الفصل II : نظرية التقدير

- تلعب نظرية التقدير دوراً رئيسياً هاماً في الاقتصاد وفي الإحصاء الاستدلالي، حيث تتم على ضوئها تقدير معالم المجتمع الإحصائي والمعلوم توزيعه الاحتمالي، وذلك عن طريق سحب عينة عشوائية من المجتمع وتستخدم إحصاءاتها في تقدير معالم المجتمع.

أولا: مفاهيم أساسية:

أ- تعريف المقدر وخصائصه: لتقدير معلمة من معالم المجتمع نحتاج إلى اختيار الإحصائية المناسبة في العينة، وغالبا ما تكون المعلمة المناظرة في العينة هي أحسن مقدر، لأن فقد متوسط المجتمع μ من خلال متوسط العينة $\mu = E(m)$ وتسمى هذه الإحصائية بالمقدر ومن أهم خصائصه:

- المقدر غير المتحيز (Estimateur non biais):
نقول عن إحصائية ما بأنها مقدر غير متحيز لمعلمة المجتمع إذا كان متوسطها أو توقعها الرياضي مساويا لمعلمة المجتمع أي: نقول عن متوسط العينة $\bar{X}$ أنه مقدر غير متحيز لمتوسط المجتمع μ لأن:

$$E(\bar{x}) = \mu$$

- نسمي إحصائية S^2 في معاينة بإرجاع أنها مقدر متحيز لتباين المجتمع σ^2 لأن
$$E(S^2) = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right) \neq \sigma^2$$

- بينما تعتبر الإحصائية $\hat{S}^2 = S^2\left(\frac{n}{n-1}\right)$ في معاينة بإرجاع أنها مقدر غير متحيز لأن:
$$E(\hat{S}^2) = \sigma^2$$

- الفعالية (الكفاءة): المقدر الأكثر فعالية هو المقدر الأقل تباين.

- التقارب: نقول عن مقدر أنه متقارب إذا كان يؤول إلى قيمة المعلمة عندما يؤول $n \to \infty$.

ب- أنواع التقديرات الإحصائية:

1- التقدير النقطي: نستخدم بيانات العينة لتقدير معلمة المجتمع المجهولة بنقطة واحدة فقط، أي بقيمة واحدة فقط.

2- التقدير بمجال (فترة الثقة): التقدير بفترة فتحصل من خلاله على مجال أو فترة تتحدد بحدين (حد أدنى وحد أعلى) نحصل عليهما من العينة.

ج- فترة الثقة لمتوسط المجتمع μ:

في هذه الحالة لا نكتفي بتقدير معلمة المجتمع بنقطة، فنلجأ باستخدام عينة من المجتمع لحساب مجال نأمل أن تقع فيه معلمة المجتمع بمستوى ثقة محدد مسبقا يرمز له بالرمز $(1-\alpha)$ ويسمى أيضا درجة التأكد، حيث تسمى (α) مستوى المعنوية أو مستوى الخطر، ويطلق على هذه الفترة فترة الثقة للمعلمة بمستوى ثقة $\%(1-\alpha)$.

وفيما يلي نستوضح كيفية إيجاد فترة الثقة لمتوسط المجتمع طبيعي في الحالات التالية:

1- الحالة الأولى: تباين المجتمع σ^2 معلوم:

نعلم أنه إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإن $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ وكذلك $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

فنعرف فترة الثقة $\%(1-\alpha)$ أو نقول فترة ثقة عند مستوى خطر α بأنها الفترة التي تحقق ما يلي:

$$P\left(-Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} < \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < +Z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\right) = 1-\alpha$$

وبتبسيط فترة الاحتمال نحصل على العلاقة التالية:

$$P\left(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu \leq \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$IC_{\mu} = \left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,;\, \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

مثال: أخذت عينة حجمها 49 ومتوسطها 45 من مجتمع إحصائي يتبع توزيعا طبيعيا تباينه 12,25.

1- أوجد فترة الثقة لنسبة 95% لمتوسط المجتمع.

الحل: $n = 49$ ، $1-\alpha = 0{,}95$ ، $\alpha = 0{,}05$ ، $\sigma^2 = 12{,}25$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0{,}05}{2}} = Z_{1-0{,}025} = Z_{0{,}975} = 1{,}96$$

$$I_{C\mu} = \left[\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[45 - \overbrace{1{,}96 \cdot \frac{3{,}5}{\sqrt{49}}}^{0{,}98} ; 45 + 1{,}96 \cdot \frac{3{,}5}{\sqrt{49}}\right]$$

$$= [44{,}02 ; 45{,}98] .$$

وهذا يعني أن احتمال وقوع μ للمجتمع بين القيمتين 44,02 و 45,98 هو 0,95، وتعني كذلك أن هناك 5 حالات من كل 100 حالة ستكون فيها μ خارج فترة الثقة المذكورة.

2- الحالة الثانية، تباين المجتمع σ^2 مجهول وعينات كبيرة ($n \geq 30$)

في هذه الحالة يعطى مجال الثقة لمتوسط المجتمع بالعلاقة التالية:

$$I_{C\mu} = \left[\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

حيث نستخدم الانحراف المعياري للعينة S بدلا من الانحراف المعياري للمجتمع σ لأنه مجهول.

مثال: سحبت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي مجهول التباين بحجم 36 مشاهدة، حيث بلغ متوسطها الحسابي 12 بتباين 16، أوجد فترة الثقة بنسبة 99% لتقدير متوسط المجتمع μ.

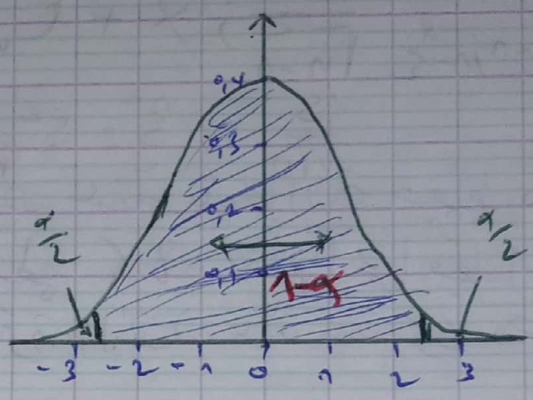
الحل:

$\alpha = 0{,}01$ ، $1-\alpha = 0{,}99$ ، $\bar{x} = 12$, $S^2 = 16$, $n = 36$

من جدول التوزيع الطبيعي نجد،

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{0{,}01}{2}} = z_{1-0{,}005} = \cancel{0{,}995}$$

$$z_{0{,}995} = 2{,}58$$



فتكون فترة الثقة المطلوبة كما يلي،

$$IC_\mu = \left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$$IC_\mu = \left[12 - 2{,}58 \cdot \frac{4}{6} ; 12 + 2{,}58 \cdot \frac{4}{6}\right]$$

$$IC_\mu = \left[12 - 1{,}72 ; 12 + 1{,}72\right]$$

$$= \left[10{,}28 ; 13{,}72\right].$$

3- الحالة الثالثة: تباين المجتمع σ^2 مجهول وعينات صغيرة $(n<30)$

عندما يكون التوزيع طبيعيا ولكن σ غير معلومة، و $n<30$ فإننا لا نستطيع استخدام التوزيع الطبيعي لتحديد فترات الثقة لمتوسط المجتمع غير المعلوم، ولكن يمكننا استخدام توزيع t هذا التوزيع متماثل حول متوسط الصفر، ولكنه منبسط عن التوزيع الطبيعي القياسي، ولهذا فإن جزءا أكبر من مساحته تقع عند الأطراف وبينما يوجد توزيع طبيعي قياسي واحد، فإن هناك توزيعا t مختلفا

لكن حجم العينة n، وكلما تزايد n فإن توزيع t تقترب من التوزيع الطبيعي القياسي إلى أن تكون $n \geq 30$ وعندئذ يتساويان تقريبا.

ويعطى مجال الثقة لتقدير متوسط المجتمع في هذه الحالة وفق الصيغة التالية:

$$I_{C_\mu} = \left[\bar{x} - t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}} ; \bar{x} + t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}} \right] = 1-\alpha$$

$$\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \quad / \quad \hat{S}^2 = S^2 \frac{n}{n-1} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

مثال: سحبت عينة عشوائية حجمها $n = 10$ من مجتمع إحصائي فكان متوسطها $\bar{x} = 8,5$ وانحرافها المعياري $S = 1,58$.

- أوجد فترة الثقة عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

الحل:

من توزيع ستودنت نجد أن

$$t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{(9,1-0,025)} = t_{9,0,975} = 2,262$$

$$I_{C_\mu} = \left[8,5 - 2,262 \cdot \frac{1,58}{\sqrt{10-1}} ; 8,5 - 2,262 \cdot \frac{1,58}{\sqrt{9}} \right]$$

$$= \left[8,5 - 1,19 ; 8,5 + 1,19 \right]$$

$$= \left[7,31 ; 9,69 \right]$$

ج- مجال الثقة لنسبة المجتمع p:

- إن تقدير النسبة بفترة هو عبارة عن إيجاد تقدير نقطي لنسبة النجاح في المجتمع p ثم إيجاد توزيع المعاينة لذلك المقدر واستعمال هذه المعلومات لإيجاد فترة ثقة ذات معامل ثقة معينة تحصر نسبة النجاح p بداخلها والنظرية التالية توضح ذلك.

إذا كان $p' = \frac{n_a}{n}$ نسبة النجاح في عينة عشوائية حجمها n وكان n كبيرا فإن فترة الثقة التقريبية لنسبة النجاح p هي:

$$IC_p = \left[p' - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p' . q'}{n}} \, ; \, p' + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p' q'}{n}} \right]$$

هذا إذا كانت المعاينة تتم من مجتمع غير منتهٍ (غير محدود) أي في حالة السحب بالإرجاع، أما إذا كانت المعاينة تتم من مجتمع منتهٍ (محدود) أي أن السحب بدون إرجاع فإن مجال الثقة لنسبة المجتمع تعطى وفق العلاقة التالية:

$$IC_p = \left[p' - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p' q'}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \, ; \, p' + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p' q'}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \right]$$

مثال: لإيجاد فترة 95% ثقة لنسبة عدد طلاب أحد المدارس الأساسية الذين لديهم ضعف في البصر أخذت عينة عشوائية حجمها 100 طالب ووجد أن من لديهم ضعف في البصر كان 15 طالب

- أوجد فترة الثقة المطلوبة p؟

الحل: إيجاد p' التقدير النقطي لنسبة النجاح.

$$p' = \frac{n_a}{n} = \frac{15}{100} = 0,15$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,05}{2}} = Z_{1-0,025} = Z_{0,975} = 1,96$$

$$IC_p = \left[0,15 - 1,96 \sqrt{\frac{0,15 . 0,85}{100}} \, ; \, 0,15 + 1,96 \sqrt{\frac{0,15 . 0,85}{100}} \right]$$

$$= \left[0,08 \, ; \, 0,22 \right].$$

نقول بأننا واثقون بنسبة 95% بأن نسبة الطلبة الذين لديهم ضعف البصر في المدرسة سيقع بين القيمتين 0,08 و 0,22 .

مثال: مؤسسة متكونة من 1200 عامل، أخذنا عينة عشوائية متكونة من 100 عامل، أراد 70 عامل تسيير تمويل تقاعدهم بأنفسهم بدلا من تسجيلهم ضمن مخطط التقاعد المضمون من طرف شركة التأمينات.

- حدد مجال الثقة عند مستوى معنوية 5% بالنسبة لنسبة العمال الذين إختاروا تسيير أموال تقاعدهم بأنفسهم.

الحل: $N=1200, n=100, n_a=70, \alpha=5\%$

- نسبة العمال الذين إختاروا تسيير أموالهم تقاعدهم بأنفسهم في العينة المسحوبة هو:

$$p' = \frac{n_a}{n} = \frac{70}{100} = 0,70$$

لدينا $n=100>30$، إذن التوزيع المتبع هو التوزيع الطبيعي:

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{0,05}{2}} = z_{1-0,025} = z_{0,975} = 1,96$$

كذلك لدينا $\frac{n}{N} = \frac{100}{1200} = 0,08 > 0,05$ والمجتمع محدود (السحب تم بدون إرجاع):

$$IC_p = \left[p' - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p'q'}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} ; p' + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p'q'}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right]$$

$$= \left[0,7 - 1,96\sqrt{\frac{0,7 \cdot 0,3}{100}}\sqrt{\frac{1200-100}{1200-1}} ; 0,7 + 1,96\sqrt{\frac{0,7 \cdot 0,3}{100}}\sqrt{\frac{1200-100}{1200-1}}\right]$$

$$= [0,696 ; 0,704].$$

أي أننا واثقون بنسبة 95% بأن نسبة العمال الذين إختاروا تسيير أموال تقاعدهم بأنفسهم سيقع بين القيمتين 0,696 و 0,704.

α	0,10	0,05	0,01
$z_{1-\alpha/2}$	$z_{1-\frac{0,1}{2}} = z_{0,95} = 1,645$	$z_{1-\frac{0,05}{2}} = z_{0,975} = 1,96$	$z_{1-\frac{0,01}{2}} = z_{0,99[illegible]} = 2,58$

فترة الثقة للفرق بين وسطين:

* فترة الثقة للفرق بين وسطين مع معلومية تباين المجتمعين:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \sim N\left(\mu_1 - \mu_2 \,;\, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

رياضيا:

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

تكون فترة الثقة $(1-\alpha)\%$ كالتالي:

$$-z_{1-\alpha/2} < \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < +z_{1-\alpha/2}$$

ويصبح مجال الثقة كالتالي:

$$IC_{\mu_1 - \mu_2} = \left[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \mp z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

~~مثال: عينة عشوائية حجمها $n_1 = 80$ ومتوسطها $\bar{x} = 1680$~~
~~وعينة عشوائية ثانية حجمها $n_2 = 75$ ومتوسطها $\hat{\bar{x}}_2 = 1200$~~
~~وكان الانحراف المعياري للمجتمعين σ_1~~

55,902
69,282

3,125 + 4,810 = 7,928

مثال: قمنا بدراسة الانفاق الأسبوعي لطلاب إحدى الجامعتين، فإذا كان تباين الإنفاق الأسبوعي للجامعة الأولى والثانية هو 99,1 و 97,7 على الترتيب، سحبنا عينتين عشوائيتين حجمهما 15 و 10 طلاب، حيث حصلنا على متوسط إنفاق أسبوعي 204,20 و 184,60 على التوالي (الإنفاق الأسبوعي للطلبة يتبع التوزيع الطبيعي).

- قدّر الفرق بين متوسطي الإنفاق الأسبوعي للطلبة في الجامعتين (مستوى ثقة 95%).

الحل: لدينا توزيع المجتمعين طبيعي وتباينهما معلومين، إذن:

$$IC_{\mu_1-\mu_2} = \left[(\bar{x}_1-\bar{x}_2) \mp z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

$$= \left[(204,20-184,60) \mp 1,96\sqrt{\frac{99,1}{15}+\frac{97,7}{10}}\right]$$

$$= \left[11,815 \,;\, 27,385\right]$$

* فترة الثقة للفرق بين متوسطين مع مجهولية تباين المجتمعين وحجم العينتين أكبر من 30:

في هذه الحالة مجال الثقة يعطى بالعلاقة التالية:

$$IC_{\mu_1-\mu_2} = \left[(\bar{x}_1-\bar{x}_2) \mp \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\; z_{1-\alpha/2}\right]$$

مثال: لمقارنة مستوى رضا العملاء للشركتين في مجال الاتصالات الهاتفية بإحدى الدول قمنا باستجواب 174 عميلا للشركة الأولى و 355 عميلا للشركة الثانية، حيث يقيم كل عميل مستوى رضاه على مستوى الخدمات المقدمة إعتمادا على سلم خماسي ينطلق من 1: (1: غير راضي بشدة، 2 غير راضي، 3: حيادي، 4 راضي، 5 راضي بشدة) كانت نتائج الاستجواب ملخصة في الجدول التالي:

الشركة الثانية	الشركة الأولى
عدد العملاء : 355	عدد العملاء : 174
المتوسط : 3,24	المتوسط : 3,51
الانحراف المعياري : 0,52	الانحراف المعياري : 0,51

- قدّر الفرق بين متوسطي رضا العملاء حول خدمات هاتين الشركتين في هذه الدولة بناء على نتائج الاستجواب (مستوى معنوية 5%).

الحل : لدينا توزيع المجتمعين مجهولين، وحجم العينتين أكبر من 30 حسب نظرية النهاية المركزية فإن توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطين يتبع التوزيع الطبيعي، وعليه مجال الثقة للفرق بين المتوسطين يكتب كما يلي :

$$IC_{\mu_1-\mu_2} = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \mp Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}\right]$$

$$= \left[(3,51 - 3,24) \mp 1,96 \sqrt{\frac{(0,51)^2}{174} + \frac{(0,52)^2}{355}}\right]$$

$$= [0,1769 \; ; \; 0,3631]$$

* فترة الثقة للفرق بين وسطين مع معلومية تباين المجتمعين و n_1 و n_2 أقل من 30

في هذه الحالة تكون مجال الثقة كما يلي :

$$IC_{\mu_1-\mu_2} = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \mp t_{(1-\alpha/2 \,;\, n_1+n_2-2)} \sqrt{\frac{S_1^2(n_1-1) + S_2^2(n_2-1)}{n_1+n_2-2}}\right]$$

مثال : تقوم شركة برمجيات بتسويق لعبة كمبيوتر جديدة، لأجل هذا صممت غلافين تجريبيين لهذه اللعبة، حيث تم إرسال التصميم الأول إلى 11 متجر حيث كان متوسط المبيعات في الشهر الأول هو 52 وحدة مع انحراف معياري 12 وحدة، إرسال التصميم الثاني إلى المتاجر حيث كان متوسط المبيعات في الشهر الأول 46 وحدة مع انحراف معياري 10 وحدات، إذا علمت أن توزيع الوحدات يخضع للتوزيع الطبيعي.

- إبني مجال الثقة للفرق بين المتوسطين حسب نوع التصميم (مستوى ثقة 95%).

الحل: لدينا توزيع المجتمعين طبيعي، تباينا هما مجهولين، وحجم العينتين أقل من 30، إذا توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطين يتبع توزيع ستودنت بدرجة حرية n_1+n_2-2

وعليه مجال الثقة يكتب كما يلي:

$$IC_{\mu_1-\mu_2}=\left[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\mp t_{1-\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2}\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\right]$$

$$=\left[(52-46)\mp t_{1-\frac{0,05}{2};11+6-2}\sqrt{\frac{(11-1)(12)^2+(6-1)10^2}{11+6-2}}\right] \quad \frac{1}{11}+\frac{1}{6}$$

$$t_{1-\frac{0,05}{2};11+6-2}=t_{0,975;15}=2,131$$

$$IC_{\mu_1-\mu_2}=\left[-6,299;18,299\right].$$

فترة الثقة لتباين المجتمع:

$$\frac{(n-1)\sigma_{\bar{x}}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-1}$$

وتعرف فترة الثقة لتباين المجتمع بأنها الفترة التي تحقق:

$$P\left(\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2}),n-1}<\frac{(n-1)\sigma_{\bar{x}}^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}\right)=1-\alpha$$

ويصبح مجال الثقة كما يلي:

$$IC_{\sigma^2} = \left[\frac{(n-1)\sigma_{\bar{x}}^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2; n-1)}} ; \frac{(n-1)\sigma_{\bar{x}}^2}{\chi^2_{(\alpha/2; n-1)}} \right]$$

مثال: أوجد فترة الثقة 95% لتباين ~~المجتمع~~ سحبت منه عينة حجمها 8 و تباينها 12,6.

الحل: لدينا من المعطيات $n=8 ; \sigma_{\bar{x}}^2 = 12,6 , \alpha = 0,05$

$$\chi^2_{1-\frac{0,05}{2}; 8-1} = \chi^2_{(0,975, 7)} = \cancel{1,69}\ 16,01$$

$$\chi_{\frac{0,05}{2}; 8-1} = \chi^2_{0,025; 7} = \cancel{16,01}\ 1,69$$

$$IC_{\sigma^2} = \left[\frac{(8-1)12,6}{16,01} ; \frac{(8-1)12,6}{1,69} \right]$$

$$IC_{\sigma^2} = [5,509 ; 52,189]$$

فترة الثقة للنسبة بين تباينين:

في هذه الحالة يعطى مجال الثقة كما يلي:

$$IC_{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} = \left[\frac{\sigma_{\bar{x}_1}^2}{\sigma_{\bar{x}_2}^2} \cdot F^{\alpha/2}_{(n_1-1, n_2-1)} ; \frac{\sigma_{\bar{x}_1}^2}{\sigma_{\bar{x}_2}^2} F^{1-\alpha/2}_{(n_1-1; n_2-1)} \right]$$

مثال: أخذت عينة حجمها $n_1 = 8$ و تباينها $\sigma_{\bar{x}_1}^2 = 82$ من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي و عينة أخرى حجمها $n_2 = 11$ مستقلة عن الأولى وتباينها $\sigma_{\bar{x}_2}^2 = 160$ من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي.

- ابني مجال الثقة للنسبة بين تبايني المجتمعين عند مستوى ثقة 90%

الحل : بالتعويض في العلاقة نجد :

$$F^{\alpha/2}_{(n_1-1, n_2-1)} = F^{\frac{0,1}{2}}_{(8-1; 11-1)} = F^{0,05}_{(7,10)} = \frac{1}{F^{0,95}_{(10,7)}} = \frac{1}{3,64} = 0,275$$

$$F^{1-\alpha/2}_{(n_1-1, n_2-1)} = F^{1-\frac{0,1}{2}}_{(8-1; 11-1)} = F^{0,95}_{(7,10)} = 3,14$$

$$IC_{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} = \left[\frac{82}{160} \cdot 0,275 \, ; \frac{82}{160} \cdot 3,14\right]$$

$$= \left[0,141 \, ; 1,609\right].$$