ثانيا: حساب t_c

$$t_c = \frac{\bar{x}-\mu}{\delta_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{3-4}{\frac{0,5}{\sqrt{9}}} = -6,02$$

الخطوة الخامسة: المقارنة واتخاذ القرار:

نلاحظ أن:

$t_c < -t_{tab}$ أي $-6,02 < -2,821$

⇐ رفض H_0 وقبول H_1 على أساس أن القرار بإعادة تنظيم صفوف الانتظار أدى إلى تخفيض فترات انتظار السيارات للتزود بالبنزين.

إختبارات الفروق بين متوسطي مجتمعين مستقلين طبيعي التوزيع:

إذا كان $X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ وسحبت من مجتمعه عينة حجمها n_1 و $X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ وسُحبت من مجتمعه عينة حجمها n_2 وكان المجتمعين مستقلين، و نريد اختبار تساوي متوسطي المجتمعين فتكون الفرضية الصفرية كالتالي:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

ويمكن لهذه الفرضية أن تأخذ شكلاً آخر أكثر مرونة وشيوعاً وهو:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

وتأخذ الفرضية البديلة إحدى الصور التالية:

$$\begin{cases} H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{cases}$$

وسنذكر حالات مختلفة لاختبارات الفروق بين متوسطي مجتمعين وهي:

1- عند معلومية σ_1^2 و σ_2^2:

في هذه ا لحالة يستخدم التوزيع الطبيعي في الإختبار ويكون المعيار في هذه الحالة:

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0\,,1)$$

مثال: إذا علمت أن $X_1 \sim N(\mu_1,36)$ وسحبت منه عينة حجمها 16 مشاهدة وسطها الحسابي 30 و $X_2 \sim N(\mu_2,25)$، وسحبت منه عينة حجمها 12 مشاهدة وسطها الحسابي 3، اختبر وجود فرق معنوي بين متوسطي المجتمعين عند مستوى المعنوية الإحصائية 10 %؟

الحل: حسب المعطيات لدينا: $\overline{x}_2 = 33$، $n_2 = 12$ ، $\overline{x}_1 = 30$، $n_1 = 16$

- **الفرضيات:**

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$$

- **التوزيع والقيم الحرجة المعيارية:**

التوزيع المستخدم هو التوزيع الطبيعي، وحيث أن $\alpha = 0.1$ والإختبار ذو اتجاهين، ومنه نجد أن $\frac{\alpha}{2} = 0.05$، وتكون القيم الحرجة هي:

$$-Z_{\frac{\alpha}{2}} = -1.64 \quad , \quad Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.64$$

- **حساب إحصائية الإختبار** Z_{cal}: $Z_{cal} = \frac{30-33}{\sqrt{\frac{36}{16}+\frac{25}{12}}} = -1.44$

- **المقارنة والقرار:**

لدينا $(-Z_{\frac{\alpha}{2}} = -1.64) < |Z_{cal} = -1.44| \Leftarrow$ نقبل الفرضية الصفرية، وبالتالي المجتمعان لهما تقريبا نفس الوسط الحسابي، وبالتالي نقبل الفرضية الصفرية.

2- عند مجهولية σ_1^2 و σ_2^2 وحجم العينتين كبير:

مثال: أخذت عينتان من مجتمعين طبيعتين مستقلين، والجدول يبين بعض احصاءاتها

	المجتمع الأول	المجتمع الثاني
حجم العينة	50	60
متوسط العينة	57.5	54.4
الإنحراف المعياري للعينة	6.2	10.2

يدعي أحد الباحثين أن متوسط المجتمع الأول أكبر من متوسط المجتمع الثاني، اختبر صحة هذا الإدعاء عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

الحل:

- الفرضيات:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{cases}$$

- التوزيع والقيم الحرجة المعيارية:

التوزيع المستخدم هو التوزيع الطبيعي وذلك لكبر حجم العينتين، وحيث أن $\alpha = 0.05$، والإختبار ذو اتجاه واحد نحو اليمين إذن تكون القيمة الحرجة:

$$Z_{\alpha} = 1.64$$

- حساب إحصائية الإختبار Z_{cal}:

$$Z_{cal} = \frac{57.5 - 54.4}{\sqrt{\frac{(6.2)^2}{50} + \frac{(10.6)^2}{60}}} = 1.91$$

- المقارنة والقرار:

لدينا $(Z_{\alpha} = 1.64) < (Z_{cal} = 1.91) \Leftarrow$ نرفض الفرضية الصفرية، وعليه نعتبر أن هذا دليلاً كافياً على أن متوسط المجتمع الأول أكبر من متوسط المجتمع الثاني، وبالتالي نرفض الفرضية الصفرية.

ملاحظة هامة: بحساب مجال الثقة لوسط المجتمع في هذا المثال السابق نجد أنه [5.765 ، 0.435]، ولاحظ أن هذا المجال لا يحتوي على القيمة صفر، وهو الذي نختبر صحته كفرق بين وسطي المجتمعين، وبالتالي فمجال الثقة يخبرنا بأنه احتمال 95% لن يكون الفرق بين وسطي المجتمعين يساوي صفر، أي يكون وسطي المجتمعين غير مساو.

وهنا نتساءل أي المجتمعين له وسط أكبر من الثاني؟؛

للإجابة على هذا السؤال لاحظ أننا قبلنا الفرضية القائلة $\mu_1 - \mu_2 > 0$، وبالتالي $\mu_1 > \mu_2$، مما يدل على أن المجتمع الأول له وسط حسابي أكبر من المجتمع الثاني.

3- عند مجهولية تباين المجتمعين الطبيعيين وكان على الأقل حجم أحد العينتين صغير:

في هذه الحالة يستخدم توزيع (t) في الإختبار، وسنميز هنا حالتين:

3-1- إذا كان: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$:

يكون المعيار في هذه الحالة:

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}} \sim t_{(n+m-2)}$$

حيث أن:

$$S_P^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}$$

مثال: إذا علم أن $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ وسحبت منه العينة $\{5, 6, 3, 7, 8\}$ و $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma^2)$، وسُحبت منه العينة $\{12, 10, 8, 12, 9, 5\}$،

المطلوب: اختبر وجود فرق معنوي بين متوسطي المجتمعين عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$؟

الحل: من معطيات السؤال نحسب ما يلي:

$\overline{x}_1 = 5.8$ ،$\overline{x}_2 = 9.33$ ،$S_1^2 = 3.7$ ،$S_2^2 = 7.076$

$$S_P^2 = \frac{(5-1)\times 3.7 + (6-1)\times 7.076}{5+6-2} = 5.58$$

$$S_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}^2 = 5.58 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = 2.046$$

- الفرضيات:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$$

- التوزيع والقيم الحرجة المعيارية:

التوزيع المستخدم هنا هو توزيع (t) بدرجات حرية 9، و ذلك لصغر حجم العينتين وحيث أن: $\alpha = 0.05$ و الإختبار ذو اتجاهين إذن تكون القيم الحرجة:

$$-t_{(0.025,9)} = -2.262 \quad , \quad t_{(0.025,9)} = 2.262$$

- حساب إحصائية الإختبار t_{cal}:

$$t_{cal} = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}} = \frac{5.8 - 9.33}{1.43} = -2.47$$

- المقارنة والقرار:

لدينا: $(t_{(0.025,9)} = -2.262) < |t_{cal} = -2.47|$ ⇐ نرفض الفرضية الصفرية، و عليه نعتبر أنه يوجد فرق معنوي بين متوسطي المجتمعين.

ثانيا: اختبار الفرضيات المتعلقة بالنسبة:

تأخذ الفرضية الصفرية الشكل التالي:

$$H_0 : P = P_0$$

و الفرضية البديلة تأخذ الصور:

$$\begin{cases} H_1 : P \neq P_0 \\ H_1 : P > P_0 \\ H_1 : P < P_0 \end{cases}$$

ويكون المعيار في هذه الحالة:

$$Z = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} \sim N(0,1)$$

مثال: إذا كانت نسبة مستعملي حزام الأمان في السيارات (قبل تشريع إلزام الإستعمال) هي 0.8، درست عينة عشوائية حجمها 200 سائق بعد صدور تشريع الإلزام فوجد أن 170 منهم يستعملون الحزام.

المطلوب: اختبر عند مستوى دلالة إحصائية $\alpha = 0.05$ ما إذا كان التشريع قد زاد نسبة المستعملين له.

الحل: لدينا $P = 0.08$، $\hat{P} = \frac{170}{200} = 0.85$

- الفرضيات:

$$\begin{cases} H_0 : P = 0.8 \\ H_1 : P > 0.8 \end{cases}$$

- التوزيع والقيم الحرجة المعيارية: التوزيع المستخدم هو التوزيع الطبيعي وحيث أن: $\alpha = 0.05$، و الإختبار ذو اتجاه واحد نحو اليمين إذن تكون القيم الحرجة:

$$Z_\alpha = 1.64$$

- حساب إحصائية الإختبار Z_{cal}:

$$Z_{cal} = \frac{0.85 - 0.8}{\sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{200}}} = 1.8$$

- المقارنة والقرار:

لدينا $(Z_\alpha = 1.64) < (Z = 1.8)$ ⟸ نرفض الفرضية الصفرية وعليه فإن صدور التشريع قد زاد من نسبة مستعملي حزام الأمان.

ثالثا: اختبار الفرق بين نسبتين $(P_1 - P_2)$:

بفرض أن $X_1 \sim b(N_1,P_1)$، وسُحبت من مجتمعه عينة حجمها $n_1 \geq 30$، و $X_2 \sim b(N_2,P_2)$، وسُحبت من مجتمعه عينة حجمها $n_2 \geq 30$، وكان المجتمعان مستقلين، ونريد اختبار تساوي نسب المجتمعين فتكون الفرضية الصفرية كما يلي:

$$H_0 : P_1 - P_2 = 0$$

وتأخذ الفرضية البديلة إحدى الصور:

$$\begin{cases} H_1 : P_1 - P_2 \neq 0 \\ H_1 : P_1 - P_2 > 0 \\ H_1 : P_1 - P_2 < 0 \end{cases}$$

ويكون المعيار المستخدم هو:

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

مثال: إذا كان نسبة التالف من إنتاج مصنع **(1)** لإنتاج المصابيح الكهربائية أقل من نسبة التالف في مصنع **(2)**، وبالتالي فإن صاحب المصنع **(1)** يدعي أن إنتاج مصنعه أفضل من إنتاج المصنع **(2)**، ولاختبار هذا الإدعاء أخذت عينة من كل مصنع وفحصت العينتان، وتم فحص عدد القطع التالفة في كل مصنع، والجدول الموالي يبين نتائج هذه التجربة.

	المصنع (1)	المصنع(2)
حجم العينة	**50**	**100**
عدد القطع التالفة	**4**	**5**

هل تدعم هذه البيانات صحة ادعاء صاحب المصنع **(1)** عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

الحل: نحسب نسب التالف في المصنعين:

المصنع(1): $\hat{P}_1 = \frac{4}{50} = 0.08$

المصنع (2): $\hat{P}_2 = \frac{5}{100} = 0.05$

- **الفرضيات:**

$$\begin{cases} H_0 : P_1 - P_2 = 0 \\ H_1 : P_1 - P_2 > 0 \end{cases}$$

- **التوزيع والقيم الحرجة المعيارية:**

التوزيع المستخدم هو التوزيع الطبيعي وحيث أن مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$، والإختبار ذو اتجاه واحد نحو اليمين إذن تكون القيمة الحرجة:

$$Z_\alpha = 1.64$$

- **حساب إحصائية الإختبار** Z_{cal}:

$$Z_{cal} = \frac{0.08 - 0.05}{\sqrt{\frac{0.08 \times 0.92}{50} + \frac{0.05 \times 0.95}{100}}} = 0.68$$

- **المقارنة والقرار:**

حيث أن $(Z_\alpha = 1.64) < (Z_{cal} = 0.68) \Leftarrow$ نقبل الفرضية الصفرية وعليه لا يوجد دليل كافٍ على ادعاء مسؤول المصنع (1).