السلسلة رقم (03) (إحصاء)

DATE / / OM OT OW OT OF OS OS NOTES

تمرين ①:

التقدير: إحصائية مستخدمة لتقدير معلمة من مجال للمجتمع

خصائص: عدم التحيز - الكفاءة - التقارب.

$E(\bar{X}_m) = \mu$

S^2 مقدر متحيز لـ σ^2 لأن

$$E(S^2) = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right) + \sigma^2$$

الكفاءة: أقل تباين.

التقارب:

* خطأ المعاينة: خطأ التقدير (تباين العينة)
* مستوى الثقة $\rightarrow (1-\alpha)$. احتمال الخطأ α (مستوى المعنوية)

التمرين ②: تقدير المتوسط.

نستنتج مجال الثقة لمتوسط المجتمع إذا علمنا أن المجتمع الذي سحبت منه العينة يتبع التوزيع الطبيعي كما يلي:

$$X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma) \Rightarrow \bar{X} \rightsquigarrow N(\mu, \sigma_{\bar{X}}) \Rightarrow$$

$$Z_m = \frac{m-\mu}{\sigma_m} \rightsquigarrow N(0,1) \Rightarrow -Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{m-\mu}{\sigma_m} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow m - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq m + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

إذا كان المجتمع محدودا (حجمه N) والمعاينة بدون إرجاع نكتب حدود مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ كما يلي:

$$\bar{m} \pm Z_c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

DATE / / OM OT OW OT OF OS OS NOTES

إذا كان σ مجهول نعوض σ بـ $\hat{S}$

$$m \mp Z_c \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \quad / \quad E(\hat{S}^2) = \sigma^2$$

$$E(S^2) = \sigma_x^2\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

α	0,10	0,05
$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$Z_{1-\frac{0,10}{2}} = Z_{0,95} = 1,645$	$Z_{1-\frac{0,05}{2}} = Z_{0,975} = 1,96$
	0,01	
	$Z_{1-\frac{0,01}{2}} = Z_{0,995} = 2,58$	

تمرين 02: $n = 410$ (عامل) $\bar{x} = 38,1$

① إيجاد مجال الثقة لمتوسط الأعمار في المستوى الثقة 0,95. $\sigma^2 = 36$

نقبل إذا كان المجتمع طبيعيا لكن حتى وإن لم يكن باستخدام التوزيع الطبيعي للتقدير بفضل نظرية النهاية المركزية

$$m \mp Z_c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

عند مستوى ثقة 0,95 فإن $Z_c = 1,96$ ومنه فإن مجال الثقة

$$\left[38,1 - 1,96 \times \frac{6}{\sqrt{410}} ; 38,1 + 1,96 \times \frac{6}{\sqrt{410}}\right] = (37,51 ; 38,68)$$

في حالة σ مجهول:

$$m \mp Z_c \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}}$$

DATE / / OM OT OW OT OF OS OS NOTES

$n_a = 40$ $n = 100$: ب

$p' = \frac{n_a}{n} = \frac{40}{100} = 0,4$

$1-\alpha = 0,9 \Rightarrow \alpha = 0,1 = 10\%$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{0,1}{2}} = z_{0,95} = 1,64$

$p \in \left[p' - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p'q'}{n}} ; p' + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p'q'}{n}} \right]$

$p \in \left[0,4 - 1,64 \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{100}} ; 0,4 + 1,64 \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{100}} \right]$

$p \in [0,320 ; 0,480]$.

$p' = 0,3$ $n = 400$ ج: أ

$N = 2000$

$\frac{n}{N} = \frac{400}{2000} = 0,2 > 0,05$ $\alpha = 1\%$

$\sigma_{p'} = \sqrt{\frac{p'q'}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right)} = \sqrt{\frac{(0,3 \cdot 0,7)}{400} \left(\frac{2000-400}{2000-1} \right)}$

$= 0,0205$.

$p = 0,3 \mp 2,58(0,02) = 0,3 \mp 0,052$

$p \in [0,248 ; 0,352]$

$\alpha = 5\%$ ب

$p = 0,3 \mp 1,96(0,02) = 0,3 \mp 0,039$

$p \in [0,261 ; 0,339]$

ج: ب

$\sigma = 400$

$m = \mu + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow m - \mu = z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow$

$\frac{\sqrt{n} \cdot S}{\sqrt{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$

DATE / / OM OT OW OT OF OS OS NOTES

$$\frac{(m-\mu)}{\sigma(z)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n}$$

$$(m-\mu)\sqrt{n} = z \cdot \sigma$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{\sigma(z)}{m-\mu} \Rightarrow n = \left(\frac{\sigma(z)}{m-\mu}\right)^2$$

٪٩٥ عند العينة ② الحجم الأدنى لحجم

$$\Rightarrow n = \left(\frac{4000 \cdot 2,58}{2000}\right)^2 = (5,16)^2 \simeq 27$$

$(4000 = (2)2000$: العام لمجال الثقة

ب- ج: نستعمل توزيع ستودنت t في حالة $n < 30$ ، إذا تحقق الشرط الأساسي للمجتمع يكون مجهول مع كون التوزيع الأصلي طبيعيا.

② عينة Σ_m في حالة التوزيع الطبيعي.

$$\Sigma_m = \frac{m-\mu_m}{\sigma_m} = \frac{m-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

في حالة توزيع ستودنت:

$$\hat{S}^2 = \frac{S^2 \cdot n}{n}$$

DATE / / OM OT OW OT OF OS OS NOTES

$$t_m = \frac{m-\mu_m}{\sigma_m} = \frac{m-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} = \frac{m-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

$1-\frac{\alpha}{2}; n-1$: قراءة

ب- كتابة محاطات التقة t_c في حالة توزيع ستودنت، التقة ٩٥٪، حجم العينة $n = 20 - 15 - 10$

$$t_{1-\frac{0,1}{2}; 16} = t_{0,95; 10} = 1,813$$

$$t_{1-\frac{0,1}{2}; 15} = t_{0,95; 15} = 1,753$$

$$t_{0,95; 20} = 1,725$$

$$\hat{S}^2 = \frac{S^2 \cdot n}{n-1}$$

تباين العينة

$$\mu \in \left[m \mp t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1} \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\right]$$

ب- ① تقدير نقطي لمتوسط الإنفاق $\hat{\mu}$:

$$\hat{\mu} = m = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{91 + 169 + \cdots + 101}{40} = \frac{3593}{40} = 89,8 \simeq 90$$

② تقدير فترة لمتوسط الإنفاق

p' تقدر النسبة في القطاع p بالنسبة في العينة
المؤسسات المشغلة لأكثر عامل وأقل عدد
(09) وهي المقدرات:
147، 140، 190، 137، 158، 171، 168
194، 141.

إذن النسبة في العينة:

$$p' = \frac{n_a}{n} = \frac{9}{40} = 0,225 = 22,5\%$$

وهذه القيمة المقدرة لكل p.

③ - مستوى ثقة في الحالتين (وفق التمرين)
هو تباين المقدر.

$$\sigma_{p'} = \sqrt{\frac{pq}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

$$\sigma_{p'} = \sqrt{\frac{0,225 \cdot 0,775}{40}} \sqrt{\frac{194-40}{194-1}} = \frac{0,066}{0,05}$$

④ إعطاء تقدير مستوى ثقة 95% للنسبة الحقيقية
المستهدفة من الإعفاء.

$$p \in \left[p' \pm z_{1-\alpha/2} \sigma_{p'} \; ; \; p' + z_{1-\alpha/2} \sigma_{p'} \right]$$

$$z_{1-\frac{0,05}{2}} = z_{0,975} = 1,96$$

$$p \in \left[0,225 - 1,96 \cdot (0,066) \; ; \; 0,225 + 1,96 (0,066) \right]$$

$$p \in [0,11 \; ; \; 0,34]$$

⑤ كم يجب أن يكون حجم العينة
إذا أردنا أن يكون تباين المقدر للنسبة الحقيقية
المستهدفة 0,01.

$$\sigma^2_{p'} = 0,01 = \frac{p'q'}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right) \Rightarrow$$

$$n = \frac{N}{\sigma^2_{p'} \left(\frac{N-1}{p'q'} \right) + 1}$$

$$= \frac{194}{0,01 \left(\frac{194-1}{0,225 (0,775)} \right) + 1} = 16$$

$$\sigma^2_{p'} = \frac{p'q'}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$$

$$\sigma^2_{p'} = \frac{p'q'N - p'q'n}{n(N-1)}$$

$$\sigma^2_{p'} \cdot n(N-1) = p'q'N - p'q'n$$

DATE / / OM OT OW OT OF OS OS NOTES

$$n = \frac{p'q'N - p'q'n}{\sigma_{p'}^2 (N-1)}$$

$$\sigma_{p'}^2 n(N-1) + p'q'n = p'q'N$$

$$n\left[\sigma_{p'}^2 (N-1) + p'q'\right] = p'q'N$$

$$n = \frac{p'q'N}{\sigma_{p'}^2 (N-1) + p'q'}$$

$$n = \frac{\frac{p'q'N}{p'q'}}{\frac{\sigma_{p'}^2 (N-1)}{p'q'} + \frac{p'q'}{p'q'}} = \frac{N}{\frac{\sigma_{p'}^2}{p'q'}\cdot\frac{N-1}{1} + 1}$$

DATE / / OM OT OW OT OF OS OS NOTES

السلسلة رقم (04):

تـ (1):

$m = \mu_m = 583g$ ، $n = 100$ ، $\mu_0 = 500g$

$\sigma = 30g$.

1. اختيار جودة صنع الأقلام كبيرة وجودة 10%.

← اختيارنا في الاتجاه لأن جودة التعبئة تعني عدم الزيادة ولا النقصان $H_0: \mu = 500$; $H_1: \mu \neq 500$

المجتمع يتبع قانون التوزيع ← $n > 30$ ← نظرية النهاية المركزية ← توزيع طبيعي.

قاعدة القرار تكون كالتالي:

نقبل H_0 sinon. نرفض H_0 si $Z_{cal} = \frac{m - \mu_0}{\sigma_m} \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$

أو نكتب أيضا:

H_0 sinon. H_0 si $Z_{cal} = \left|\frac{m - \mu_0}{\sigma_m}\right| > Z_{table} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

نسهل حساب الإرجاع فرضنا أن المجتمع كبير جدا، $\frac{n}{N} < 0,05$ و حسب الفرضية العكسية فإن $\mu = 500$

إذن: