محاضرات مقياس الإحصاء 3

المحاضرة رقم 01: توزيع المعاينة:

مقدمة: تعد دراسة أسلوب العينات من المحاور الرئيسية في دراسة موضوع الاستدلال الإحصائي، الذي يستند في جوهره على حقيقة الوصول إلى استنتاجات دقيقة عن المجتمع المدروس، بناءا على البيانات التي تم الحصول عليها من العينة المأخوذة منه، وفقا للطرق الإحصائية المعلومة.

أساليب جمع البيانات:

هناك أسلوبان لجمع البيانات ميدانيا، هما أسلوب الحصر الشامل وأسلوب المعاينة.

* أسلوب الحصر الشامل: وهو أسلوب يتم بموجبه جمع البيانات الإحصائية من كافة المفردات التي تؤلف المجتمع الأصلي للظاهرة قيد الدراسة، كحصر جميع تلاميذ المرحلة الابتدائية في البلد، أو حصر جميع المؤسسات التعليمية في البلد يعاب عليه أنه يحتاج إلى الوقت والجهد وتكاليفه عالية.

* أسلوب المعاينة: يعتمد على معاينة جزء من المجتمع محل الدراسة، ويسمى هذا الجزء من المفردات بالعينة، ويتم اختيار المفردات بموجب هذا الأسلوب وفق طريقة علمية تسمى طريقة المعاينة، ويتميز هذا الأسلوب بالاقتصاد في الوقت والجهد والتكلفة، والحصول على بيانات أكثر تفصيلا، ولكن يعاب عليه أنه أقل دقة من أسلوب الحصر الشامل، خاصة إذا كانت العينة المختارة لا تمثل المجتمع تمثيلا جيدا، أو تم اختيارها بشكل متحيز.

- ~~المجتمع والعينة~~:

- ~~المجتمع~~:

توزيع المعاينة: يعرف توزيع المعاينة بأنه عبارة عن توزيع كافة القيم المحتملة التي يمكن افتراضها بإحصاءة ما محسوبة على أساس عينات مختلفة بنفس الحجم اختيرت عشوائيا من نفس المجتمع.

أو هي الكيفية أو العمليات التي تسمح باشتقاق مجموعة توزيع

من المجتمع. ولبناء توزيع المعاينة نتبع الخطوات الآتية.

- سحب كافة العينات بحجم (n) ممكنة، مع إرجاع أو بدون إرجاع، من مجتمع حجمه (N).
- حساب متوسط المجتمع (μ) وتباينه (σ^2).
- حساب الإحصاء ($\bar{x}$) لكل عينة.
- تكوين جدول توزيع تكراري للقيم المختلفة للإحصاء المحسوبة.
- حساب متوسط المتوسطات ($\mu_{\bar{x}}$) وتباين الوسط الحسابي ($\sigma^2_{\bar{x}}$).

المجتمع: يعرف المجتمع بأنه مجموعة عناصر تشترك في خاصية أو أكثر، وقد يكون محدود أو غير محدود، ويرمز له بـ

مثال 1: نرغب في استخلاص نتائج حول أطوال 1000 طالب من خلال فحص 100 طالب فقط، في هذه الحالة يتكون المجتمع من 1000 طالب، بينما تتكون العينة من 100 طالب مسحوب من هذا المجتمع (المجتمع محدود).

مثال 2: نرغب في استخلاص نتائج وجهي تجانس قطعة نقدية معينة من خلال رميها بشكل متكرر، يتشكل المجتمع من كل نتائج رمي القطعة النقدية الممكنة، أما العينة فيمكن الحصول عليها بفحص أول 50 رمية مثلا (المجتمع غير محدود).

العينة: هي جزء من المجتمع، تتكون من مفردات تم اختيارها بطريقة مناسبة، بحيث تمثل المجتمع تمثيلا جيدا، وذلك لدراسة صفات المجتمع. ويطلق على مفردات العينة التي تم اختيارها من المجتمع عادة بحجم العينة ويرمز له بالرمز (n) حيث: (n < N).

أنواع العينات الإحصائية: هناك عينات احتمالية وغير احتمالية.

- العينات الاحتمالية: هي العينات التي تم اختيار مفرداتها وفقا لقانون الاحتمالات، بمعنى آخر هي التي تم اختيار مفرداتها من مجتمع الدراسة بطريقة عشوائية

- العينة العشوائية البسيطة: هي عينة يتم إختيارها بإعطاء فرص متكافئة لكل عناصر المجتمع للظهور في العينة،
- العينة النفاذية: سحب بدون إرجاع.
- العينة غير النفاذية: سحب بارجاع.

- العينة العشوائية المنتظمة: يطلق عليها اسم العينة ذات الفترات (المسافات) المتساوية، تعرفها بأنها العينة التي يتم إختيار مفرداتها بحيث تكون المسافة أو الفترة بين كل مفردة وسابقتها ثابتة لجميع مفردات العينة، ويحدد طول الفترة أو المسافة المنتظمة بين المفردات بقسمة حجم المجتمع على حجم العينة، وتستخدم هذه العينة في حالة توفر قائمة بأفراد المجتمع.

المعلمة والإحصاءة:

- المعلمة: هي المؤشرات الناتجة عن المجتمع الإحصائي مثل: المتوسط الحسابي للمجتمع (μ)، التباين (σ^2)، النسبة P.

- الإحصاءة: هي المؤشرات الناتجة عن العينة مثل متوسط العينة $\bar{x}$ (m)، الإنحراف المعياري للعينة S.

توزيع ~~المجـ~~ المعاينة للوسط الحسابي:

- متوسط توزيع المعاينة للمتوسطات:

مثال: مجتمع إحصائي يتكون من ثلاث مشاهدات ($N=3$) هي ($2, 6, 14$). تم إختيار عينة عشوائية بحجم مشاهدتين من هذا المجتمع ($n=2$)

- حساب القيمة المتوقعة لمتوسط العينة $E(m)$ في حالة الإرجاع وبدون إرجاع.

بإرجاع: تحديد جميع الحالات الممكنة: N^n

بدون إرجاع: $C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$

السحب بإرجاع : (عينة غير نفادية)

① - تحديد العينات الممكنة.

② - تحديد m_i (المتوسط الحسابي للعينة).

③ - إيجاد جدول التوزيع الاحتمالي

m_i				
p_i				

④ - استخراج القيمة المتوقعة لـ m : $E(m)$.

$$E(m) = \sum m_i \cdot p_i$$

⑤ - حساب متوسط المجتمع (μ).

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \mu$$

السحب بدون إرجاع : (عينة نفادية).

$$E(m) = \frac{\sum m_i}{\text{عدد العينات}} = \mu$$

نظرية 01 : إذا كانت X م ع تمثل مجتمع ما و m متغيرة عشوائية تمثل متوسط عينة مسحوبة من ذات المجتمع فإن القيمة المتوقعة لمتوسط العينة $E(m)$ تكتب كما يلي :

$$E(m) = \mu_m = \mu .$$

- تباين توزيع المعاينة للمتوسطات ، σ_m^2

- السحب بإرجاع :

① - حساب تباين المجتمع : σ^2

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}$$

② - حساب تباين توزيع المعاينة للمتوسطات :

$$\sigma_m^2 = \frac{\sum (m_i - m)^2}{\underset{\text{عدد العينات}}{n}}$$

نلاحظ أن، $\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{2}$

نظرية 2: السحب بإرجاع: $\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

السحب بدون إرجاع:

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

نظرية 3: بدون إرجاع.

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{n}\underbrace{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}_{\text{معامل الإرجاع}}$$

- يمكن إهمال معامل الإرجاع إذا كانت العينة صغيرة جدًا بالمقارنة مع حجم المجتمع (لأنه يقترب من 1).
وتكون قيمة معامل الإرجاع أقل من 1 كلما كان $n > 1$، هذا يعني أن خطأ المعاينة في حالة المعاينة بدون إرجاع أقل منه في حالة المعاينة بإرجاع، هذا يعني أن المعاينة بدون إرجاع تعطي تقديرا أكثر دقة لمعلمة المجتمع μ.

- خطأ المعاينة: هو الفرق بين القيمة المحسوبة الإحصائية العينة وقيمة معلمة المجتمع المناظرة لها.

ملاحظات:
في حالة المجتمعات الكبيرة فإن صيغة الانحراف المعياري سواء كانت المعاينة بإرجاع أو غير بإرجاع تكون كما يلي:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- يطلق على النسبة $\frac{n}{N}$ معدل الاستقصاء.
- عندما تكون قيمة معدل الاستقصاء أقل من 0,05 أي ($\frac{n}{N} < 0,05$) فإنه يتم إهمال قيمة معامل الإرجاع $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ في علاقة التباين.

حل المثال:

$X_1 = \{2, 6, 4\}$ $n = 2$

① - حساب $E(m)$.

- إيجاد عدد العينات الممكنة في السحب بإرجاع:

$N^n = 3^2 = 9$

العينات	2	6	4
2	(2,2)	(6,2)	(4,2)
6	(2,6)	(6,6)	(4,6)
4	(2,4)	(6,4)	(4,4)

حساب الوسط الحسابي $(\bar{X})$ أو (m) لكل عينة على التوالي

العينات	(2,2)	(2,6)	(2,4)	(6,2)	(6,6)	(6,4)	(4,2)	(4,6)	(4,4)
$\bar{X}$ أو m	2	4	3	4	6	5	3	5	4

- إيجاد جدول التوزيع الاحتمالي:

m_i	2	3	4	5	6
$P(m_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

$$E(m) = \sum m_i . P_i = \left(2 . \tfrac{1}{9}\right) + \left(3 . \tfrac{2}{9}\right) + \left(4 . \tfrac{3}{9}\right) + \left(5 . \tfrac{2}{9}\right) + \left(6 . \tfrac{1}{9}\right) =$$

$$= \frac{36}{9} = 4 = \mu_{\bar{x}}$$

حساب متوسط المجتمع : μ

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{2+6+4}{3} = 4$$

$$\mu = \mu_{\bar{x}}.$$

حساب $\mu_{\bar{x}}$ في حالة السحب بدون إرجاع :

- عدد العينات الممكنة :

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!} =$$

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!.1!} = \frac{3.\cancel{2}.\cancel{1}}{\cancel{2}.1.\cancel{1}} = 3$$

(4,6)	(4,2)	(6,2)	العينات
5	3	4	$\bar{x}_i$

$$\mu_{\bar{x}} = (3.\tfrac{1}{3}) + (4.\tfrac{1}{3}) + (5.\tfrac{1}{3}) = \frac{12}{3} = 4$$

5	4	3	m_i
1/3	1/3	1/3	p_i

$$\Rightarrow \mu = \mu_{\bar{x}} = 4$$

حساب تباين المجتمع : σ^2

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N} = \frac{(2-4)^2 + (6-4)^2 + (4-4)^2}{3} = \frac{8}{3}$$

لحساب تباين العينة : $\sigma^2_{\bar{x}}$

حالة السحب بإرجاع :

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sum (\bar{x}_i - \mu_{\bar{x}})^2}{\text{عدد العينات}} = \frac{(2-4)^2 + (4-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (6-4)^2 + (5-4)^2 + (3-4)^2 + (5-4)^2 + (4-4)^2}{9}$$

$$= \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\frac{8}{3}}{2} = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$$

حساب تباين العينة في حالة السحب بدون ارجاع : σ_m^2

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum (\bar{x}_i - \mu_{\bar{x}})^2}{\text{عدد العينات}} = \frac{\cancel{(4-4)^2} + (3-4)^2 + (5-4)^2}{3} = \frac{2}{3}$$

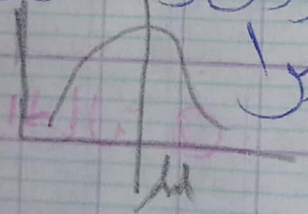
$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{\frac{8}{3}}{2}\left(\frac{3-2}{3-1}\right) = \frac{\frac{8}{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\cancel{8}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}$$

$$= \frac{2}{3}$$

طبيعة
طبيعة توزيع m : من المهم دراسة توزيع المعاينة
المتوسطات وذلك من خلال نظريات التالية:

نظرية 4 : إذا كان المجتمع موزع طبيعيا بمتوسط μ
وتباين σ^2 فإن متوسط العينة المسحوبة منه يتبع
أيضا التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين $\frac{\sigma^2}{n}$
ونكتب $m \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

نظرية 5 : (نظرية النهاية المركزية): إذا كان المجتمع
الذي تسحب منه العينة ذو متوسط μ وتباين σ^2
لكن ليس بضرورة طبيعيا فإن المتغيرة المعيارية لـ m
أي: $Z = \frac{m-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ تؤول إلى التوزيع الطبيعي
المعياري عندما يكون n كبيرا
ونكتب: $(n \geq 30)$



$$Z \sim N(0,1)$$

في حالة مجتمع محدود والعينة نفدية نستبدل $\sigma/\sqrt{n}$
بـ $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ هذه النظرية محققة في حالتين
إرجاع أو بدون إرجاع مهما كان حجم العينة
عمليا: يستخدم احصائيون هذه الصيغة المعدلة لمعامل
الإرجاع للانحراف المعياري عندما تكون $n/N \geq 0,05$
وتسمى النسبة n/N بمعامل الاستقصاء ونرمز له
بالرمز f

صيغة المعادلة نحسبها إذا كان الجزء من العينة أكبر

مثال: مجتمع حجم $N=1000$ بمتوسط $\mu=25$
وانحراف معياري $\sigma=14$ بعد استخراج كل العينات الممكنة
احسب المتوسط والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة
للمتوسطات في حالة حجم العينة $n=40$ و $n=68$

الحالة ①: $n=40$

$$\frac{n}{N} = \frac{40}{1000} = 0,04$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma_n = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{14}{\sqrt{40}} = \frac{14}{6,324}$$

$$\sigma = 2.245$$

متوسط توزيع المعاينة = متوسط المجتمع

$$m_i = \mu = 25$$

الحالة ②: $n=68$

$$\frac{n}{N} = \frac{68}{1000} = 0,068 > 0,05$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right) = \frac{14}{\sqrt{68}}\left(\sqrt{\frac{1000-68}{1000-1}}\right)$$

$$\sigma_m = 1,63$$

بالاعتماد على معطيات المثال السابق وفي حالة $n=40$
احسب أن تكون m محصورة بين 28 و 22 نفس الشيء
بالنسبة لـ $n=68$

$$Z_1 = \frac{m_i-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{22-25}{14/\sqrt{40}} = \frac{-3}{2.2075} \Leftarrow n=40$$

$$Z_1 = -1,35$$

$$Z_2 = \frac{m_2 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{28-25}{14/\sqrt{\cancel{48}\,40}} \Rightarrow Z_2 = 1,35$$

$$P(m_1 \leq m \leq m_2) = (Z_1 \leq Z \leq Z_2)$$

$$P(Z_1 \leq Z \leq Z_2) = P(-1,35 \leq m \leq 1,35)$$

$$= P(1,35) - P(-1,35) = 0,9115 - 0,08851 = 0,822$$

من جدول التوزيع الطبيعي Z المقابلة للقيمة 1,35

هي 0,9115

-1,35 هي 0,08851

$$Z_1 = \frac{m_1 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\left(\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right) \quad \Leftarrow n = 68$$

$$= \frac{22-25}{14/\sqrt{68}}\left(\frac{1000-68}{1000-1}\right) = -1,64$$

$$Z_2 = 1,64$$

$$P(m_1 \leq m \leq m_2) = P(Z_1 \leq Z \leq Z_2)$$

$$P(-1,64 \leq Z \leq 1,64) = P(1,64) - P(-1,64)$$

$$= 0,9495 - 0,0505$$

$$P = 0,899$$

توزيع المعاينة للنسبة: تتطلب دراسة المعاينة للنسبة توضيح الآلية التي يكون فيها التوزيع من حيث المتوسط التشتت وشكل التوزيع

- نقصد بالنسبة في المجتمع بالكسر $P = \frac{N_a}{N}$ حيث N حجم المجتمع و N_a عدد المفردات التي تتحقق فيها خاصية ما.

- نقصد بالنسبة في العينة بالكسر $\hat{P} = \frac{n_a}{n}$ حيث n حجم العينة و n_a عدد مفردات العينة التي تحقق نفس الصفة

سنقوم بدراسة الخصائص $\hat{P}$ وتوزيعها الاحتمالي لأنها إحصائية تستخدم لتقدير النسبة في المجتمع P

مثال:

مجتمع حجمه $N=5$ يتكون من العناصر التالية: 1 . 0 . 0 . 1 . 0 (1: العنصر له صفة . 0: ليس له صفة). نسحب عنصرين عشوائيا بدون إرجاع احسب $\hat{P}$

الحل: متوسط المجتمع:

$$\mu = \frac{1+0+0+1+0}{5}$$

$$\mu = \frac{2}{5} = 0.4$$

تباين المجتمع:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x-\mu)^2}{n} = \frac{(1-0.4)^2+(0-0.4)^2+(0-0.4)^2+(1-0.4)^2+(0-0.4)^2}{5}$$

$$\sigma^2 = 2.4$$

نسبة المجتمع:

$$P' = \frac{N_a}{N} = \frac{2}{5} = 0.4$$

عدد الحالات الممكنة = 10 في حالة بدون إرجاع

0	1	0	0	1	/
0.1	1.1	0.1	0.1	-	1
0.0	1.0	0.0	-	-	0
1.0	1.0	-	-	-	0
0.1	-	-	-	-	1
-	-	-	-	-	0

حالة الارجاع :

عدد الحالات الممكنة : 25

0	1	0	0	1	/
(0,1)	(1,1)	(0,1)	(0,1)	(1.1)	1
(0,0)	(1,0)	(0,0)	(0,0)	(1,0)	0
(0,0)	(1,0)	(0,0)	(0,0)	(1,0)	0
(0,1)	(1,1)	(0,1)	(0,1)	(1,1)	1
(0,0)	(1,0)	(0,0)	(0,0)	(1,0)	0

نظرية : لتكن n متغير عشوائية تمثل مجتمعا غير محدود وموزع طبيعيا حيث P نسبة المفردات في المجتمع ذات الصفة معينة ولتكن P' متغيرة عشوائية نسبة المفردات ذات الصفة المذكورة في العينة المسحوبة من نفس المجتمع فإن التوقع الرياضي لـ P' يساوي متوسط المجتمع للنسبة P أي : $E(P') = M_{p'} = P$ بينما تباين المجتمع $\sigma^2_{p'} = \frac{pq}{n}$

في حالة المجتمع محدود (العينة نفادية) نضرب في معامل

الإرجاع عند حساب الانحراف المعياري.

نعكس المثال السابق :

عدد الحالات الممكنة : بدون إرجاع

0.5	1	0.5	0.5	1
0	0.5	0	0	0.5
0	0.5	0	0	0.5
0.5	1	0.5	0.5	1
0	0.5	0	0	0.5

p'	f	$p'f$
0	9	0
0.5	12	6
1	4	4
3	25	10

$$E(p') = \frac{10}{25} = 0.4$$

$$p = \frac{N_a}{N} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$\frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{n} \qquad \sigma^2 p' = \frac{pq}{n}$$

$$(p' - E(p))^2 f = (0 - 0.4)^2 \cdot 9 = 1.44$$

$$= (0.5 - 0.4)^2 \, 12 = 0.12$$

$$= (1 - 0.4) \cdot 4 = 1.44$$

$$\frac{\sum (p' - E(p'))^2 f}{n} = \frac{3}{25} = 0.12$$

$$\sigma^2 p' = \frac{pq}{n} = \frac{0.4(1 - 0.4)}{2} = 0.12$$

0.5	1	0.5	0.5
0	0.5	0	—
0	0.5	—	—
0.5	—	—	—

عدد الحالات الممكنة بإرجاع :

$(p'-E(p))^2 \cdot f$	$p'f$	f	p'
$3 \cdot (0-0{,}4)^2 =$	0	3	0
0,06	3	6	0,5
0,36	1	1	1
0,9	4	10	3

$$E(p') = \frac{\sum Pf}{n} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

$$P = \frac{Na}{N} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

$$\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{Pq}{n} = \frac{0{,}4(1-0{,}4)}{2}\left(\frac{5-2}{5-1}\right) = 0{,}09$$

$$\frac{\sum (P'-E(P))^2 \cdot f}{10} = \frac{0{,}9}{10} = 0{,}09$$

نظرية: إذا كانت u متغير عشوائية تمثل مجتمعا حيث P نسبة المفردات ذات صفة معينة و P' متغيرة عشوائية تمثل نسبة ذات نفس الصفة في عينة عشوائية مسحوبة من نفس المجتمع فإن هذه النسبة P' تتبع قانون التوزيع الطبيعي $P' \sim N(P, \sigma^2_P)$

توزيع المعاينة للفروق والمجاميع:

1- المتوسط والتباين:

ليكن لدينا مجتمعين نسحب من كل مجتمع عينة عشوائية ونحسب في كل عينة مسحوبة من المجتمع الأول الاحصائية V_1 وبالنسبة للمجتمع الثاني الاحصائية V_2.

أ- بالنسبة للفرق:

$$\mu_{V_1-V_2} = \mu_{V_1} - \mu_{V_2}$$

$$\sigma^2_{V_1-V_2} = \sigma^2_{V_1} + \sigma^2_{V_2}$$

إذا كانت الاحصائية هي المتوسط فإن:

$$\mu_{m_1-m_2} = \mu_{m_1} - \mu_{m_2} = \mu_1 - \mu_2$$

إذا كانت الاحصائية هي تباين فإن:

$$\sigma^2_{m_1-m_2} = \sigma^2_{m_1} - \sigma^2_{m_2} = \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}$$

أما إذا كانت الاحصائية هي النسبة فإن:

$$\mu_{p_1-p_2} = \mu_{p_1} - \mu_{p_2} = p_1 - p_2$$

$$\sigma^2_{p_1-p_2} = \sigma^2_{p_1} + \sigma^2_{p_1} = \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}$$

ب- بالنسبة المجموع:

$$\mu_{V_1+V_2} = \mu_{V_1} + \mu_{V_2}$$

$$\sigma^2_{V_1+V_2} = \sigma^2_{V_1} + \sigma^2_{V_2}$$

مثال:

ليكن المجتمع $U_1 = 3 , 5 , 7$ $U_2 = 2 . 5$ تحقق:

أنّ: $\mu_{U_1-U_2} = \mu_{U_1} - \mu_{U_2}$ ، $\sigma^2_{U_1-U_2} = \sigma^2_{U_1} + \sigma^2_{U_2}$

$\mu_1 - \mu_2$		U_1		
		3	5	7
μ_2	2	1	3	5
	5	-2	0	2

- متوسط المجتمع μ_1:

$$\mu_{U_1} = \frac{3+5+7}{3} = 5$$

- متوسط المجتمع μ_2:

$$\mu_{U_2} = \frac{2+5}{2} = 3.5$$

$$\mu_{U_1-U_2} = \frac{1+3+5+(-2)+0+2}{6} = \frac{9}{6} = 1,5$$

$$\mu_{U_1} - \mu_{U_2} = 5 - 3,5 = 1.5$$

$$\mu_{U_1-U_2} = \mu_{U_1} - \mu_{U_2}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n} = E(x^2) - \left(E(x)\right)^2$$

$$E(x^2) = \frac{\sum (x)^2}{n} \quad \Big| \left(E(x)\right)^2 = (\bar{x})^2$$

- حساب تباين المجتمع U_1 :

$$\sigma^2_{U_1} = \frac{3^2+5^2+7^2}{3} - (5)^2 = 2.66$$

- حساب تباين المجتمع U_2 :

$$\sigma^2_{U_2} = \frac{2^2+5^2}{2} - (3.5)^2 = 2.25$$

$$\sigma^2_{U_1-U_2} = \frac{1^2+3^2+5^2+(-2)^2+0^2+2^2}{6} - (1.5)^2$$

$$\sigma^2_{U_1-U_2} = 4.91$$

$$\sigma^2_{U_1-U_2} = 2.66 + 2.25 = 4.91$$

$$\sigma^2_{U_1-U_2} = \sigma^2_{U_1} + \sigma^2_{U_2}$$

نظرية :

في حالة n_1 و $n_2 \geq 30$. يقترب توزيع المتغيرة المعيارية للفرق بين متوسطين من التوزيع الطبيعي المعياري

$$M_{m_1-m_2} \sim N(0.1)$$

توزيع المعاينة للتباين :

2- في حالة المعاينة بإرجاع :

نظرية : إذا كانت x متغيرة عشوائية تمثل مجتمع ما و S^2 متغيرة عشوائية تمثل تباين عينة مسحوبة بإرجاع وحجمها n فإن :

$$E(S^2) = M_{S^2} = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

ملاحظة : من النظرية السابقة نجد أن التوقع الرياضي

$E\left(S^2 \cdot \frac{n}{n-1}\right) = \sigma^2$ ونقول عنه $S^2 \cdot \frac{n}{n-1}$

أنه مقدر غير متحاز لـ σ^2 ويرمز له $\hat{S}^2$

حيث $\hat{S}^2$: $\hat{S}^2 = \frac{S^2 \cdot n}{n-1}$

ب- في حالة المعاينة بدون ارجاع:

نظرية 8: إذا كانت n متغيرة عشوائية تمثل مجتمع ما وكل متغيرة عشوائية تمثل تباين عينة نفاذية مسحوبة من ذات المجتمع فإن القيمة المتوقعة لتباين العينة تكتب على الشكل التالي: $E(S^2) = \sigma^2 \frac{n-1}{n} \left(\frac{N}{N-1}\right)$

وإذا كان N عدد كبير فإن القيمة $\frac{N}{N-1}$ تؤول 1

مثال:

من المثال الأول احسب القيمة المتوقعة لتباين العينة المسحوبة بإرجاع و بدون ارجاع من خلال التباينات العينات الممكنة.

- قارن بين تباين المجتمع والقيمة المتوقعة.

تذكير: العينات الممكنة بإرجاع: ص 4 x

حساب القيمة المتوقعة للتباين:

التباينات الممكنة:

12.3	6,25	4	1	0
6,25	2.25	1	0	1
2.25	0,25	0	1	4
1	0	0,25	2.25	6.25
0	1	2.25	6.25	12,3

$$\sigma_1^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2$$

$$= \frac{1^2+1^2}{2} - 1^2 = \frac{2}{2} - 1 = 0$$

$$\sigma_2^2 = \frac{1^2+3^2}{2} - (2)^2 = \frac{10}{2} - 4 = 1$$

تباين المجتمع :

$$\sigma^2 = \frac{1^2+3^2+5^2+6^2+8^2}{5} - (4,6)^2$$

$$\sigma^2 = 5,84$$

القيمة المتوقعة التباينات الممكنة :

$$E(S^2) = \frac{\sum S^2}{n} = \frac{(0+1+4+\dots+10)}{25}$$

$$= 2.92$$

$$E(S^2) = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right) = 5,84\left(\frac{2-1}{2}\right)$$

$$= 2,92$$

في حالة بدون ارجاع :

تذكير بعينات الممكنة من 5.

التباينات الممكنة :

12.3	6,25	4	1
6,25	2.25	1	-
2.25	0,25	-	-
1	-	-	-

تباين المجتمع :

$$\sigma^2 = 5.84$$

القيمة المتوقعة للتباينات الممكنة :

$$E(S^2) = \frac{\sum S^2}{} = \frac{(1+4+\dots+1)}{10}$$

$$= 3,65$$

$$E(S^2) = \sigma^2 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{N}{N-1} = 5.84 \cdot \frac{2-1}{2} \cdot \frac{5}{5-1}$$

$$E(S^2) = 3.65.$$

توزيع المعاينة للتباين (تابع):

2- طبيعة توزيع المعاينة للتباين:

- إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من ~~توزيع~~ مجتمع يتبع توزيع طبيعي بمتوسط μ و تباين σ^2 أي $N(\mu,\sigma^2)$ هو X
وكان $\sigma_{\bar{x}}^2$ هو تباين العينة فإن: $\hat{S}^2$

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \chi^2 = \frac{(n-1)\,\hat{\sigma}_{\bar{x}}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)} \quad \Big/ \; \hat{S}^2 = \frac{S^2 \cdot n}{n-1}$$

مثال: أخذت عينة عشوائية حجمها $n=15$ من توزيع طبيعي $N(\mu,49)$ و كان $\sigma_{\bar{x}}^2$ هو تباين العينة، أوجد الاحتمال التالي:

$$P\left(\sigma_{\bar{x}}^2 < 82{,}9\right)$$

الحل:

$$P\left(\sigma_{\bar{x}}^2 < 82{,}9\right) = P\left(\frac{(n-1)\,\sigma_{\bar{x}}^2}{\sigma^2} < \frac{(15-1)(82{,}9)}{49}\right)$$

$$= P\left(\chi^2_{14} < 23{,}68\right) = 0{,}95$$

$$= 1 - P\left(\chi^2_{14} > 23{,}68\right) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$$

حسب χ^2 تخضع لدرجة حرية $n-14$ أي $15-1=14$ من جدول كاي تربيع نجد أن القيمة الأقرب لـ 23,68 هي 3,70 وبالتالي الاحتمال المقابل لها هو 0,95.

3- طبيعة توزيع المعاينة للنسبة بين تباين عينتين:

ليكن $\sigma_{\bar{x}_1}^2$ تباين عينة عشوائية حجمها n_1، من مجتمع $N(\mu_1,\sigma_1^2)$، وليكن $\sigma_{\bar{x}_2}^2$ تباين عينة عشوائية حجمها n_2

من مجتمع $N(\mu_2, \sigma^2)$ فإن :

$$F = \frac{\left(\frac{n_1 \sigma^2_{\bar{x}_1}}{n_1 - 1}\right)\frac{1}{\sigma_1^2}}{\left(\frac{n_2 \cdot \sigma^2_{\bar{x}_2}}{n_2 - 1}\right)\frac{1}{\sigma_2^2}} = \frac{\frac{\hat{S}_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{\hat{S}_2^2}{\sigma_2^2}} \sim F_{(n_1-1; n_2-1)}$$

مثال : إذا كانت لدينا عينتين عشوائيتين حجمهما $n_1 = 16$ ، $n_2 = 20$ ، سحبت من مجتمعان تباينهما هما 9 و 16 على التوالي .

- أوجد احتمال أن تكون النسبة $\frac{\sigma^2_{\bar{x}_1}}{\sigma^2_{\bar{x}_2}}$ أكبر من 1,74

الحل :

$$P\left(\frac{\sigma^2_{\bar{x}_1}}{\sigma^2_{\bar{x}_2}} > 1{,}74\right) = P\left[\frac{\sigma^2_{\bar{x}_1}\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)\cdot\frac{1}{\sigma_1^2}}{\sigma^2_{\bar{x}_2}\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)\cdot\frac{1}{\sigma_2^2}} > 1{,}74\,\frac{\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)\frac{1}{\sigma_1^2}}{\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)\frac{1}{\sigma_2^2}}\right]$$

$$= P\left[F_{15,19} > 1{,}74\,\frac{\left(\frac{16}{15}\right)\cdot\frac{1}{9}}{\left(\frac{20}{19}\right)\frac{1}{16}}\right]$$

$$= P\left(F_{15,19} > 3{,}15\right) = 0{,}01$$