليك الجدول التالي الذي يبين الكميات المعروضة و المطلوبة من سلعو ما عند مختلف الأسعار:

P	3	6	9	12	15	18
Q_D	34	28	22	16	10	4
Q_O	2	4	6	8	10	12

1. أوجد دالتي العرض والطلب ثم مثلهما بيانيا واستنتج سعر وكمية التوازن؟
2. عند السعر 9 ون ماهي مرونة الطلب السعرية؟ وماهي مرونة العرض السعرية؟

الخلاصة

يحدث توازن السوق بيانيا عند الجمع بين منحنى العرض والطلب في شكل بياني واحد، حيث يصبح لدينا نموذج متكامل يتحدد من خلاله كل من سعر وكمية التوازن بتقاطع المنحنين معا، ويطلق على نقطة التقاطع بنقطة التوازن.

وتتدخل الحكومة في الحياة الاقتصادية عن طريق تحديد السعر بهدف تحقيق سياسة معينة، ويكون ذلك بفرض ضرائب أو منح اعانات أو بفرض سعر أعلى أو سعر أدنى، وهذا ما ينعكس على سعر وكمية التوازن في السوق.

ولتسهيل استيعاب الطالب لتوازن السوق وضعنا مجموعة من التمارين مع حلولها كما عززنا ذلك بمجموعة من التمارين لحلها من طرف الطلبة.

المراجع

1. أحمد فوزي ملوخية، الاقتصاد الجزئي، مكتبة بستان المعرفة للنشر والتوزيع، ط1، 2005، الاسكندرية، مصر.
2. السيد محمد أحمد السريتي، علي عبد الوهاب نجا، مبادئ الاقتصاد الجزئي، ط1، دار الجامعية، الاسكندرية، مصر، 2008.
3. ابراهيم سليمان قطف، علي محمد خليل، مبادئ الاقتصاد الجزئي، حامد للنشر، ط1، عمان، الاردن، 2004.
4. بن ديب رشيد، نادية شطاب عباس، الاقتصاد الجزئي (نظرية وتمارين)، ط07، ديوان المطبوعات الجامعية،الجزائر،2014.
5. دومنيك سلفاتور، ترجمة سعد الدين محمد الشيال، سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في نظرية اقتصاديات الوحدة(نظريات وأسئلة)، ديوان المطبوعات الجامعية بترخيص من الدار الدولية للنشر والتوزيع، القاهرة ، الجزائر، 1994.
6. زغيب شهرزاد، بن ديب رشيد، الاقتصاد الجزئي أسلوب رياضي (100 تمارين محلولة)، ديوان المطبوعات الجامعية، ط2، الجزائر، 2013.
7. سحنون محمد، مبادئ الاقتصاد الجزئي –دروس ومسائل محلولة– بهاد الدين للنشر والتوزيع، ط1، قسنطينة، الجزائر، 2003.
8. شبكة الأبحاث والدراسات الاقتصادية، دروس في الاقتصاد الجزئي، على موقع .www.rr4ee.net
9. عبد الوهاب الأمين، فريد بشير طاهر، الاقتصاد الجزئي، مكتبة المتنبي، الدمام، المملكة العربية السعودية ، ط4، 2011.
10. فرحي محمد، التحليل الاقتصادي الجزئي، دار أسامة للطباعة والنشر والتوزيع، ط1، الجزائر، 2007.
11. محمد علي الليثي، كامل بكري، أحمد رمضان نعمة الله، عفاف عبد العزيز عايد، مبادئ الاقتصاد الجزئي، الناشر قسم الاقتصاد بكلية التجارة جامعة الاسكندرية، ط01، الاسكندرية، مصر، 2002.
12. محمود حسين الوادي، أحمد عارف العساف، وليد صافي، الاقتصاد الجزئي، ط 02، دار المسير للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2010.
13. محمود حسين الوادي، كاظم جاسم العيساوي، الاقتصاد الجزئي(تحليل نظري وتطبيقي)،ط 01، دار المسير للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2007.
14. محمد طاقة، محمد الزيود، وليد أحمد صافي، حسين عجلان، أساسيات علم الاقتصاد(الجزئي والكلي)، ط01، إثراء للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2008.

15. هاني العرب محاضرات تبسيط الاقتصاد الجزئي (التحليل الجزئي) محاضرات الكترونية، ملتقى البحث العلمي، على الموقع www.rssers.info.