حل السلسلة رقم 01:

التمرين الأول:

① الصيغة الخطية للعلاقات أعلاه:

- النموذج اللوغاريتمي المزدوج:

$$y_t = \beta_0 X_t^{\beta_1} \cdot \varepsilon_t$$

بإدخال اللوغاريتم يصبح من الشكل:

$$\ln y_t = \ln(\beta_0 X_t^{\beta_1} \cdot \varepsilon_t)$$

$$\ln y_t = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln X_t + \ln \varepsilon_t$$

نضع:

$$\beta_0^* = \ln \beta_0 \quad , \quad y_t^* = \ln y_t$$

$$\varepsilon_t^* = \ln \varepsilon_t \quad , \quad X_t^* = \ln X_t$$

النموذج القياسي الموافق بعد تغيير المتغير (خطي):

$$y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 X_t^* + \varepsilon_t^*$$

- النموذج نصف اللوغاريتمي:

$$y_t = \beta_0 e^{\beta_1 X_t} \cdot \varepsilon_t$$

- بإدخال اللوغاريتم نتحصل على:

$$\ln y_t = \ln(\beta_0 e^{\beta_1 X_t} \cdot \varepsilon_t)$$

$$\ln y_t = \ln \beta_0 + \beta_1 X_t \cancel{\ln e}^{\,1} + \ln \varepsilon_t$$

1

نضع: $y_t^* = \ln y_t$ ، $\beta_0^* = \ln \beta_0$ ، $\varepsilon_t^* = \ln \varepsilon_t$

يصبح النموذج القياسي بعد التغيير:

$$y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 x_t + \varepsilon_t^* .$$

- النموذج التربيعي:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 x_t^2 + \varepsilon_t$$

نضع: $x_{1t} = x_t$ ، $x_{2t} = x_t^2$

يصبح النموذج كما يلي:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon_t$$

2/ تمثل ε حد الخطأ العشوائي.

3/ نفضل استعمال طريقة المربعات الصغرى العادية لأنها تعطي أفضل مقدرات غير متحيزة وكفاءة.

المترين الثاني:

- تقدير معادلة الانحدار وفق الدالة نصف اللوغاريتمية التالية:

$$N = e^{(\alpha_0 + \alpha_1 T)} \cdot \varepsilon_t$$

بإدخال اللوغاريتم نتحصل على النموذج التالي:

$$\ln N = \ln\left(e^{\alpha_0 + \alpha_1 T}\right) + \ln \varepsilon$$

$$\ln N = \alpha_0 + \alpha_1 T + \ln \varepsilon$$

نضع: $N^* = \ln N$ ، $\varepsilon^* = \ln \varepsilon$ يصبح النموذج كالتالي:

$$N^* = \alpha_0 + \alpha_1 T + \varepsilon^*$$

نقدر النموذج بواسطة طريقة المربعات الصغرى العادية كما يلي:

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\sum T \cdot N^* - n\bar{T} \cdot \bar{N}^*}{\sum T^2 - n\bar{T}^2} \quad ; \quad \hat{\alpha}_0 = \bar{N}^* - \hat{\alpha}_1 \bar{T}$$

حيث:

$$\bar{T} = \frac{\sum T}{N} = \frac{210}{20} = 10,5$$

$N =$ عدد المشاهدات

المتغير التابع

$$\bar{N}^* = \frac{\sum N^*}{N} = \frac{88,26}{20} = 4,413$$

$N =$ عدد المشاهدات

أولا، نحسب $\ln N$ التي نتحصل على N^*

$\ln N$	4,24	4,26	4,26	4,27	4,29	4,31	4,33	4,35	4,37	4,39	4,41	4,43	4,46
	4,48	4,51	4,53	4,55	4,58	4,61	4,63						

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{940,75 - 20(10,5)(4,413)}{2870 - 20(10,5)^2} = \frac{14,02}{665} = 0,021$$

$$\hat{\alpha}_0 = 4,413 - 0,021(10,5) = 4,1925$$

ومنه النموذج المقدر يكتب من الشكل:

$$\boxed{\hat{N}^* = 4,1925 + 0,021\,T}$$

حل التمرين الثالث:

- تقدير معادلة الانحدار وفق طريقة المربعات الصغرى العادية بعد إجراء التحويل المناسب:

- **النموذج الأول:**

$$Y_t = \alpha \cdot X_t^{\beta} \cdot \varepsilon_t$$

بإدخال اللوغاريتم على الطرفين نجد:

$$\ln y = \ln\left(\alpha X_t^{\beta} \cdot \varepsilon_t\right)$$

$$\ln y = \ln\alpha + \beta \ln X_t + \ln\varepsilon_t$$

- **النموذج الثاني:**

$$Y_t = e^{(\alpha + \beta X_t)} \cdot \varepsilon_t$$

بإدخال اللوغاريتم على الطرفين نجد:

$$\ln y = \ln\left(e^{\alpha + \beta X_t} \cdot \varepsilon_t\right)$$

$$\ln y = \alpha + \beta X_t + \ln\varepsilon_t$$

- تقدير النموذجين: نضع

$$\ln y = W, \quad \ln x = Z$$

$$\ln\alpha = a$$

بحيث: $X = P \quad , \quad \varphi = y$

x	y	z	w	$z^* w$	z^2	x^2	$x^* w$	e_1^2	e_2^2
70	90	4,25	4,50	19,125	18,0625	4900	315		
105	44	4,65	3,78	17,577	21,6225	11025	396,9		
123	27	4,81	3,30	15,873	23,1361	15129	405,9		
185	12	5,22	2,48	12,9456	27,2484	34225	458,8		
220	9	5,39	2,20	11,858	29,0521	48400	484		
240	7	5,48	1,95	10,686	30,0304	57600	468		
260	4	5,56	1,39	7,7284	30,9136	67600	361,4		
280	2	5,63	0,69	3,8847	31,6969	78400	193,2		
				99,6777	211,7625	317279	3083,2		

$$\bar{z} = \frac{40,99}{8} = 5,124 \; ; \; \bar{w} = \frac{20,29}{8} = 2,536$$

النموذج الأول :

$$\hat{\beta} = \frac{\sum zw - n\bar{z}\bar{w}}{\sum z^2 - n\bar{z}^2} = \frac{99,678 - 8(5,124)(2,536)}{211,762 - 8(5,124)^2}$$

$$\hat{\beta} = -2,49$$

$$\hat{a} = \bar{w} - \hat{\beta}\bar{z} = 2,536 - (-2,49)(5,124) = 15,29$$

$$\hat{\alpha} = e^{\hat{a}} = e^{15,29} = 4368804,7$$

ومنه تكون المعادلة :

$$\boxed{\hat{y}_t = 4368804,7\, X_t^{-2,49}}$$

5

النموذج الثاني :

$$\bar{x} = 185,375$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum xw - n\bar{x}\bar{w}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2} = \frac{3083,2 - 8(185,375)(2,536)}{317279 - 8(185,375)^2}$$

$$\hat{\beta} = \frac{-677,688}{42367,875} = -0,016 \Rightarrow \boxed{\hat{\beta} = -0,016}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{w} - \hat{\beta}\bar{x} = 2,536 - (-0,016)(185,375)$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\alpha} = 5,502}$$

$$\boxed{\hat{y}_t = e^{5,502 - 0,016 x_t}}$$

$e_1 = y - \hat{y}_1$

x	y	$\hat{y}_1$	e_1	e_1^2	$\hat{y}_2$	e_2	e_2^2
70	90	111,19	-21,19	449,02	80	10	100
105	44	40,51	3,49	12,18	45,69	-1,69	2,86
123	27	27,32	-0,32	0,102	34,26	-7,26	52,71
185	12	9,89	2,11	4,45	12,70	-0,7	0,49
220	9	6,42	2,58	6,66	7,26	1,74	3,03
240	7	5,17	1,83	3,35	5,27	1,73	2,99
260	4	4,24	-0,24	0,06	3,83	0,17	0,03
280	2	3,52	-1,52	2,31	2,78	-0,78	0,608
Σ				478,132			162,72

2- تحديد النموذج الأفضل لتمثيل البيانات إعتمادا على متوسط مربع الخطأ.

$$MSE = \frac{\sum e^2}{n-k} =$$

$$MSE_1 = \frac{478{,}932}{8-2} = 79{,}69$$

$$MSE_2 = \frac{162{,}72}{8-2} = 27{,}12$$

النموذج الثاني يعطي أدنى متوسط مربع الخطأ وبالتالي فهو الأمثل لتمثيل البيانات المدروسة.