تمهيـــد:

تفترض العديد من النماذج القياسية العلاقة الخطية بين المتغيرات المستقلة والمتغير التابع، كنموذج الانحدار الخطي البسيط والنموذج الخطي المتعدد الكثيري الاستخدام في الدراسات القياسية، وهذا الافتراض يسمح باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في التقدير.

لكن في الواقع، النمذجة بافتراض العلاقة الخطية التي تربط مختلف الظواهر الاقتصادية غير محققة في العديد من الحالات، فالكثير من هذه العلاقات لا تأخذ طابعا خطيا. ولهذا فتقدير نموذج قياسي بافتراض وجود علاقة خطية دون التأكد من ذلك مسبقا قد يؤدي إلى أخطاء كبيرة وإلى سوء توصيف النموذج، وهذا ما يؤثر بصورة مباشرة على النتائج المتوصل إليها. ولهذا كان من الأهمية بمكان دراسة النماذج غير الخطية ومعرفة كيفية تقديرها، وكيف تستخدم في النمذجة القياسية بشكل عام.

وقد تم تطوير العديد من النماذج غير الخطية، بالإضافة إلى توسيع وتعميم النماذج الخطية إلى نماذج غير خطية، للأخذ بعين الاعتبار خصائص البيانات المدروسة، والاقتراب بأفضل شكل ممكن للصيغة الدالية الصحيحة للنموذج القياسي.

وسأركز في هذه الورقة البحثية على بعض النماذج غير الخطية التي يمكن أن يستخدمها الباحث في دراسته القياسية، وشرح كيفية تطبيقها على بعض البرمجيات الإحصائية الجاهزة.

وأشير إلى أن المثال التطبيقي الذي سأعمل عليه هو دراسة أثر عنصري العمل (اليد العاملة L) ورأس المال (K) على النمو الاقتصادي (مقاس بمؤشر الناتج المحلي الخام GDP) في الجزائر، خلال الفترة الممتدة من سنة 1970 إلى سنة 2020 (51 مشاهدة)، وقد تم الحصول على البيانات من الديوان الوطني للإحصائيات والبنك الدولي.

المبحث الأول: الجانب النظري

1. مفهوم النماذج غير الخطية:

كثيرا ما يكون شكل انتشار النقاط عند تمثيل المتغيرات غير خطي، وعند بناء نموذج قياسي يتعين على الباحث البحث عن أفضل صيغة رياضية معبرة عن العلاقة بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة، بحيث تجعل تقدير العلاقة أكثر دقة وأقرب للواقع.

والنماذج غير الخطية هي نماذج رياضية تكون فيها الصيغة الدالية للعلاقة التي تربط المتغير التابع بالمتغير (أو المتغيرات) المستقل (ة) غير خطية، سواءا بالنسبة للمتغيرات أو بالنسبة للمعلمات، أو بالنسبة لهما معا.

- نموذج غير خطي بالنسبة للمتغير: $Y = \beta_0 + \beta_1 X^2$.
- نموذج غير خطي بالنسبة للمعلمات: $Y = \lambda X_1 + (1-\lambda)^2 X_2$.
- نموذج غير خطي بالنسبة للمتغير وللمعلمات: $Y = \beta_0 + (1-\lambda)^2 X_1^{\beta_1} + \beta_3 X_2^2$.

2. أمثلة على بعض النماذج غير الخطية:

في بداية هذا العنصر، تجدر الإشارة إلى أنه يمكن تقسيم النماذج غير الخطية من حيث إمكانية تحويلها إلى مجموعتين: نماذج غير خطية يمكن تحويلها إلى نماذج خطية، ونماذج غير خطية لا يمكن تحويلها إلى نماذج خطية.

أ. نماذج غير خطية يمكن تحويلها إلى نماذج خطية:

النماذج غير الخطية التي يمكن تحويلها إلى نماذج خطية هي في الغالب نماذج غير خطية في المتغيرات لكنها خطية في المعلمات، ومن بين أهم هذه النماذج:

❖ **<u>الدوال كثيرات الحدود:</u>**

الدالة كثيرة الحدود هي دالة غير خطية بالنسبة للمتغيرات لاحتوائها على متغيرات بالقوى (مربع (نموذج تربيعي، مكعب (نموذج تكعيبي)، ...). لكن يمكن تقديرها وكأنها دالة خطية باعتبار كل متغير بالقوى هو متغير مستقل في النموذج.

بشكل عام كثير الحدود من الدرجة k يكتب على الشكل التالي:

$$\boldsymbol{Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \beta_3 X^3 + \cdots + \beta_k X^k}.$$

النموذج القياسي الموافق (خطي) هو:

$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$. حيث: $t = 1,2, \dots n$

حيث: $X_{1t} = X$، $X_{2t} = X^2$، $X_{3t} = X^3$، ... ،$X_{kt} = X^k$.

وتعتبر **دالة التكاليف الكلية** من هذا النوع من النماذج غير الخطية، والتي تأخذ الصيغة التالية:

$$\boldsymbol{CT_t = \beta_0 + \beta_1 Q_t + \beta_2 Q_t^2 + \varepsilon_t}. \quad (t = 1,2, \dots, n).$$

حيث CT هي التكلفة الكلية و Q هي كمية الإنتاج.

❖ **<u>الدوال نصف (شبه) اللوغاريتمية:</u>**

الدالة نصف اللوغاريتمية أو شبه اللوغاريتمية هي دالة غير خطية، أين يكون أحد طرفي النموذج باللوغاريتم.

ونميز فيه بين حالتين:

✓ **<u>المتغير التابع باللوغاريتم (Log–Lin)</u>:** يمكن تقدير هذه الدالة وكأنها دالة خطية باعتبار لوغاريتم المتغير هو المتغير التابع.

- الدالة النصف لوغاريتمية الأصلية (غير خطية): $\boldsymbol{\ln(Y) = \beta_0 + \beta_1 X}$.

  (وأصلها هو: $\boldsymbol{Y = e^{\beta_0 + \beta_1 X}}$).

- النموذج القياسي الموافق بعد تغيير المتغير (خطي): $Y_t^* = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$

  حيث: $(t = 1,2, \dots, n)$ و $Y_t^* = \ln(Y)$.

وتعتبر **دالة معدل النمو** من هذا النوع من النماذج غير الخطية، والتي تأخذ الصيغة التالية:

- دالة معدل النمو الأصلية (غير خطية): $\boldsymbol{Y_t = Y_0(1+r)^t}$.
- النموذج القياسي الموافق بعد إدخال اللوغاريتم (خطي): $ln(Y_t) = ln(Y_0) + t\, ln(1+r) + \varepsilon_t$.
فتصبح من الشكل: $Y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 t + \varepsilon_t$.

✓ **المتغير المستقل باللوغاريتم (Lin–Log)**: يمكن تقدير هذه الدالة وكأنها دالة خطية باعتبار لوغاريتم المتغير هو المتغير المستقل.

- الدالة النصف لوغاريتمية الأصلية (غير خطية): $\boldsymbol{Y = \beta_0 + \beta_1 \ln(X)}$.
(وأصلها هو: $\boldsymbol{e^Y = \beta_0 X^{\beta_1}}$).
- النموذج القياسي الموافق بعد تغيير المتغير (خطي): $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t^* + \varepsilon_t$
حيث: $(t = 1,2,\dots,n)$ و $X_t^* = \ln(X)$.

❖ **دوال المعكوس (المقلوب):**

دالة المعكوس هي دالة غير خطية، أين يكون المتغير المستقل هو مقلوب متغير ما. لكن يمكن تقدير هذه الدالة وكأنها دالة خطية باعتبار مقلوب المتغير هو المتغير المستقل.

- دالة المعكوس الأصلية (غير خطية): $\boldsymbol{Y = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{X}\right)}$.
- النموذج القياسي الموافق بعد تغيير المتغير (خطي): $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t^* + \varepsilon_t \qquad (t = 1,2,\dots,n)$
حيث: $X_t^* = \frac{1}{X}$.

ومن بين الأمثلة الاقتصادية على دالة المقلوب، العلاقة بين نسبة التغير في الأجور (W_t) ونسبة البطالة (R_t) (**منحنى فيليبس** – Phillips Curve)، والتي تأخذ الصيغة التالية:

$$\boldsymbol{W_t = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{R_t}\right) + \varepsilon_t}.$$

يمكن تحويل هذا النموذج إلى نموذج خطي بتغيير رمز المتغير مقلوب نسبة البطالة كما يلي: $R_t^* = \frac{1}{R_t}$

فيصبح النموذج خطي: $W_t = \beta_0 + \beta_1 R_t^* + \varepsilon_t$.

❖ **دوال لوغاريتم – مقلوب:**

دالة لوغاريتم – مقلوب هي دالة غير خطية، أين يكون المتغير التابع هو لوغاريتم متغير ما، والمتغير المستقل هو مقلوب متغير أخر ما. لكن يمكن تقدير هذه الدالة وكأنها دالة خطية باعتبار لوغاريتم المتغير هو المتغير التابع، ومقلوب المتغير الأخر هو المتغير المستقل.

- الدالة لوغاريتم – مقلوب الأصلية (غير خطية): $\boldsymbol{\ln(Y) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{X}\right)}$.
(وأصلها هو: $Y = e^{\beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X}}$).
- النموذج القياسي الموافق بعد تغيير المتغير (خطي): $Y_t^* = \beta_0 + \beta_1 X_t^* + \varepsilon_t$
حيث: $(t = 1,2,\dots,n)$ و $X_t^* = \frac{1}{X}$ و $Y_t^* = \ln(Y)$.

❖ **الدالة الأسية البسيطة (Log–Log):**

هي دالة غير خطية يكون فيها المتغير المستقل قوى عدد حقيقي، ومضروب في عدد حقيقي أخر. لكن يمكن تحويلها إلى دالة خطية بإدخال اللوغاريتم على الدالة.

- الدالة الأسية الأصلية (غير خطية): $\boldsymbol{Y = \beta_0 X^{\beta_1}}$.
- النموذج القياسي الموافق بعد إدخال اللوغاريتم (خطي): $\ln(Y_t) = \ln(\beta_0) + \beta_1 \ln(X_t) + \ln(\varepsilon_t)$

فتصبح من الشكل: $Y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 X_t^* + \varepsilon_t^*$.

حيث: $Y_t^* = \ln(Y)$ و $\beta_0^* = \ln(\beta_0)$ و $X_t^* = \ln(X_t)$ و $\varepsilon_t^* = \ln(\varepsilon_t)$ و $(t = 1,2, \dots, n)$.

❖ **الدالة الأسية المتعددة(Log–Log):**

هي دالة غير خطية تكون فيها المتغيرات المستقلة قوى أعداد حقيقية، ومضروبة في عدد حقيقي أخر. لكن يمكن تحويلها إلى دالة خطية بإدخال اللوغاريتم على الدالة.

- الدالة الأسية المتعددة الأصلية (غير خطية): $\boldsymbol{Y = \beta_0 {X_1}^{\beta_1} {X_2}^{\beta_2} \dots {X_k}^{\beta_k}}$.
- النموذج القياسي الموافق بعد إدخال اللوغاريتم (خطي):

$$\ln(Y_t) = \ln(\beta_0) + \beta_1 \ln(X_{1t}) + \beta_2 \ln(X_{2t}) + \cdots + \beta_k \ln(X_{kt}) + \ln(\varepsilon_t) .$$

فتصبح من الشكل: $Y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 X_{1t}^* + \beta_2 X_{2t}^* + \cdots + \beta_k X_{kt}^* + \varepsilon_t^*$.

حيث: $Y_t^* = \ln(Y)$ و $\beta_0^* = \ln(\beta_0)$ و $X_{it}^* = \ln(X_{it})$ $(i = 1,2, \dots, k)$ و $\varepsilon_t^* = \ln(\varepsilon_t)$ و $(t = 1,2, \dots, n)$.

وكمثال على ذلك دالة كوب دوقلاس (Cobb–Douglas) هي في أصلها دالة غير خطية، لكن يمكن تحويلها إلى دالة خطية من خلال التحويل اللوغاريتمي.

- دالة كوب دوقلاس الأصلية (غير خطية): $\boldsymbol{Q = \beta_0 K^{\beta_1} L^{\beta_2}}$.
- النموذج القياسي الموافق بعد إدخال اللوغاريتم (خطي):

$$ln(Q_t) = ln(\beta_0) + \beta_1\, ln(K_t) + \beta_2\, ln(L_t) + ln(\varepsilon_t) \quad (t = 1,2, \dots, n).$$

فتصبح من الشكل: $Q_t^* = \beta_0^* + \beta_1 K_t^* + \beta_2 L_t^* + \varepsilon_t^*$.

ملاحظة: للعودة إلى النموذج الأصلي بعد تقدير المعلمات نقوم بالعملية العكسية، أي إدخال الدالة الأسية على النموذج الخطي المحول ($\hat{\beta}_0 = e^{\hat{\beta}_0^*}$).

ب. نماذج غير الخطية لا يمكن تحويلها إلى نماذج خطية:

على عكس النماذج التي تطرقنا إليها أعلاه، هناك بعض النماذج يستحيل تحويلها إلى شكل خطي، نظرا لتعقد صيغتها الرياضية أو لعدم وجود تحويل مناسب يمكن القيام به. والنماذج غير الخطية التي لا يمكن تحويلها إلى نماذج خطية هي في الغالب نماذج غير خطية في المعلمات، وقد تكون خطية أو غير خطية في المتغيرات.

يمكن كتابة مثل هذه النماذج وفق الصيغة التالية: $\boldsymbol{Y = f(X, \mathrm{B}) + \varepsilon}$.

حيث: Y هو المتغير التابع، $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nk} \end{pmatrix}$ هي مصفوفة المتغيرات المستقلة، و $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$ هو شعاع المعلمات. و $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$ هو حد الخطأ.

و: $f(.)$ هي الدالة الرياضية التي تعبر عن العلاقة غير الخطية بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة. وهي دالة يمكن أن تأخذ أي صيغة رياضية لا يمكن تحويلها إلى صيغة خطية.

3. كيفية تقدير النماذج غير الخطية:

نمير في طرق تقدير النماذج غير الخطية بين حالتين، بين تقدير النماذج التي يمكن تحويلها إلى شكل خطي والتي لا يمكن تحويلها.

أ. تقدير النماذج غير الخطية التي يمكن تحويلها إلى نماذج خطية:

بما أن هذا النوع من النماذج غير الخطية يمكن تحويلها إلى نماذج خطية، فلتقديرها نقوم بإجراء التحويل المناسب على النموذج غير الخطي لتحويله إلى نموذج خطي، ثم نقدره بطريقة المربعات الصغرى العادية (توفر فرضية الخطية).

ب. تقدير النماذج غير الخطية التي لا يمكن تحويلها إلى نماذج خطية:

إن النماذج غير الخطية التي لا يمكن تحويلها إلى نماذج خطية لا يمكن تقديرها بطريقة المربعات الصغرى العادية. ولتقدير مثل هذه النماذج نستعين ببعض التقنيات والأساليب كالأمثلية العددية (optimisation) والتي تعتمد على العمليات التكرارية في نشر تايلور (Taylor).

لقد طوّر كل من غوس ونيوتن (Gauss–Newton) طريقة تسمح بتقدير مثل هذه النماذج تعتمد على نشر تايلور، وذلك من خلال:

- إعطاء قيم ابتدائية للمعلمات (initial value).
- ثم نبحث عن شكل خطي للنموذج.
- ثم نقدر المعلمات الجديدة.
- ثم نكرر عملية التقدير في كل مرة بالاستعانة بنشر تايلور للحصول على معلمات جديدة.
- ثم نتوقف عن العملية التكرارية عندما تصبح المعلمات المقدرة ثابتة (أي نتحصل على نفس المعلمات تقريبا من تقدير لأخر). فتكون هذه المعلمات المستقرة هي المعلمات المقدرة للنموذج.

ملاحظة: يجب حسن اختيار القيم المبدئية للمعلمات لتكون هذه الطريقة فعالة، وإلا فالتقديرات لن تكون جيدة ولن يكون هناك تقارب. ويمكن الاعتماد في ذلك على النظرية الاقتصادية أو الدراسات السابقة أو الشكل البياني

للبيانات. وفي حالة سوء اختيار القيم المبدئية للمعلمات فإن النموذج المقدر الأمثل قد يمثل أمثلية محلية (local) وليست أمثلية كلية (global). كلما أنه كلما كانت القيم الابتدائية بعيدة كلما احتجنا إلى عمليات تكرارية أكثر.

ليكن النموذج غير الخطي التالي: $Y = f(X, \mathrm{B}) + \varepsilon$.

لدينا مجموع مربعات الأخطاء (البواقي) يساوي: $RS = \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} = [Y - f(X, \mathrm{B})]'[Y - f(X, \mathrm{B})]$.

لإيجاد أصغر قيمة للعلاقة السابقة يجب حساب المشتق وجعله معدوما، أي: $\frac{\partial RSS}{\partial \mathrm{B}} = 0$.

لدينا: $\frac{\partial RSS}{\partial \mathrm{B}} = -2\frac{\partial f(X,\mathrm{B})}{\partial \mathrm{B}}(Y - f(X, \mathrm{B})) = 0$.

مع: $\frac{\partial f(X,\mathrm{B})}{\partial \mathrm{B}} = Z(\mathrm{B}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_1,\mathrm{B})}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial f(x_1,\mathrm{B})}{\partial \beta_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(x_n,\mathrm{B})}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial f(x_n,\mathrm{B})}{\partial \beta_k} \end{pmatrix}$. (المشتقات الجزئية)

تذكير بنشر تايلور:

كل دالة $f(X)$ يمكن كتابتها بجوار نقطة ابتدائية X^0 باستعمال نشر تايلور كما يلي:

$$f(X) = f(X^0) + (X - X^0)f'(X^0) + \frac{(X-X^0)^2}{2!}f''(X^0) + \cdots + \varepsilon.$$

ليكن $\widehat{\mathrm{B}}^1$ القيم الابتدائية للمعلمات التي تبدأ عندها العمليات التكرارية.

ولتكن $Z(\widehat{\mathrm{B}}^1)$ المصفوفة $Z(\mathrm{B})$ تحت القيم الابتدائية للمعلمات ($\mathrm{B} = \widehat{\mathrm{B}}^1$).

باستخدام نشر تايلور بجوار النقطة الابتدائية $\widehat{\mathrm{B}}^1$، وبعد القيام ببعض العمليات الحسابية الرياضية، نصل إلى النموذج الخطي التالي:

$$\boldsymbol{Y}^*(\widehat{\mathbf{B}}^1) = \boldsymbol{Z}(\widehat{\mathbf{B}}^1)\mathbf{B} + \boldsymbol{\varepsilon}.$$

بما أن هذا النموذج الأخير خطي، فيمكن تقديره بالاعتماد على الصيغة التالية:

$$\widehat{\mathbf{B}}^2 = \left[\mathbf{Z}(\widehat{\mathbf{B}}^1)'\mathbf{Z}(\widehat{\mathbf{B}}^1)\right]^{-1}\mathbf{Z}(\widehat{\mathbf{B}}^1)'\boldsymbol{Y}^*(\widehat{\mathbf{B}}^1).$$

بهذه الصيغة الرياضية الأخيرة نتحصل على التقدير الثاني لشعاع المعلمات $\widehat{\mathrm{B}}^2$.

نستمر في تكرار عمليات التقدير والبحث عن القيم المثلى بنفس الطريقة، إلى غاية ملاحظة استقرار نسبي في المعلمات المقدرة، فنتوقف عند التكرار p إذا كان: $\widehat{\mathrm{B}}^{\mathrm{p}} \cong \widehat{\mathrm{B}}^{\mathrm{p}-1}$.

فتكون المعلمات المقدرة للنموذج غير الخطي هي: $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{B}}^{\mathrm{p}}$.

4. كيفية التعرف على خطية/عدم خطية النماذج القياسية:

نميز بين حالتين:

أ. **حالة متغير مستقل واحد فقط:**

بشكل عام، للتعرف على العلاقات التي تربط المتغيرات يمكن الاعتماد إما على النظريات والنماذج الرياضية والاقتصادية المعروفة للظاهرة محل الدراسة، أو على الدراسات السابقة لهذه الظاهرة. كما يسمح التمثيل البياني المشترك للمتغير التابع والمتغيرات المستقلة (سحابة النقاط) بتمثيل شكل العلاقة.

ونظرا لأن العديد من النظريات الاقتصادية التي تؤكد وجود علاقات بين المتغيرات لا تقدم شكل لهذه العلاقة، فإن الباحثين يلجؤون إل بعض الأساليب لتحديدها، ومن ذلك تمثيل بيانات هذه المتغيرات في شكل سحابة نقاط (المتغير التابع على محور والمتغير المستقل على محور أخر) لاكتشاف شكل انتشار البيانات، ومن خلال معاينة هذا الشكل يتم تحديد شكل العلاقة هل هي خطية أم غير خطية. ويمكن الاستعانة بالبرامج الإحصائية الجاهزة لاكتشاف هذه العلاقة (كبرنامج EXCEL وبرنامج SPSS مثلا) من خلال المفاضلة بين مختلف النماذج المقترحة لتمثيل العلاقة.

ب. حالة عدة متغيرات مستقلة:

إن من مساوئ دراسة شكل سحابة النقاط، أن هذا الأسلوب مناسب أكثر للنماذج البسيطة والتي تضم متغير مستقل واحد فقط، أما في حالة نموذج متعدد يضم عدة متغيرات مفسرة، فحتى وإن حددنا طبيعة العلاقة بين كل متغير مستقل والمتغير التابع، فتطرح إشكالية كيفية الدمج بين هذه العلاقات، هل تدمج بالجمع أو الجداء مثلا؟ فحتى لو كانت العلاقة خطية مثلا بين المتغير التابع وكل متغير مستقل على حدى، فليس هناك ما يضمن أن تكون كذلك في حالة نموذج يضم جميع هذه المتغيرات في نفس الوقت.

وللتغلب على هذه المحدودية، يمكن إما الرجوع للنظرية الاقتصادية أو الدراسات السابقة، أو يقوم الباحثون بتجريب عدة صيغ رياضية محتملة لتفسير العلاقة بين المتغيرات، ثم اختيار الصيغة التي تكون أكثر كفاءة ومعقولية من الناحية الاقتصادية والإحصائية.

المبحث الثاني: الجانب التطبيقي

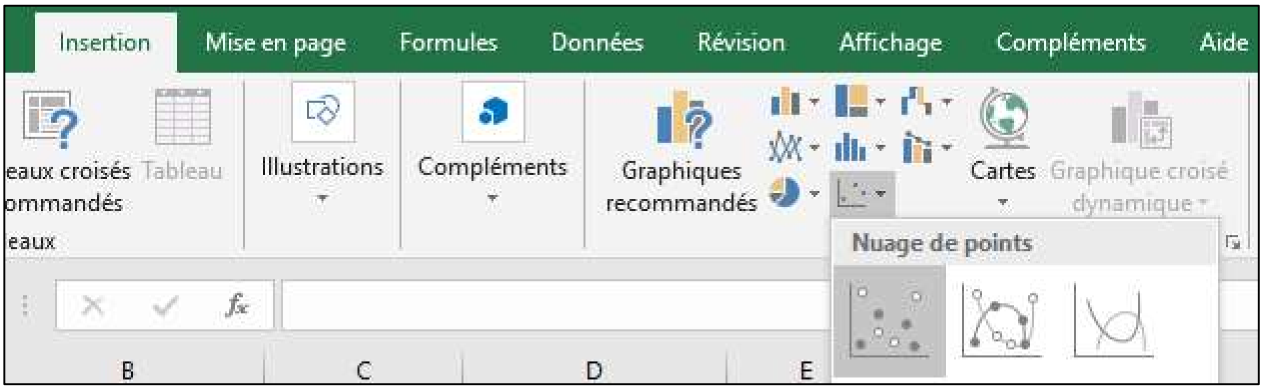
1. النمذجة غير الخطية في حالة متغير مستقل واحد فقط:

سنفاضل بين النماذج بالاعتماد على برنامج EXCEL وبرنامج SPSS.

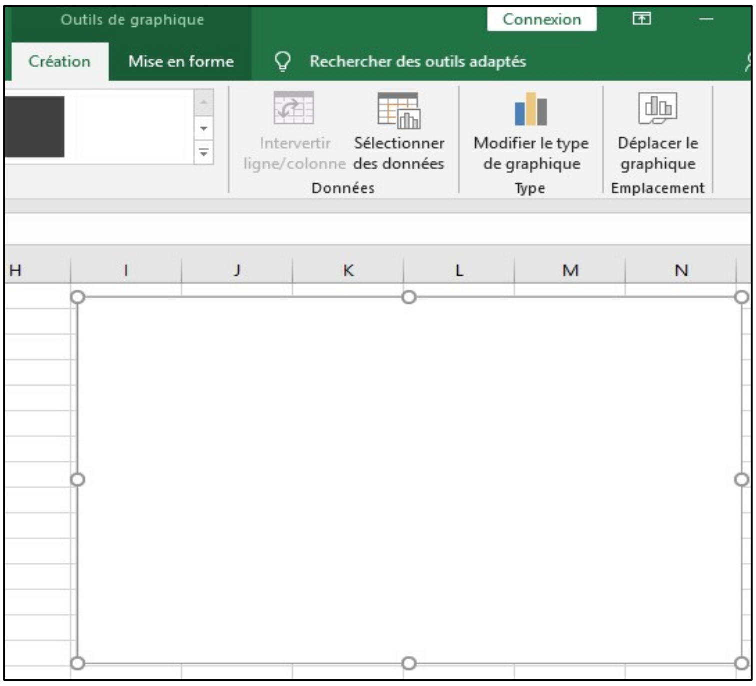
أ. المفاضلة بين النماذج باستخدام برنامج EXCEL:

بعد ادخال البيانات إلى برنامج EXCEL، نتبع الخطوات التالية:

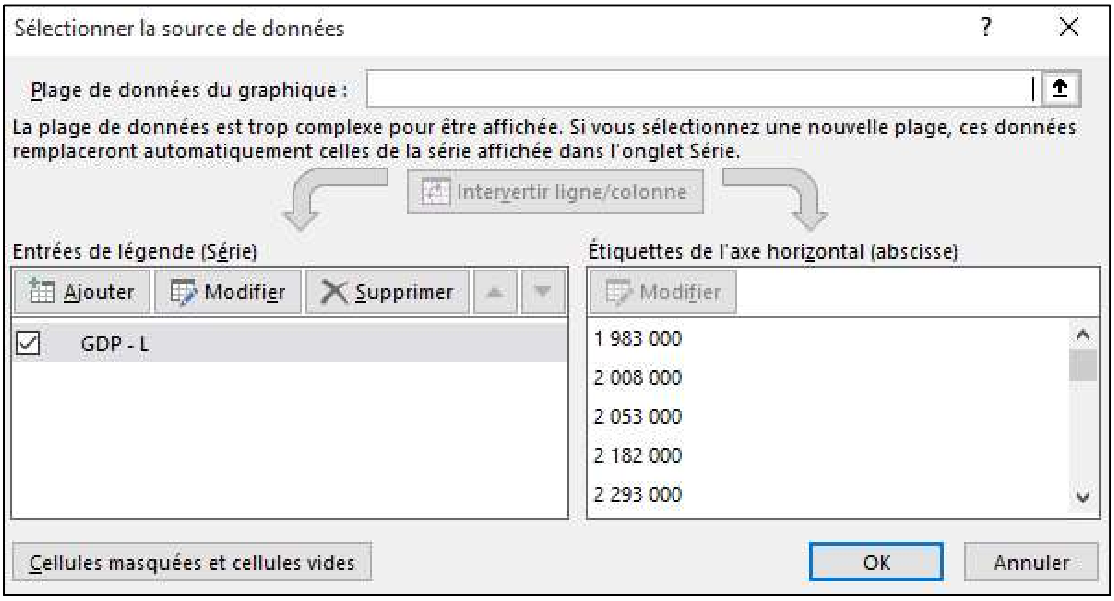
- نضغط على Insertion ثم نختار Nuage du points:



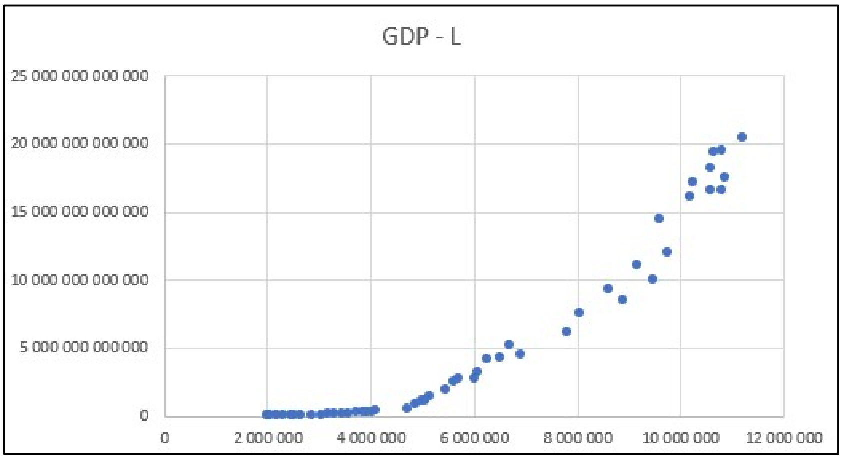
➢ فيظهر لنا تمثيل بياني فارغ، وعند الضغط على اختيار البيانات Sélectionner les données، تظهر لنا نافذة جديدة نختار منها البيانات المراد تمثيلها بسحابة النقاط.



➢ لتحديد طبيعة العلاقة بين الناتج المحلي الخام (GDP) والعمل (L)، نختار البيانات الخاصة بالسلسلتين GDP وL، ثم نضغط على OK:

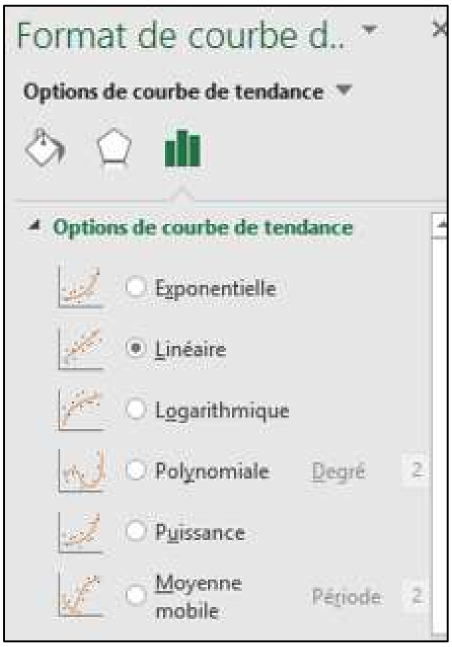


➢ عند الضغط على OK، تظهر لنا سحابة النقاط التالية:

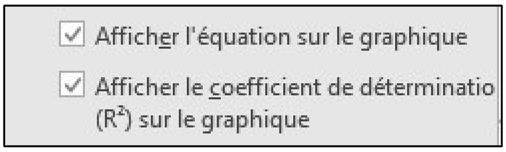


➢ ثم نظيف المنحنى الخطي لسحابة النقاط من خلال: Ajouter un élément graphique ثم courbe de tendance.

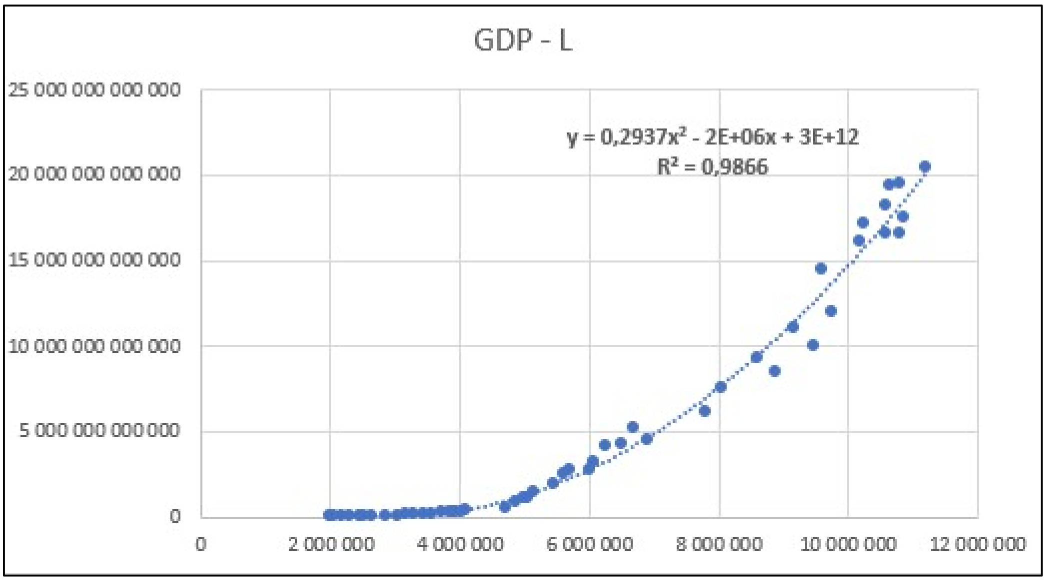
➢ فيعطينا عدة اختيارات لشكل العلاقة بين المتغيرين:



➢ ونظلل على عرض المعادلة ومعامل التحديد:



➢ فتظهر لنا معادلة الانحدار المختارة على المنحنى البياني ومعامل التحديد: ففي حالة اختيار انحدار خطي:



➢ نقوم بتغيير صيغة العلاقة بين المتغيرين، فنتحصل على تقدير للعلاقات المختلفة كما يلي:

✓ في حالة علاقة خطية: $y = 2E{+}06x - 7E{+}12$ ($R^2 = 0,8965$).

✓ في حالة علاقة أسية: $y = 2E{+}10e^{7E-07x}$ ($R^2 = 0,9118$).

✓ في حالة علاقة لوغاريتمية: $y = 1E{+}13\ln(x) - 2E{+}14$ ($R^2 = 0,7423$).

✓ **في حالة علاقة تربيعية: $y = 0,2937x^2 - 2E{+}06x + 3E{+}12$ ($R^2 = 0,9866$).**

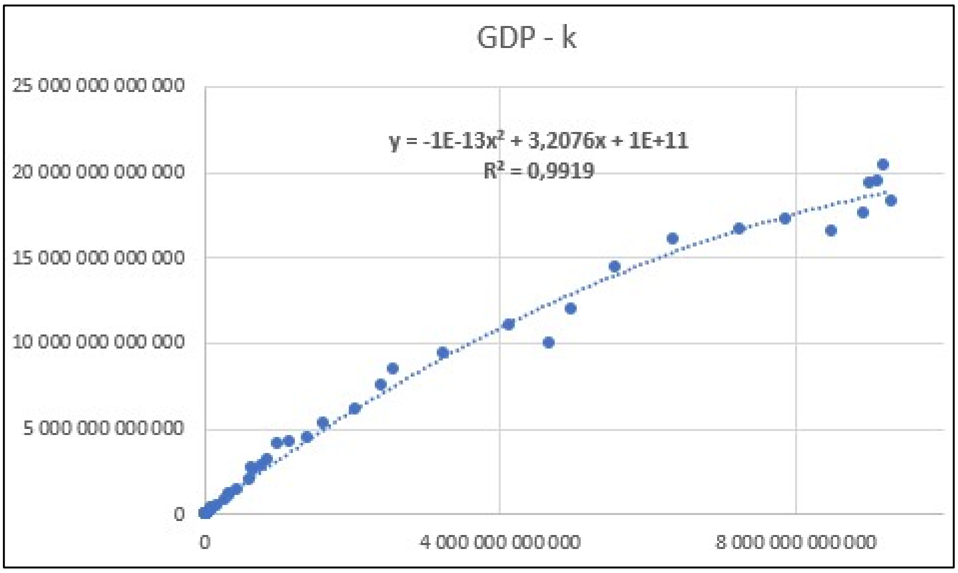
✓ في حالة علاقة قوى: $y = 3E{-}15x^{3,9641}$ ($R^2 = 0,9795$).

➢ بالمقارنة بين معاملات تحديد النماذج السابقة نجد أن أفضل نموذج (له أكبر معامل تحديد) لتمثيل العلاقة بين الناتج المحلي الخام (GDP) والعمل (L)، هو النموذج التربيعي (وبعده نموذج قوى $R^2 = 0,9795$). والذي يأخذ المعادلة التالية:

$$GDP = 3 \times 10^{12} - 2 \times 10^{6} L + 0,29 L^{2}.$$

$R^2 = 0,98$ n=51.

➢ بنفس الطريقة بالنسبة لتحديد طبيعة العلاقة بين الناتج المحلي الخام (GDP) ورأس المال (K).



➢ بالمقارنة بين معاملات تحديد النماذج السابقة نجد أن أفضل نموذج هو النموذج التربيعي ($R^2=0,99$) (وبعده نموذج قوى $R^2 = 0,9779$). والذي يأخذ المعادلة التالية:

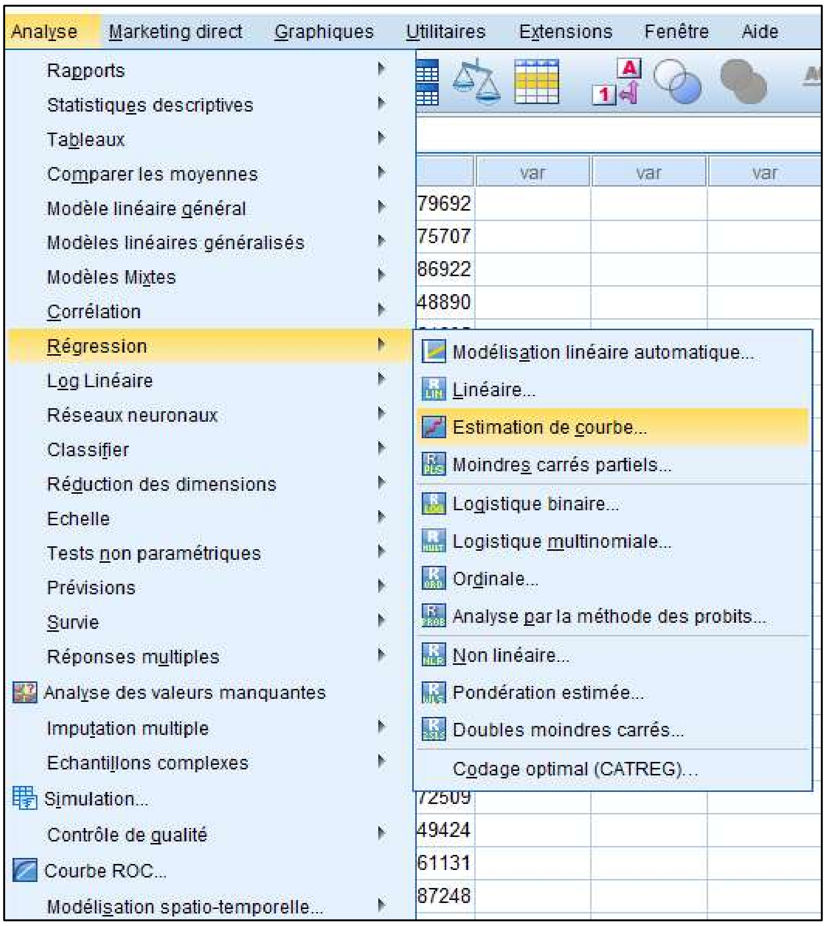
$$GDP = 1 \times 10^{11} + 3,2K - 1 \times 10^{13} K^{2}.$$

$R^2 = 0,99$ n=51.

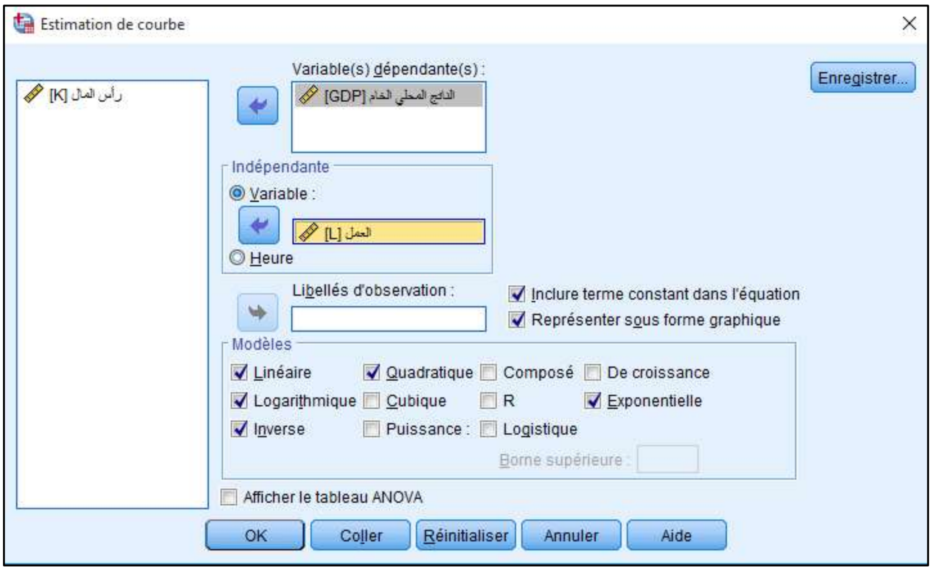
ب. المفاضلة بين النماذج باستخدام برنامج SPSS:

بعد ادخال البيانات إلى برنامج SPSS، نتبع الخطوات التالية:

➢ نضغط على Analyse ثم régression ثم estimation de courbe:



➢ فتظهر لنا النافذة التالية:



➢ نختار من خلال هذه النافذة:

✓ المتغير التابع: مثلا الناتج المحلي الخام GDP

✓ المتغير المستقل: مثلا العمل L

✓ النموذج (أو النماذج) التي تعبر عن العلاقة بينهما: خطي، لوغاريتمي، معكوس، تربيعي، أسي، قوى، ...

➢ عند الضغط على OK تظهر لنا المخرجات، وتضم أساسا الجدول والتمثيل البياني التاليين:

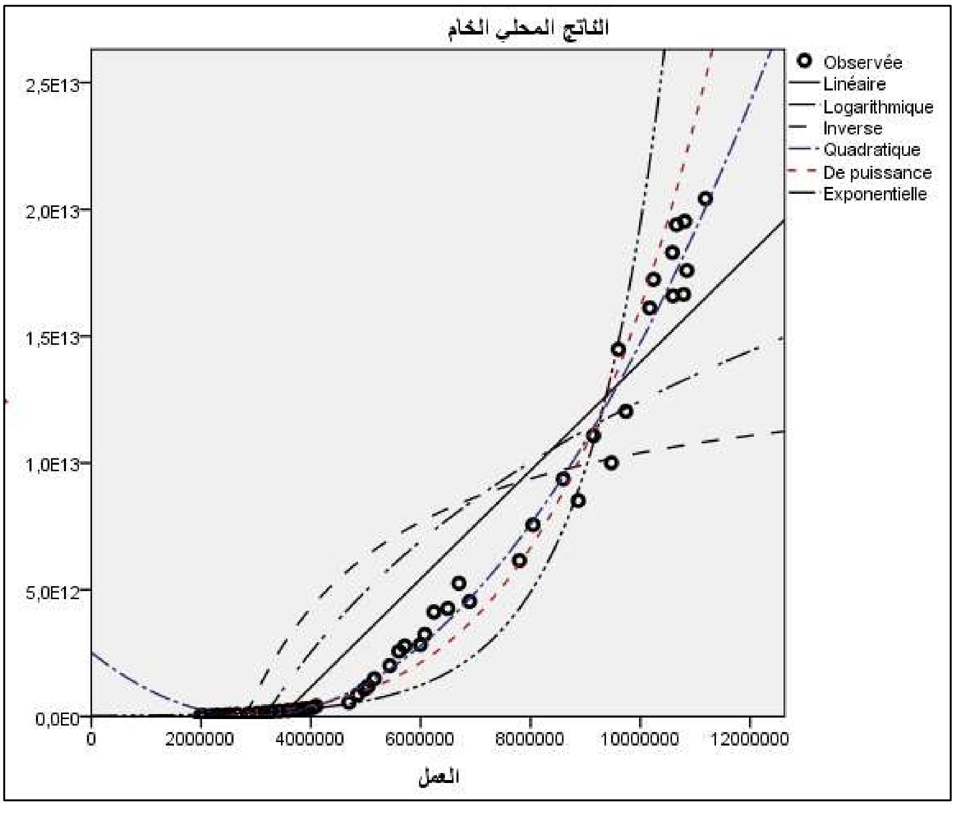
Récapitulatif du modèle et estimations de paramètres

Variable dépendante: الناتج المحلي الخام

Equation	Récapitulatif des modèles					Estimations des paramètres		
	R-deux	F	ddl1	ddl2	Sig.	Constante	b1	b2
Linéaire	,897	424,478	1	49	,000	-7,389E+12	2136579,000	
Logarithmique	,742	141,159	1	49	,000	-1,618E+14	1,081E+13	
Inverse	,536	56,641	1	49	,000	1,448E+13	-4,077E+19	
Quadratique	,987	1767,576	2	48	,000	2,524E+12	-1716816,358	,294
De puissance	,990	4674,200	1	49	,000	2,878E-15	3,964	
Exponentiel	,923	590,550	1	49	,000	1,986E+10	6,887E-7	

La variable indépendante est العمل.

نلاحظ من هذا الجدول أنه وعلى عكس برنامج EXCEL، فإن أفضل نموذج هو نموذج قوى puissance (مع ملاحظة أن معامل التحديد بين النموذجين قريب جدا 0,987−0,990)، كما أن برنامج SPSS يعطينا معلومة أخرى مهمة وهي قيمة إحصائية فيشر Fisher، فنلاحظ أن نموذج القوى له أكبر قيمة لإحصائية فيشر (4674)، والفرق بينها وبين أقرب قيمة لها (التربيعي: 1767) كبير جدا ودال إحصائيا (4674−1767=2707).



يؤكد التمثيل البياني أعلاه النتيجة السابقة، فنلاحظ أن منحى نموذج قوى (وكذلك النموذج التربيعي) هو الأقرب لتمثيل سحابة النقاط.

- ومن هنا يتبين أن أفضل نموذج يعبر عن العلاقة بين الناتج المحلي الخام (GDP) وعنصر العمل (L) هو نموذج قوى الذي يأخذ العلاقة التالية:

$$.GDP = 2{,}88 \times 10^{-15} \times L^{3{,}96}$$

$.R^2 = 0{,}99 \quad F=4674 \quad n=51$

- بنفس الطريقة بالنسبة لتحديد طبيعة العلاقة بين الناتج المحلي الخام (GDP) ورأس المال (K):

Récapitulatif du modèle et estimations de paramètres

Variable dépendante: الناتج المحلي الخام

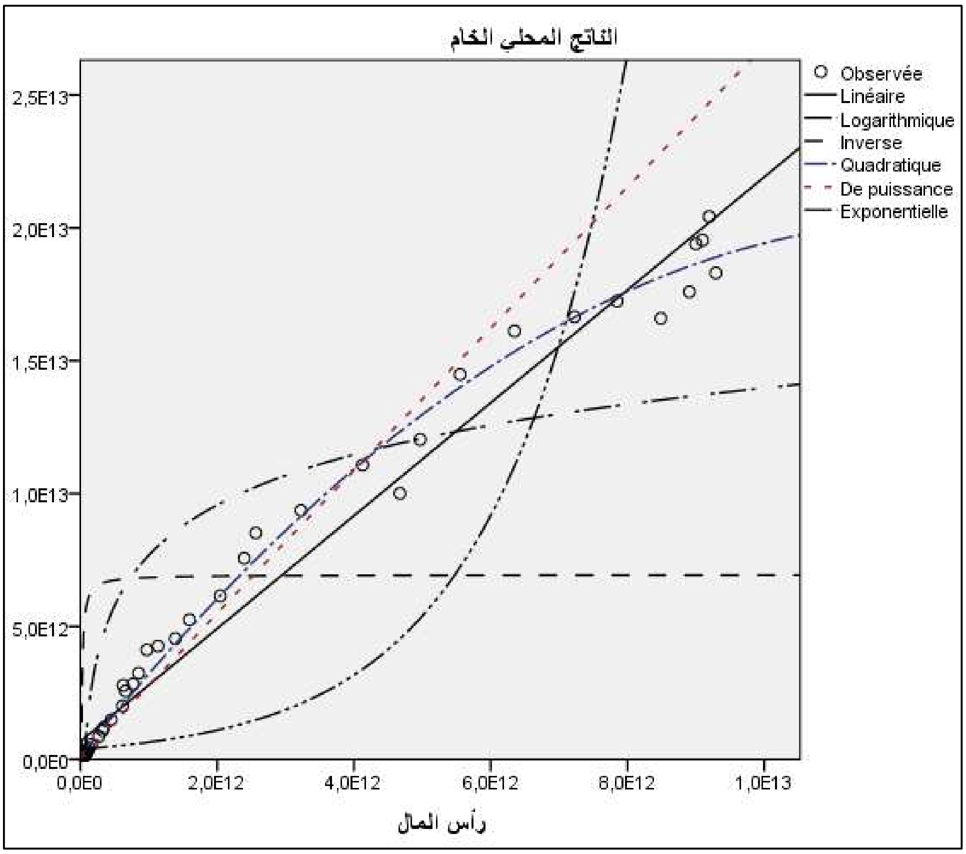
Equation	Récapitulatif des modèles					Estimations des paramètres		
	R-deux	F	ddl1	ddl2	Sig.	Constante	b1	b2
Linéaire	,977	2043,956	1	49	,000	6,701E+11	2,125	
Logarithmique	,768	162,367	1	49	,000	-6,787E+13	2,734E+12	
Inverse	,166	9,723	1	49	,003	6,943E+12	-1,020E+23	
Quadratique	,992	2950,727	2	48	,000	1,341E+11	3,208	-1,279E-13
De puissance	,990	4966,449	1	49	,000	4,091	,986	
Exponentiel	,606	75,338	1	49	,000	3,783E+11	5,315E-13	

La variable indépendante est رأس المال.

نلاحظ من هذا الجدول أنه بالاعتماد على معامل التحديد فإن أفضل نموذج هو النموذج التربيعي ($R^2=0{,}992$) ثم نموذج قوى ($R^2=0{,}990$) مع التقارب الكبير بينهما.

لكن إذا نظرنا إلى إحصائية فيشر فإن أفضل نموذج هو نموذج قوى، أين نلاحظ أن نموذج قوى له أكبر قيمة لإحصائية فيشر (4966)، والفرق بينها وبين أقرب قيمة لها (التربيعي: 2950) كبير جدا ودال إحصائيا (4966−2950=2016).

وهنا أشير إلى ملاحظة مهمة جدا، وهي أنه يفضل مقارنة كل من قيمة F وقيمة معامل التحديد R2 للنماذج وعدم الاكتفاء فقط بمعامل التحديد، لأن هذا الأخير تزيد قيمته بزيادة عدد المتغيرات المفسرة (الانتقال من الخطي إلى التربيعي والتكعيبي مثلا). كما يفضل كذلك اختبار الدلالة الاحصائية للفرق بين قيمتيF بين النموذجين اللذان نقارنهما، فإن كانت دالة فالنموذج الثاني أفضل.



يؤكد التمثيل البياني أعلاه النتيجة السابقة، فنلاحظ أن منحى نموذج قوى (وكذلك النموذج التربيعي) هو الأقرب لتمثيل سحابة النقاط.

➢ يتبين مما سبق أن أفضل نموذج هو نموذج قوى، والذي يأخذ المعادلة التالية:

$$.GDP = 4{,}09 \times K^{0{,}986}$$

.R² = 0,99 F=4966 n=51

2. النمذجة غير الخطية في حالة عدة متغيرات مستقلة:

سنقدم في هذا العنصر مثالين تطبيقيين، الأول لنموذج غير خطي لا نحوله إلى نموذج خطي وسنطبقه على برنامج SPSS. والثاني خاص بنموذج غير خطي يتم تحويله إلى نموذج خطي، وسنطبقه على برنامج Eviews.

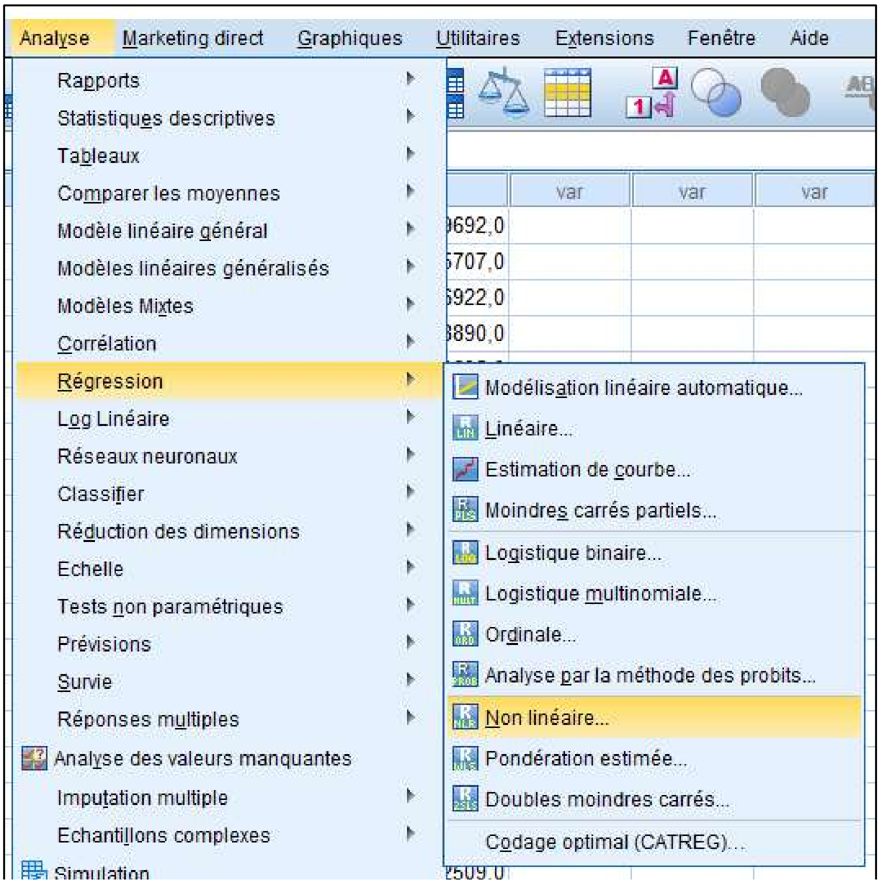
أ. مثال تطبيقي على برنامج SPSS لنموذج غير خطي لا يتم تحويله إلى نموذج خطي:

توصلنا في العنصر السابق إلى أن:

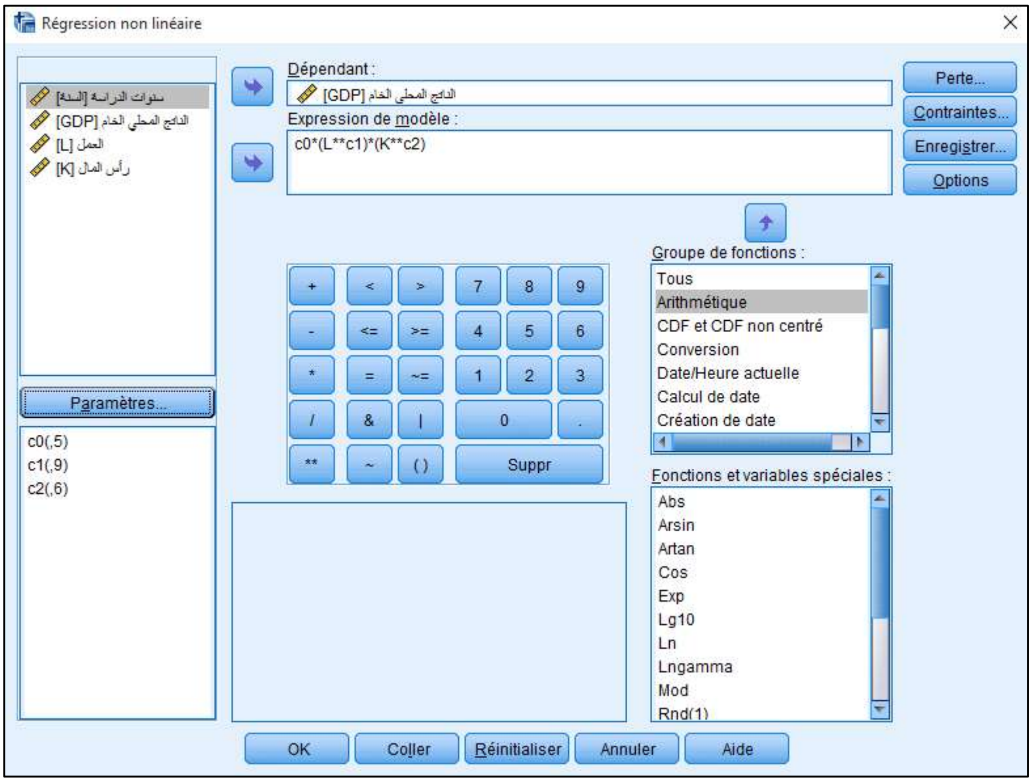
- ✓ العلاقة التي تربط GDP و L هي علاقة قوى ($GDP = 2{,}88 \times 10^{-15} \times L^{3{,}96}$).
- ✓ العلاقة التي تربط GDP و K هي كذلك علاقة قوى ($GDP = 4{,}09 \times K^{0{,}986}$).
- ✓ الأن لدمج العلاقتين نعود إلى النظرية الاقتصادية، أين ينص نموذج سولو SOLOW للنمو أن العلاقة بينهما هي الجداء (وفق دالة كوب–دوغلاس Cobb–Douglas)، أي: $\boldsymbol{GDP = \beta_0 K^{\beta_1} L^{\beta_2}}$.

بعد إدخال البيانات إلى برنامج SPSS، ولتقدير النموذج السابق، نتبع الخطوات التالية:

- نضغط على Analyse ثم على Régression ثم على Non linéaire:



- فتظهر لنا النافذة التالية:



➢ من خلال هذه النافذة نختار:

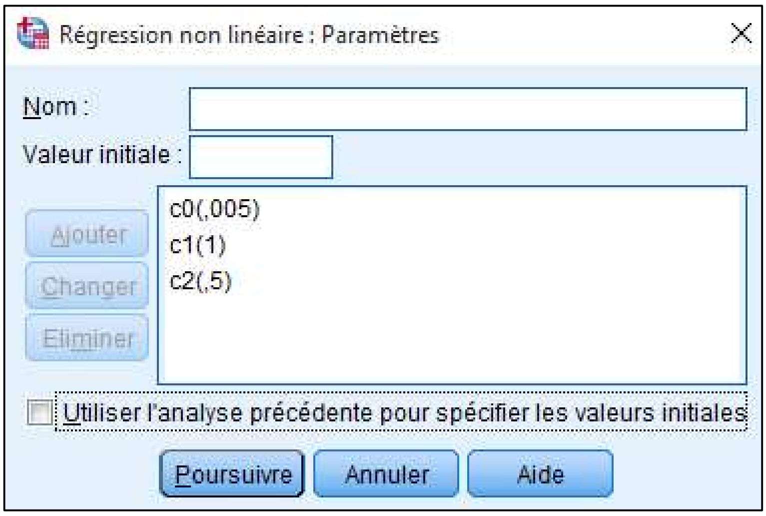
✓ المتغير التابع: GDP

✓ الصيغة الرياضية للعلاقة غير الخطية وهي: $GDP = \beta_0 K^{\beta_1} L^{\beta_2}$.

وتكتب: GDP=c0*(L**c1)*(K**c2).

✓ إدخال القيم الابتدائية للمعلمات من خلال paramètres:

- يمكن استخدام قيم ابتدائية قريبة من القيم التي تم تقديرها عند تحديد طبيعة العلاقة بين المتغيرات المستقلة والمتغير التابع على برنامج SPSS. وبما أن دالة كوب دوغلاس في الغالب معلمتا المتغيرين قريبة من 1، فيمكن اقتراح قيمة 1 للعمل وقيمة 0,5 لرأس المال و0,005 للثابت (نظرا لقيمته الصغيرة جدا في النماذج البسيطة المقدرة).



فنجد أن البرنامج قام بـ 223 عملية تكرارية للوصول للحل الأمثل:

Historique des itérations[b]

Numéro d'itération[a]	Somme résiduelle des carrés	Paramètre c0	c1	c2
1.0	3,822E+27	,005	1,000	,500
1.1	4,924E+42	,496	-4,548	4,108
1.2	4,429E+42	,054	1,610	,833
1.3	3,002E+27	,010	1,061	,533
2.0	3,002E+27	,010	1,061	,533
...	...	...	...	...
101.0	1,675E+25	,507	,954	,530
101.1	1,675E+25	,513	,952	,530
102.0	1,675E+25	,513	,952	,530
102.1	1,675E+25	,513	,952	,530
103.0	1,675E+25	,513	,952	,530
103.1	1,675E+25	,513	,952	,530

Les dérivées sont calculées numériquement.

a. Le numéro d'itération majeure s'affiche à gauche de la décimale et celui de l'itération mineure à droite de la décimale.

b. L'exécution s'est arrêtée après 223 évaluations de modèles et 103 évaluations de dérivées, car la réduction relative entre les différentes sommes résiduelles des carrés représente au plus SSCON = 1,000E-8.

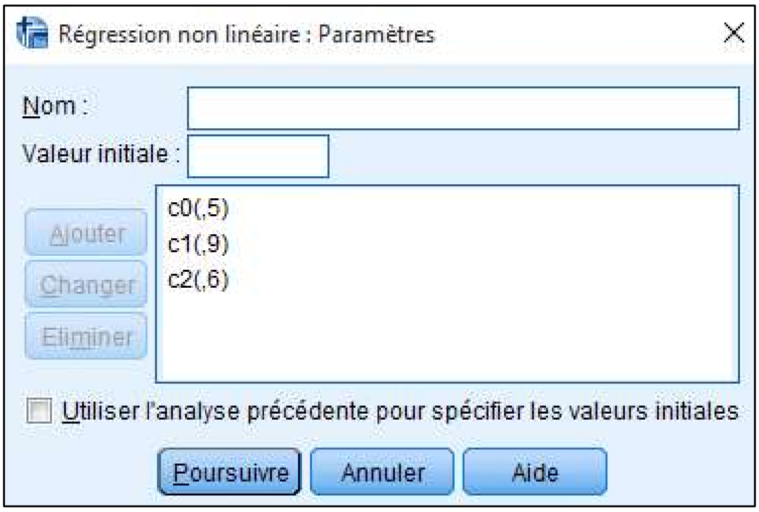
- لكن يمكن الاعتماد على برنامج Eviews لتقدير العلاقة غير الخطية السابقة، ثم أخذ قيم قريبة من هذه القيم المقدرة كقيم ابتدائية على برنامج SPSS:

Dependent Variable: GDP
Method: Least Squares (Gauss-Newton / Marquardt steps)
Date: 11/29/22 Time: 22:12
Sample: 1970 2020
Included observations: 51
Convergence achieved after 112 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients
GDP=C(1)*(L^C(2))*(K^C(3))

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	0.512901	1.782182	0.287794	0.7747
C(2)	0.952446	0.364424	2.613565	0.0119
C(3)	0.530218	0.084857	6.248369	0.0000

R-squared	0.992836	Mean dependent var	5.51E+12
Adjusted R-squared	0.992537	S.D. dependent var	6.84E+12
S.E. of regression	5.91E+11	Akaike info criterion	57.10433
Sum squared resid	1.68E+25	Schwarz criterion	57.21797
Log likelihood	-1453.160	Hannan-Quinn criter.	57.14775
Durbin-Watson stat	1.435443		

➢ إذن نعيد تقدير النموذج على برنامج SPSS بالاعتماد على قيم قريبة من القيم المقدرة على برنامج EViews:



فنجد أن البرنامج قام بـ 12 عملية تكرارية فقط للوصول للحل الأمثل:

Historique des itérations[b]

Numéro d'itération[a]	Somme résiduelle des carrés	Paramètre c0	c1	c2
1.0	2,032E+28	,500	,900	,600
1.1	1,358E+27	,384	,912	,578
2.0	1,358E+27	,384	,912	,578
2.1	3,945E+25	,463	,933	,547
3.0	3,945E+25	,463	,933	,547
3.1	1,683E+25	,520	,950	,531
4.0	1,683E+25	,520	,950	,531
4.1	1,675E+25	,513	,952	,530
5.0	1,675E+25	,513	,952	,530
5.1	1,675E+25	,513	,952	,530
6.0	1,675E+25	,513	,952	,530
6.1	1,675E+25	,513	,952	,530

Les dérivées sont calculées numériquement.

a. Le numéro d'itération majeure s'affiche à gauche de la décimale et celui de l'itération mineure à droite de la décimale.

b. L'exécution s'est arrêtée après 12 évaluations de modèles et 6 évaluations de dérivées, car la réduction relative entre les différentes sommes résiduelles des carrés représente au plus SSCON = 1,000E-8.

➢ بعد العمليات التكرارية (12) لإيجاد أفضل تقدير لقيم المعلمات، فإن التقدير النهائي للمعلمات هو:

Estimations des paramètres

Paramètre	Estimation	Erreur standard	Intervalle de confiance à 95 % Borne inférieure	Borne supérieure
c0	,513	1,782	-3,070	4,096
c1	,952	,364	,220	1,685
c2	,530	,085	,360	,701

ANOVA[a]

Source	Somme des carrés	ddl	Carrés moyens
Régression	3,872E+27	3	1,291E+27
Résidu	1,675E+25	48	3,490E+23
Total non corrigé	3,889E+27	51	
Total corrigé	2,338E+27	50	

Variable dépendante : الناتج المحلي الخام

a. R-deux = 1 - (somme résiduelle des carrés) / (somme corrigée des carrés) = ,993.

فيكون تقدير النموذج غير الخطي السابق هو:

$$.GDP = 0,51\ \ ^{0,95}K^{0,53}$$

.R² = 0,973   F=554,73   n=51

- يتبين من التقدير أن معلمتا العمل ورأس المال معنويتين (الصفر لا ينتمي إلى مجال الثقة أما أن القيمة المحسوبة $2,61 = \frac{0,952}{0,364} = |t_{47}|$ أكبر من القيمة المجدولة $(t_{47}^{0,05} = 2,02)$.
- بما أن القيمة المحسوبة $F_{2,46}$ $\left(= \frac{193,6}{0,0349} = \frac{3,872E+27/_{2}}{1,675E+\ \ /_{48}} = F_{k-1,n-k} = \frac{ESS/_{k-1}}{RSS/_{n-k}} \Longrightarrow F_{2,48}\right.$ (554,73) **أكبر** من القيمة المجدولة $(F_{2,48}^{0,05} = 5,03)$، فإنا **نرفض** الفرضية الصفرية، أي النموذج ككل معنوي.
- يتبين من النموذج أن للعمل ورأس المال أثر إيجابي على النمو الاقتصادي في الجزائر، لأن معلمتا المتغيرين موجبة (وجود علاقة طردية).
- إذا زاد العمل بـ 1%، فإن الناتج المحلي الخام سيزيد بـ 0,95 %. أما إذا زاد رأس المال بـ 1%، فإن الناتج المحلي الخام سيزيد بـ 0,53 %.
- يتبين من النموذج أن مساهمة عنصر العمل في النمو الاقتصادي في الجزائر أكبر من مساهمة رأس المال.

ب. مثال تطبيقي على برنامج Eviews لنموذج غير خطي يتم تحويله إلى نموذج خطي:

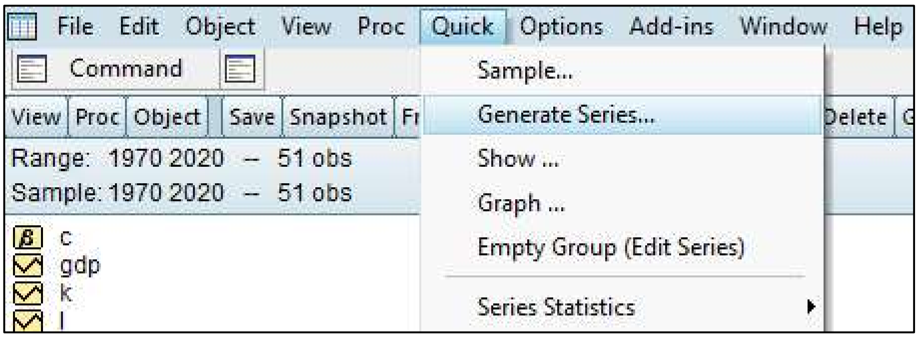
ليكن المثال التطبيقي هو نموذج النمو الاقتصادي لسولو (Solow)، وهو النموذج المدروس أعلاه على برنامج SPSS، لكن بقوم بتحويله إلى نموذج خطي من خلال التحويل اللوغاريتمي، وبالتالي يمكن تقديره بطريقة المربعات الصغرى العادية بعد التحويل.

- دالة كوب دوقلاس الأصلية (غير خطية): $GDP = \beta_0 K^{\beta_1} L^{\beta_2}$.
- النموذج القياسي الموافق بعد إدخال اللوغاريتم (خطي):

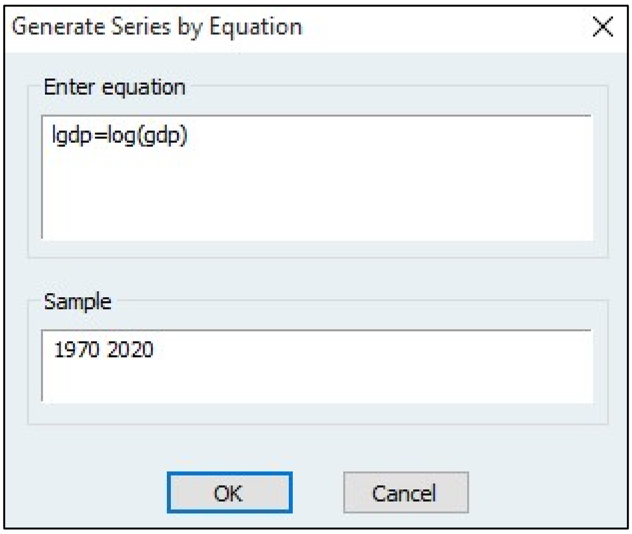
$$ln(GDP_t) = ln(\beta_0) + \beta_1\, ln(K_t) + \beta_2\, ln(L_t) + ln(\varepsilon_t) \quad (t = 1,2,\dots,n).$$

لتقدير العلاقة السابقة (والتي أصبحت خطية) على برنامج Eviews، نتبع الخطوات التالية:

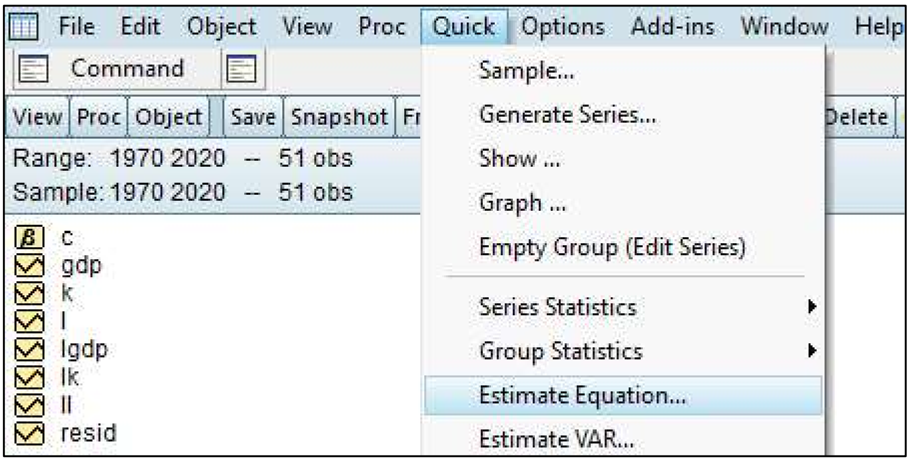
- بعد إدخال البيانات (GDP, L, K) إلى برنامج Eviews، نضغط على Quick ثم على Generate series:



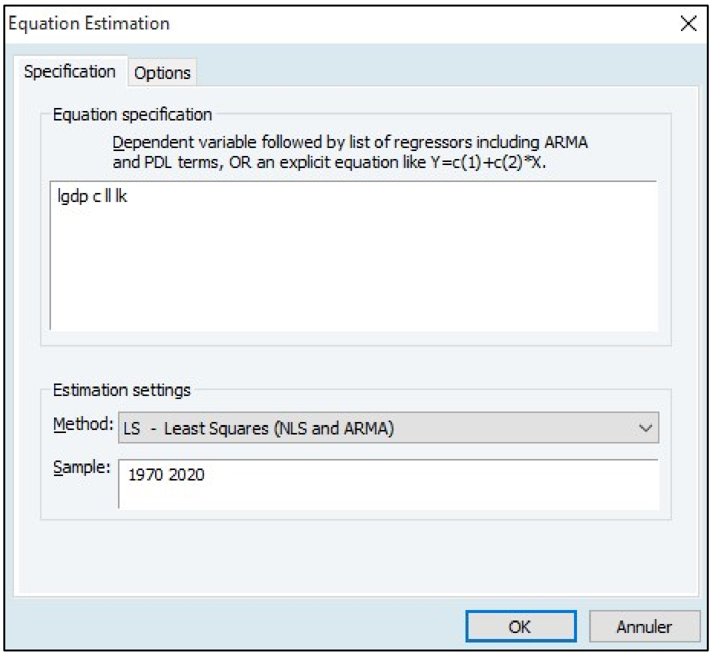
- فتظهر لنا النافذة التالية، والتي ندخل من خلالها صيغة تحويل المتغير GDP إلى متغير جديد LGDP:



- بنفس الطريقة نقوم بتحويل المتغيرين المستقلين L و K، ويصبح ترميزهم على الترتيب: LL، LK.
- ثم نقوم بتقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد بطريقة المربعات الصغرى العادية (لأن النموذج تم تحويله إلى شكل خطي)، من خلال الضغط على Quick ثم Estimate equation:



➢ فتظهر النافذة التالية (نحدد فيها المتغيرات وطريقة التقدير والفترة):



➢ عند الضغط على OK، تظهر لنا نافذة التقدير التالية:

Dependent Variable: LGDP
Method: Least Squares
Date: 11/29/22 Time: 21:23
Sample: 1970 2020
Included observations: 51

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-14.93793	4.794331	-3.115748	0.0031
LL	1.850578	0.541380	3.418262	0.0013
LK	0.527850	0.134607	3.921417	0.0003

R-squared	0.992143	Mean dependent var	27.87066
Adjusted R-squared	0.991815	S.D. dependent var	2.172079
S.E. of regression	0.196505	Akaike info criterion	-0.359238
Sum squared resid	1.853477	Schwarz criterion	-0.245601
Log likelihood	12.16057	Hannan-Quinn criter.	-0.315814
F-statistic	3030.537	Durbin-Watson stat	0.281403
Prob(F-statistic)	0.000000		

- من خلال مخرجات إفيوز السابقة، يمكننا كتابة معادلة الانحدار ومختلف التقديرات بالشكل التالي:

$$.LGDP = -14{,}94 + (1{,}85)LL + (0{,}53)LK$$

$$.\ t \qquad (-3{,}11) \qquad (3{,}42) \qquad (3{,}92)$$

$$.R^2 = 0{,}99 \qquad F = 3030 \qquad n = 51$$

- يتبين من التقدير أن جميع المعلمات معنوية عند مستوى المعنوية 1%.
- يتبين من النموذج أن لكل من العمل ورأس المال أثر إيجابي على النمو الاقتصادي في الجزائر لأن معلمتا العمل ورأس المال موجبة (وجود علاقة طردية).
- إذا زاد العمل بـ 1%، فإن الناتج المحلي الخام سيزيد بـ 1,85 %. أما إذا زاد رأس المال بـ 1%، فإن الناتج المحلي الخام سيزيد بـ 0,53 %.
- يتبين من النموذج أن مساهمة عنصر العمل في النمو الاقتصادي في الجزائر أكبر بكثير من مساهمة رأس المال.

وفي الأخير نشير إلى أنه بالمقارنة بين نتائج التقديرين للنموذجين الأصلي والذي تم تحويله، أن النتائج كانت متقاربة بشكل كبير جدا.