

Chapitre 6 Commande RST numérique

Les méthodes polynomiales figurent parmi les méthodes de synthèse de correcteurs numériques les plus utilisées. Elles sont en effet très souples et relativement simples à mettre en œuvre.

1. Régulateur polynomial RST

Le régulateur polynomial RST est décrit par la structure canonique de la figure (1), où $R(z^{-1})$, $S(z^{-1})$ et $T(z^{-1})$ sont des polynômes. Un tel régulateur est dit ‘à 3 éléments’ (par référence à ces trois polynômes) ou encore ‘à 2 degrés de liberté’. Il peut être utilisé aussi bien pour des systèmes instables que stables.

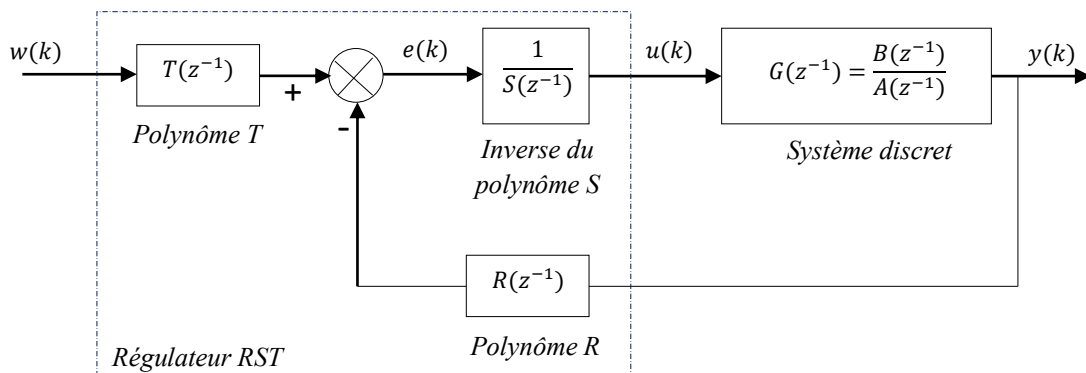


Figure 1 : Commande par régulateur polynomial RST

La fonction de transfert $G(z^{-1})$ du processus à réguler peut être représentée sous la forme :

$$G(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}$$

$$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}$$

La fonction $G(z^{-1})$ est supposée strictement propre : $\deg A > \deg B$.

La fonction de transfert en boucle fermée est donnée comme suit :

$$H_{BF}(z^{-1}) = \frac{T(z^{-1})B(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})R(z^{-1})}$$

On définit le polynôme caractéristique de la fonction $H_{BF}(z^{-1})$ comme suit:

$$P(z^{-1}) = A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})$$

La fonction de transfert $H_{BF}(z^{-1})$ devient alors :

$$H_{BF}(z^{-1}) = \frac{T(z^{-1})B(z^{-1})}{P(z^{-1})}$$

avec :

$$R(z^{-1}) = r_0 + r_1 z^{-1} + \dots$$

$$S(z^{-1}) = s_0 + s_1 z^{-1} + \dots$$

$$T(z^{-1}) = t_0 + t_1 z^{-1} + \dots$$

La synthèse du régulateur polynomial RST est basée sur la stratégie de placement de pôles en boucle fermée.

Le placement de pôles signifie que l'on spécifie les pôles en boucle fermée, donc les zéros du polynôme $P(z^{-1})$:

$$P(z^{-1}) = A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})$$

$$P(z^{-1}) = 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots$$

Alors le choix du dénominateur $P(z^{-1})$ de la fonction de transfert du système bouclé permet d'imposer les pôles du système.

Les polynômes $R(z^{-1})$ et $S(z^{-1})$ doivent être choisis de degrés compatibles avec le degré recherché pour le polynôme $P(z^{-1})$. Afin que le régulateur soit propre, on impose : $\deg P = 2 \deg A - 1$ et $\deg S = \deg R = \deg A - 1$.

La résolution de l'équation connue sous le nom 'd'identité de Bezout' ou encore 'd'équation Diophantienne' fournit les polynômes $R(z^{-1})$ et $S(z^{-1})$ par résolution du système matriciel suivant :

$$S\phi = P$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & b_n & b_{n-1} & \dots & b_1 \\ 0 & a_n & \dots & \cdot & 0 & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_{r-1} \\ r_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{r-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{r-1} \\ p_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_{2n-1} \end{bmatrix}$$

avec S est la matrice de Sylvester, ϕ est le vecteur définissant les paramètres de réglage et P est le vecteur définissant les coefficients du polynôme imposé.

En fait, dans ce système $r = \max(n, m)$, $a_0 = 1$, $s_0 = 1$ et $P_0 = 1$. Pour que la matrice de Sylvester soit inversible il faut et il suffit que les deux polynômes $B(z^{-1})$ et $A(z^{-1})$ soient premiers entre eux. Il vient :

$$S\phi = P \Leftrightarrow \phi = S^{-1}P$$

D'autre part, le polynôme $T(z^{-1})$ peut être choisi comme suit :

$$T(z^{-1}) = k_B P(z^{-1})$$

avec $k_B = 1/B(1)$ si $B(1) \neq 0$ et $k_B = 1$ si $B(1) = 0$.

2. Régulateurs PID numériques filtrés modélisés sous forme polynomiale RST

Soit le schéma de régulation PID numérique filtrée suivant :

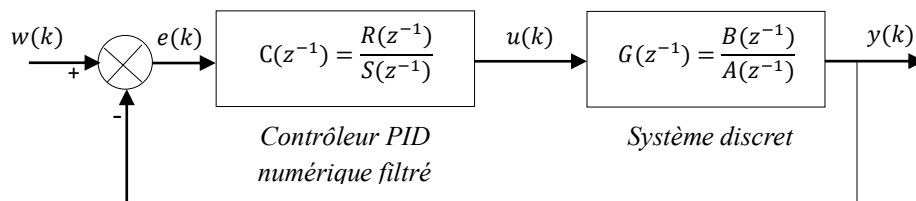


Figure (2) : Schéma de régulation par un PID numérique filtré

Dans ce schéma le régulateur PID prend la forme filtrée suivante :

$$C(z^{-1}) = \frac{R(z^{-1})}{S(z^{-1})}$$

où

$$R(z^{-1}) = r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}$$

$$S(z^{-1}) = (1 - z^{-1})(1 + s_1 z^{-1})$$

Ce régulateur possède quatre paramètres r_0 , r_1 , r_2 et s_1 . Le terme ‘ $1 + s_1 z^{-1}$ ’ situé au dénominateur joue un rôle semblable à celui du filtre passe-bas généralement introduit sur l’action dérivée dans les contrôleurs PID continus. En fait, ces paramètres peuvent être réglés en utilisant la stratégie de placement de pôles.

La fonction de transfert en boucle fermée issue du schéma de la figure (4.22) prend la forme :

$$\frac{Y(z^{-1})}{W(z^{-1})} = \frac{B(z^{-1}) R(z^{-1})}{A(z^{-1}) S(z^{-1}) + B(z^{-1}) R(z^{-1})}$$

$$= \frac{B(z^{-1}) R(z^{-1})}{P(z^{-1})}$$

avec $P(z^{-1})$: polynôme imposé en fonction des spécifications désirées (temps de montée, amortissement, dépassement maximale, etc.).

Les paramètres du contrôleur PID numérique filtré sont choisis en fonctions des spécifications désirées pour le système c’est-à-dire des pôles désirés définis par le polynôme de référence $P(z^{-1})$. Pour ce faire, on résout l’équation de Bezout suivante :

$$P(z^{-1}) = A(z^{-1}) S(z^{-1}) + B(z^{-1}) R(z^{-1})$$

Ce régulateur PID numérique filtré peut être modélisé sous forme d’un correcteur polynomial RST comme suit :

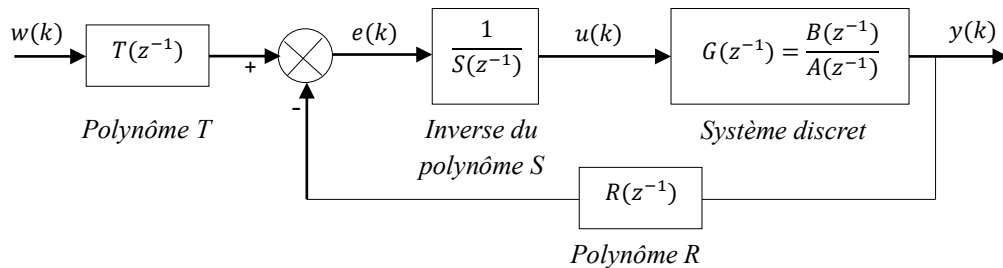


Figure 5 : Régulation PID numérique modélisée sous forme polynomiale RST

où $R(z^{-1})$, $S(z^{-1})$ et $T(z^{-1})$ sont les trois polynômes en ‘ z^{-1} ’ constituant la structure polynomiale RST.

Dans ce cas, la fonction de transfert du système bouclé (Figure (3)) est calculée comme suit:

$$\frac{Y(z^{-1})}{W(z^{-1})} = \frac{T(z^{-1}) B(z^{-1})}{A(z^{-1}) S(z^{-1}) + B(z^{-1}) R(z^{-1})}$$

Afin de déterminer les deux polynômes $R(z^{-1})$ et $S(z^{-1})$, il suffit de résoudre l’équation en imposant un polynôme de référence $P(z^{-1})$.

En effet, si on veut imposer un gain statique unité à la fonction de transfert en prenant :

$$T(z^{-1}) = \frac{P(1)}{B(1)}$$

Et comme $S(1) = 0$, il vient $P(1) = B(1)$ par conséquent, l’équation devient :

$$T(z^{-1}) = R(1) = r_0 + r_1 + r_2$$