

# Commande par retour d'état

## 1. INTRODUCTION

La commande par retour d'état est à la commande des systèmes modélisés par leur représentation d'état, ce que la boucle fermée est aux systèmes représentés par une fonction de transfert. L'idée consiste toujours à piloter le système par un signal de consigne et à générer automatiquement le signal de commande en confrontant en permanence la valeur de la consigne et le comportement réel du système. L'écart entre consigne et comportement réel sert de base au signal de commande du système. Dans la commande par retour d'état, nous n'allons pas mesurer le signal de sortie pour le boucler sur l'entrée, mais nous allons nous servir du vecteur d'état complet pour prendre connaissance du comportement du système.

## 2. PRINCIPE DE LA COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT

Le principe est de déterminer une commande telle que les pôles du système de la fonction de transfert du système bouclé soient convenablement placés dans le plan complexe et satisfasse des spécifications d'amortissement, de rapidité...

Les pôles de la fonction de transfert étant les valeurs propres de la matrice d'état, le but est donc de réaliser un asservissement modifiant convenablement la matrice d'état du système.



Figure (1) : *Système en boucle ouverte*

Soit un système décrit par l'équation d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Dans le cadre de ce cours, on se restreint à la commande linéaire construite par rétroaction linéaire de l'état du système sur l'entrée :

$$u(t) = r(t) - Kx(t) \text{ (en boucle ouverte)}$$

Le signal de commande du système (autrement dit l'écart) doit être construit en soustrayant au signal de consigne un signal qui dépend du vecteur d'état. Ce vecteur d'état étant composé de  $n$  signaux  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , on le multiplie par un vecteur ligne ( $K$ ) appelé vecteur de gain pour pouvoir effectuer cette soustraction. On a alors :

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n]$$

Et :

$$u(t) = r(t) - Kx(t) = r(t) - [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

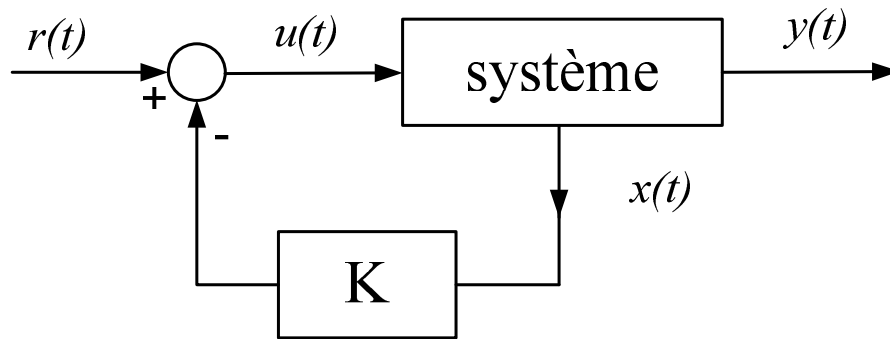


Figure (2) : Bouclage du système par un vecteur de gain.

Les équations du système en boucle fermé sont :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ u(t) = r(t) - Kx(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad -$$

L'équation d'état du système en boucle fermé s'écrit :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[r(t) - Kx(t)] = [A - BK]x(t) + Br(t) \quad -$$

Par conséquent, la matrice d'état du système en boucle fermé vaut :  $(A - BK)$ .

La dynamique du système bouclé est donc fixée par les valeurs propres de la matrice  $(A - BK)$ ; ces valeurs propres sont les racines de l'équation caractéristique :

$$\det(pI - (A - BK)) = Q(p)_{A-BK} = 0 \quad -$$

### 3. RESOLUTION DU PROBLEME PAR PLACEMENT DE POLES

On considère le système supposé commandable  $\dot{x} = Ax + Bu$  et on cherche un régulateur pour ce système de la forme  $u = r - Kx$ , où  $r$  est la nouvelle entrée. Il est légitime de vouloir choisir la matrice de régulation de façon à imposer

les pôles du système bouclé. Ce problème est équivalent à imposer le polynôme caractéristique du système. Soit  $\varphi(p)$  le polynôme désiré, que l'on supposera bien sûr de degré  $n$ . Il nous faut résoudre l'équation polynomiale :

$$\det(pI - (A - BK)) = \varphi(p) \quad -$$

Dite de placement de pôles. Cette équation peut se traduire en  $n$  équation scalaires. Rappelons en effet que deux polynômes de degré  $n$  et unitaire  $p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0$  et  $p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_0$  sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont tous égaux, c'est-à-dire si  $a_{n-1} = b_{n-1}, \dots, a_0 = b_0$ . Noter système des  $n$  équations possède  $m \cdot n$  inconnues qui sont les coefficients  $k_{ij}, i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$ . En fait, une seule matrice solution  $K$  nous suffit. On peut donc fixer  $(m - 1)$  éléments de  $K$  afin qu'il ne nous reste plus que  $n$  inconnues. Mais le système obtenu n'est pas toujours linéaire. Tout est simple lorsque le système possède une seule entrée. En effet, l'équation polynomiale (2-8) se traduit forcément par un système de  $n$  équations linéaires à  $n$  inconnues qui admet une et une seule solution (car le système est commandable).

Dans le cas où le système possède  $m$  entrées, on peut choisir  $K$  de la forme :

$$K = \tilde{B}K_1$$

Où la matrice  $\tilde{B}(m \times 1)$  est choisie arbitrairement de façon à conserver la commandabilité et à solliciter les entrées les moins coûteuses. La quantité  $K_1 = [k_1, \dots, k_n]$  est la matrice  $1 \times n$  à déterminer. Le système polynomiale (2-8) se traduit alors par un système linéaire en  $k_1, \dots, k_n$ .

### 3.1. APPLICATION DE LA METHODE PLACEMENT DE POLES

Nous allons ici illustrer la résolution de l'équation polynomiale, lorsque le système n'admet qu'une seule entrée. Les méthodes proposées ici nécessitent des calculs assez fastidieux. Considérons par exemple le système :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} u$$

Que l'on cherche à stabiliser par un retour d'état de la forme :

$$u = r - Kx$$

Avec

$$K = (k_1 \quad k_2 \quad k_3)$$

Cherchons  $K$  de façon à ce que ce polynôme caractéristique  $\varphi(p)$  du système en boucle fermée ait pour racines  $-1, -1 - 2j, -1 + 2j$ , c'est-à-dire :

$$\varphi(p) = (p + 1)(p + 1 + 2j)(p + 1 - 2j)$$

$$\varphi(p) = p^3 + 3p^2 + 7p + 5$$

$$\det(pI - (A - BK)) = \varphi(p)$$

$$\det \left( \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix} \right) = p^3 + 3p^2 + 7p + 5$$

C'est-à-dire

$$\det \begin{pmatrix} p - 1 + 2k_1 & -4 + 2k_2 & 1 + 2k_3 \\ -6 + 3k_1 & p + 1 + 3k_2 & -3 + 3k_3 \\ -2 - k_1 & -2 - k_2 & p + 5 - k_3 \end{pmatrix} = p^3 + 3p^2 + 7p + 5$$

Ou encore

$$p^3 + (2k_1 + 3k_2 - k_3 + 5)p^2 + (25k_1 + 21k_2 + 10k_3 - 29)p + 41k_1 + 72k_2 + 71k_3 - 129 = p^3 + 3p^2 + 7p + 5$$

On obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 25 & 21 & 10 \\ 41 & 72 & 71 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -29 \\ -129 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 25 & 21 & 10 \\ 41 & 72 & 71 \end{pmatrix}^{-1} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -29 \\ -129 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1.4227 \\ -0.94158 \\ 2.0206 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$K = [1.4227 \quad -0.94158 \quad 2.0206]$$

### 3.2. FONCTION DE TRANSFERT EN BOUCLE FERMEE

On peut calculer la fonction de transfert en boucle fermée du système à partir de la représentation d'état. Supposons que le système, en boucle ouverte, soit régi par les équations d'état suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

On a en boucle fermée :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B \underbrace{(r(t) - Kx(t))}_{u(t)}$$

Donc, on obtient :

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Br(t)$$

Nous appliquons la transformée de Laplace aux équations d'état :

$$\begin{cases} pX(p) = (A - BK)X(p) + BR(p) \\ Y(p) = CX(p) \end{cases}$$

On tire :

$$(I_n p - A + BK)X(p) = BR(p)$$

Donc :

$$X(p) = (I_n p - A + BK)^{-1}BR(p)$$

D'où :

$$G_{BF}(p) = \frac{Y(p)}{R(p)} = C(I_n p - A + BK)^{-1}B \quad -$$

### 3.3. DETERMINATION DU VECTEUR D'ETAT

La commande par retour d'état suppose que l'on connaisse parfaitement le système, mais surtout, que l'on puisse accéder au vecteur d'état. Trois cas peuvent se présenter :

- tous les signaux internes composant le vecteur d'état sont accessibles à la mesure ; dans ce cas, les variables d'état sont mesurables et des capteurs judicieusement placés permettent d'accéder aux informations nécessaires au retour d'état ;
- toutes les variables d'état ne sont pas mesurables mais le système est complètement observable ; il est alors possible de reconstruire le vecteur d'état à un instant donné à partir de la connaissance du signal de sortie et du signal d'entrée du système sur un intervalle de temps précédent ; on utilise pour ce faire, un observateur d'état ;
- le système n'est pas complètement observable ; il est alors nécessaire d'estimer le vecteur d'état au moyen d'un estimateur d'état.