حل السلسلة رقم 02:

التمرين الأول:

1) - تقدير معلمات نموذج كوب-دوغلاس بطريقة MCO على الشكل التالي بإدخال اللوغاريتم النبيري كما يلي:

لدينا النموذج من الشكل التالي:

$$Q = \alpha \cdot K^{\beta}$$

نقوم بإدخال اللوغاريتم فيصبح من الشكل التالي:

$$\ln Q = \ln(\alpha \cdot K^{\beta})$$

$$\ln Q = \ln \alpha + \beta \ln K + \ln \varepsilon$$

نضع: $\ln Q = Q^*$ ، $\ln \alpha = \alpha^*$ ، $\ln K = K^*$

$$\ln \varepsilon = \varepsilon^*$$

فيصبح النموذج من الشكل الخطي التالي:

$$Q^* = \alpha^* + \beta K^* + \varepsilon^*$$

2) تقدير معلمات نموذج كوب-دوغلاس بطريقة MCO:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum \ln Q \ln K - n(\overline{\ln K}) \cdot (\overline{\ln Q})}{\sum (\ln K)^2 - n(\overline{\ln K})^2}$$

$$(\overline{\ln K}) = \frac{\sum \ln K}{n} = \frac{25,8017}{27} = 0,9556$$

①

$$\overline{(\ln Q)} = \frac{\sum \ln Q}{n} = \frac{-6,8344}{27} = -0,2531$$

$$\hat{\beta} = \frac{-6,1024 - 27(0,9556)(-0,2531)}{25,1269 - 27(0,9556)^2} = \frac{0,5063}{0,6134}$$

$$\boxed{\hat{\beta} = 0,8254}$$

$$\hat{\alpha}^* = \overline{(\ln Q)} - \hat{\beta}\,\overline{(\ln k)}$$

$$\hat{\alpha} = -0,2531 - 0,8254(0,9556)$$

$$\boxed{\hat{\alpha}^* = -1,0418}$$

ومنه النموذج المقدر يكتب من الشكل:

$$\boxed{\hat{Q}^* = -1,0418 + 0,8254\,k^*}$$

والنموذج الأصلي يصبح من الشكل التالي:

$$\hat{Q} = 0,3528\,k^{0,8254}$$

حيث,

$$\hat{\alpha} = e^{\hat{\alpha}^*} = e^{-1,0418} = 0,3528$$

Scanné avec CamScanner

حساب R^2 :

R^2 ، معامل التحديد .

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = 1 - \frac{SCR}{SCT}$$

SCE : مجموع المربعات المفسّرة .

SCR : مجموع المربعات البواقي .

SCT : مجموع المربعات الكلية .

$$SCE = \hat{\beta}^2 \sum (\ln k - (\overline{\ln k}))^2 = \hat{\beta}^2 \left(\sum (\ln K)^2 - n(\overline{\ln k})^2 \right)$$

$$= (0,8254)^2 (25,269 - 27(0,9956)$$

$$= 0,4179$$

$$SCT = \sum (\ln Q - (\overline{\ln Q}))^2 = \sum (\ln Q)^2 - n(\overline{\ln Q})^2$$

$$= 2,205 - 27(-0,2631)^2$$

$$= 0,4754$$

$$SCT = SCE + SCR$$

$$SCR = SCT - SCE = 0,4754 - 0,4179 = 0,0575$$

ومنه :

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{0,4179}{0,4754} = 0,88$$

وهذا يعني أن 88% من التغيرات الحاصلة في الإنتاج Q سببها العمل K والباقي 12% عبارة عن عوامل خارجية لم تدرج في النموذج متضمنة في حد الخطأ العشوائي ε .

Scanné avec CamScanner

التمرين الثاني:

1) تقدير معلمات النموذج كثير الحدود بطريقة MCO:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \varepsilon$$

النموذج القياسي الخطي الموافق هو:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$$

حيث: $x_2 = x^2$ ، $x_1 = x$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(\sum x_1 y)(\sum x_2^2) - (\sum x_2 y)(\sum x_1 x_2)}{\sum x_1^2 \cdot \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(\sum x_2 y)(\sum x_1^2) - (\sum x_1 y)(\sum x_1 x_2)}{\sum x_1^2 \cdot \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 .$$

$\sum$										
285	8100	6400	4900	3600	2500	1600	900	400	100	x_1^2
133380000	65610000	40960000	24010000	12960000	6250000	2560000	810000	160000	10000	x_2^2
245000	729000	512000	343000	216000	125000	64000	27000	8000	1000	$x_1 x_2$
50970	5850	8000	8750	8400	7350	5680	3990	2300	650	$x_1 y$
3049900	526500	640000	612500	504000	367500	227200	119700	46000	6500	$x_2 y$

Scanné avec CamScanner

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(50970)(15333000) - (3049900)(2025000)}{(28500)(15333000) - (2024000)^2} = \frac{1639182600000}{\cdots}$$

$$\hat{\beta}_1 = 6,087$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(3049900)(28500) - (50970)(2024000)}{(28500)(15333000) - (2024000)^2} = \frac{-162921000000}{269280000000}$$

$$\hat{\beta}_2 = -0,0605$$

$$\hat{\beta}_0 = 114,666667 - 6,087(50) - (-0,0605)(3166,66667)$$

$$\hat{\beta}_0 = 1,9$$

ومنه النموذج المقدر يكتب من الشكل:

$$\hat{y} = 1,9 + 6,087 x_1 - 0,0605 x_2$$

2) قيم $\hat{y}$ النظرية:

نقوم بتعويض قيم كل من x_1 و x_2 في المعادلة، وفي كل مرة نتحصل على قيم $\hat{y}$.

$\hat{y}$	56,72	99,44	130,06	148,58	155	149,32	131,54	101,66	59,68

Scanné avec CamScanner